МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1988

УДК 539.3

ПРЯМАЯ ТЕОРИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН

АЛЬТЕНБАХ Х.

Вязкоупругая пластина рассматривается как двумерный деформируемый континуум с пятью кинематически независимыми степенями свободы. После приведения основных уравнений линейной теории пластин из линейно-вязкоупругого материала подробно обсуждается вопрос об определении заранее неизвестных их вязкоупругих характеристик. Для случая изотропного неоднородного по толщине линейно-вязкоупругого материала определяют все характеристики пластины с помощью сопоставления точных решений трехмерной теории вязкоупругости для слоя с решениями по теории пластин.

Для иллюстрации рассматриваются частные случаи: учет первой аксиомы реологии, материал Кельвина – Фойхта, материал Максвелла. Кроме того, дана оценка влияния учета деформаций поперечного сдвига в задаче о прогибах трехслойной пластины из материала Кельвина – Фойхта.

1. Основные соотношения линейной теории вязкоупругости в изображениях по Лапласу (геометрические соотношения, уравнения равновесия и определяющие уравнения) полностью совпадают с уравнениями линейной теории упругости, если в них заменить все переменные (кинематические и динамические) соответствующими переменными, преобразованными по Лапласу, а упругие характеристики — соответствующими функциями переменной преобразования Лапласа p (принцип соответствия [1]). Следовательно, решение задачи вязкоупругости получается на основе упругого решения путем замены оригиналов всех функций их изображениями и упругих характеристик соответствующими функциями p.

Выпишем один из возможных вариантов полной системы уравнений линейной теории вязкоупругости [1]:

$$M(z,p)\sigma_{kk}^*(x_1,x_2,z,p)=N(z,p)\varepsilon_{kk}^*(x_1,x_2,z,p) \tag{1.1}$$

$$Q(z,p)s_{ij}^*(x_1,x_2,z,p)=L(z,p)e_{ij}^*(x_1,x_2,z,p)$$

$$\sigma_{ij}^*={}^1/_3\sigma_{kk}^*\delta_{ij}+s_{ij}^*,\quad \varepsilon_{ij}^*={}^1/_3\varepsilon_{kk}^*\delta_{ij}+e_{ij}^*$$

$$M(z,p)=M_0(z)+\sum_{b=1}^{m}M_b(z)p^b,\qquad f^*(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$$

Здесь σ_{ij}, ε_{ij} — тензоры напряжений и деформаций, s_{ij}, e_{ij} — соответствующие девиаторы, δ_{ij} — символ Кронекера, M, N, Q, L — полиномы переменной p различной степени (приведено только выражение для полинома M; полиномы N, Q, L имеют аналогичный вид; коэффициенты этих полиномов, характеризующие вязкоупругие свойства материала, зависят только от поперечной координаты z). Звездочка сверху означает преобразование соответствующей величины по Лапласу. При этом принимаются нулевые начальные условия, что приводит к существенным вычислительным упрощениям. Здесь и дальше индексы i, j, k могут принимать значения 1, 2, 3. Принимается правило суммирования по повторяющимся индексам.

2. Выпишем систему уравнений пластины из изотропного неполярного материала [2, 3], не налагая никаких ограничений на распределение физико-механических свойств материала по толщине пластины

геометрические соотношения

$$\mu_1=u_{1,1},\ \mu_2=u_{2,2},\ \mu_{12}={}^1/_2(u_{1,2}+u_{2,1})$$
$$\gamma_1=w_{,1}+\varphi_1,\ \gamma_2=w_{,2}+\varphi_2 \tag{2.1}$$
$$\varkappa_1=\varphi_{1,1},\ \varkappa_2=\varphi_{2,2},\ \varkappa_{12}={}^1/_2(\varphi_{1,2}+\varphi_{2,1})$$

уравнения равновесия

$$T_{1,1}+T_{12,2}+q_1=0,\ T_{2,2}+T_{12,1}+q_2=0,\ T_{13,,1}+T_{23,2}+q_3=0$$
$$M_{1,1}+M_{12,2}+m_1-T_{13}=0,\ M_{2,2}+M_{12,1}+m_2-T_{23}=0 \tag{2.2}$$

определяющие уравнения

$$T_1=A_1\mu_1+A_2\mu_2+B_1\varkappa_1+B_2\varkappa_2,\ T_2=A_2\mu_1+A_1\mu_2+B_2\varkappa_1+B_1\varkappa_2$$
$$T_{12}=A\mu_{12}+B\varkappa_{12},\ T_{13}=\Gamma\gamma_1,\ T_{23}=\Gamma\gamma_2 \tag{2.3}$$
$$M_1=B_1\mu_1+B_2\mu_2+C_1\varkappa_1+C_2\varkappa_2,\ M_2=B_2\mu_1+B_1\mu_2+C_2\varkappa_1+C_1\varkappa_2$$
$$M_{12}=B\mu_{12}+C\varkappa_{12}$$

Здесь $A=A_1-A_2$, $B=B_1-B_2$, $C=C_1-C_2$; u_1, u_2, w — перемещения точек срединной поверхности; φ_1, φ_2 — повороты; μ_1, μ_2, μ_{12} — деформации растяжения и сдвига в плоскости; γ_1, γ_2 — деформации поперечного сдвига; $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_{12}$ — деформации при изгибе и кручении; T_1, T_2, T_{12} — усилия в плоскости; T_{13}, T_{23} — перерезывающие силы; M_1, M_2, M_{12} — изгибающие и крутящие моменты; q_1, q_2, q_3 — распределенные силовые нагрузки; m_1, m_2 — распределенные моменты нагрузки. Индекс после запятой (1 или 2) означает дифференцирование по x_1 или x_2. Все переменные, кроме A_1, A_2, A, B_1, B_2, B, C_1, C_2, C, являются функциями от координат срединной поверхности x_1, x_2. Коэффициенты A_1, A_2, A, B_1, B_2, B, C_1, C_2, C являются приведенными характеристиками пластины. Систему (2.1)—(2.3) можно отнести к теориям пластин типа Тимошенко, причем она пригодна и для слоистых пластин (т. е. когда свойства материала, из которого изготовлена пластина, могут меняться в зависимости от z).

В [4] определены все приведенные характеристики для случая упругого материала. Для определения вязкоупругих характеристик применяем принцип соответствия. Можно показать, что замена в (2.1)—(2.3) всех переменных их изображениями, а величин A_1, A_2, A, ... — соответствующими функциями $A_1(p)$, $A_2(p)$, $A(p)$, ... приводит к системе уравнений, описывающих вязкоупругое поведение пластин. Остается определить конкретные выражения для приведенных характеристик $A_1(p)$, $A_2(p)$, ...

3. Приведенные характеристики для пластины можно получить из сопоставления точных решений краевых задач по трехмерной теории с соответствующими решениями теории пластин. В данном случае, когда рассматривают только изотропный материал, надо решить задачу изгиба с растяжением полосы и задачу кручения полосы под действием постоянного крутящего момента.

Задача об изгибе с растяжением. В предположении, что лицевые стороны полосы свободны от нагрузки, можно полагать $\sigma_{33}=0$ всюду. В полосе реализуется поле деформаций $\varepsilon_{11}^*(z, p)=D^*(p)+R^*(p)z$, $\varepsilon_{33}^*(z, p)\neq\neq 0$. Остальные компоненты тензора деформаций равны нулю. С помощью соотношений (1.1) можно определить сначала $\varepsilon_{33}^*(z, p)$, а затем отличные от нуля компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{11}^*(z, p)=L(2QN+ML)[Q(QN+2ML)]^{-1}\varepsilon_{11}^*(z, p)=$$
$$=F_1(z, p)\varepsilon_{11}^*(z, p)$$
$$\sigma_{22}^*(z, p)=L(QN-ML)[Q(QN+2ML)]^{-1}\varepsilon_{11}^*(z, p)=$$
$$=F_2(z, p)\varepsilon_{11}^*(z, p)$$

Примем известные из теории упругих пластин соотношения между напряжениями, усилиями и моментами [5]. Окончательно получаем

$$T_1^*(p)=\langle F_1(z,\ p)\rangle D^*(p)+\langle F_1(z,\ p)z\rangle R^*(p) \tag{3.1}$$

$$T_2^*(p)=\langle F_2(z,p)\rangle D^*(p)+\langle F_2(z,p)z\rangle R^*(p)$$

$$M_1^*(p)=\langle F_1(z,p)z\rangle D^*(p)+\langle F_1(z,p)z^2\rangle R^*(p)$$

$$M_2^*(p)=\langle F_2(z,p)z\rangle D^*(p)+\langle F_2(z,p)z^2\rangle R^*(p)$$

где треугольные скобки означают интегрирование по z в пределах толщины пластины h.

В теории пластин для аналогичной задачи имеем следующие перемещения и повороты: $u_1^*(x_1,\ p)=D^*(p)x_1$, $w^*(x_1,\ p)=-{}^1/_2R^*(p)x_1^2$, $\varphi_1^*(x_1,p)=R^*(p)x_1$.

После некоторых преобразований находим усилия и моменты

$$T_1^*(p)=A_1(p)D^*(p)+B_1(p)R^*(p),\ T_2^*(p)=A_2(p)D^*(p)+$$
$$+B_2(p)R^*(p) \tag{3.2}$$

$$M_1^*(p)=B_1(p)D^*(p)+C_1(p)R^*(p)$$

$$M_2^*(p)=B_2(p)D^*(p)+C_2(p)R^*(p)$$

Сопоставление соотношений (3.1) и (3.2) дает

$$A_1(p)=\langle F_1(z,p)\rangle,\quad A_2(p)=\langle F_2(z,p)\rangle,$$

$$B_1(p)=\langle F_1(z,\ p)z\rangle\quad B_2(p)=\langle F_2(z,\ p)z\rangle, \tag{3.3}$$

$$C_1(p)=\langle F_1(z,p)z^2\rangle,\quad C_2(p)=\langle F_2(z,p)z^2\rangle$$

Можно показать, что

$$A(p)=A_1(p)-A_2(p)=\langle F_1(z,p)-F_2(z,p)\rangle=$$
$$=\langle L(z,p)/Q(z,p)\rangle$$

$$B(p)=\langle zL(z,p)/Q(z,p)\rangle,\quad C(p)=\langle z^2L(z,p)/Q(z,p)\rangle$$

Если свойства материала симметричны относительно плоскости $z=0$, то $B_1(p)=B_2(p)=B(p)=0$. Найденные выражения (3.3) обобщают известные в литературе [6–8] (в этих работах не допускаются меняющиеся по толщине вязкоупругие свойства, т. е. рассматривается более простой случай однослойных пластин). Для однослойной пластины из (3.3) можно получить значения, указанные в [6–8], как частный случай.

Для тонких однослойных пластин из вязкоупругого материала учет деформаций поперечного сдвига не дает сильных отличий в решениях конкретных задач. Но опыт расчета упругих многослойных конструкций показывает существенное влияние деформаций поперечного сдвига [3].

Задача о кручении. Для определения $\Gamma(p)$ рассмотрим следующую двумерную задачу: на край полосы $x_1=\pm a$ действует постоянный (по координатам) крутящий момент. Срединная поверхность принимает форму $u_2^*=u_2^*(x_1,\ p)$, $\varphi_2^*=\varphi_2^*(x_1,\ p)$. Для усилий и моментов имеем $2T_{12}^*(x_1,\ p)=A(p)u_2^*(x_1,\ p)_{,1}+B(p)\varphi_2^*(x_1,\ p)_{,1}$, $T_{23}^*(x_1,\ p)=\Gamma(p)\varphi_2^*(x_1,\ p)$, $2M_{12}^*\cdot(x_1,p)=B(p)u_2^*(x_1,p)_{,1}+C(p)\varphi_2^*(x_1,p)_{,1}$.

После подстановки в уравнения статики с учетом граничных условий получим (c — некоторая константа):

$$u_2^*(x_1,p)=B(p)\varphi_2^*(x_1,p)/A(p)$$

$$\varphi_2^*(x_1,p)=c\lambda(p)\ \mathrm{sh}\ (\lambda(p)x_1)\,[\Gamma(p)\ \mathrm{ch}\ (\lambda(p)a)\,]^{-1}$$

$$\lambda^2(p)=2\Gamma(p)A(p)\,[A(p)C(p)-B(p)^2]^{-1}$$

В аналогичной трехмерной задаче имеем поле перемещений $u^*=w^*=0$, $v^*=v^*(x_1,z,p)$. После подстановки в определяющие уравнения (1.1), а затем в уравнения равновесия получаем

$$\frac{L(z,p)}{Q(z,p)}v^*(x_1,z,p)_{,11}+\left[\frac{L(z,p)}{Q(z,p)}v^*(x_1,z,p)_{,z}\right]_{,z}=0$$

$$z=\pm h/2:\ v^*(x_1,z,p)_{,z}=0$$

$$x_1=\pm a:\ [L(z,p)/Q(z,p)]v^*(x_1,z,p)_{,1}=f(z)$$

Решение этой краевой задачи имеет вид

$$v^*(x_1,z,p)=V^*(z,p)\ \mathrm{sh}\,(\lambda_0(p)x_1)/[\mathrm{ch}\,(\lambda_0(p)a)]$$

где $\lambda_0(p)$ — наименьший положительный корень следующей задачи:

$$\left[\frac{L(z,p)}{Q(z,p)}V^*(z,p)_{,z}\right]_{,z}+\lambda_0^2(p)\frac{L(z,p)}{Q(z,p)}V^*(z,p)=0$$

$$z=\pm h/2:\ V^*(z,p)_{,z}=0$$

Можно показать, что эти две задачи дают совпадение силовых величин и совпадение кинематических величин с весом $L(z,p)/Q(z,p)$, когда $\lambda(p)=\lambda_0(p)$. Следовательно, получаем для $\Gamma(p)$:

$$\Gamma(p)=\lambda_0^2(p)[A(p)C(p)-B(p)^2]/(2A(p)) \tag{3.4}$$

В случае однослойных пластин в соответствии с (3.4) имеем $\Gamma(p)=$ $={}^1/_{12}\pi^2A(p)$. Очевидно, что порядок $\Gamma(p)$ совпадает с оценкой, полученной в [9], однако формула (3.4) является более общей. Оценки $\lambda_0^2(p)$, данные в [3] для случая неоднородных упругих пластин, показывают, что в общем случае для $\Gamma(p)$ можно получить различные порядки.

4. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Случай упругой объемной деформации. В этом случае имеем [10]: $\sigma_{kk}^*(x_1,x_2,z,p)=3K(z)\varepsilon_{kk}^*(x_1,x_2,z,p)$, $M(z,p)=1$, $N(z,p)=3K(z)$, где $K(z)$ — модуль объемной деформации. Тогда

$$F_1(z,p)=\frac{L(z,p)}{Q(z,p)}\frac{6Q(z,p)K(z)+L(z,p)}{3Q(z,p)K(z)+2L(z,p)}$$

$$F_2(z,p)=\frac{L(z,p)}{Q(z,p)}\frac{3Q(z,p)K(z)-L(z,p)}{3Q(z,p)K(z)+2L(z,p)}$$

В случае чисто упругого материала ($G(z)$ — модуль сдвига): $s_{ij}^*(x_1,x_2,z,p)=$ $=2G(z)e_{ij}^*(x_1,x_2,z,p)$, $Q(z,p)=1$, $L(z,p)=2G(z)$, а следовательно

$$F_1(z,p)=F_1(z)=4G(z)[3K(z)+G(z)]/[3K(z)+4G(z)]$$

$$F_2(z,p)=F_2(z)=2G(z)[3K(z)-2G(z)]/[3K(z)+4G(z)]$$

Имеем следующие выражения для жесткостей на изгиб, кручение и поперечный сдвиг в случае неоднородных упругих пластин:

$$C_1=\langle 4G(z)[3K(z)+G(z)][3K(z)+4G(z)]^{-1}z^2\rangle=D$$

$$C=\langle 2G(z)z^2\rangle,\qquad \Gamma=\lambda_0^2\langle G(z)z^2\rangle$$

причем λ_0^2 определяется из следующей задачи:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[G(z)\frac{\partial}{\partial z}V(z)\right]+\lambda_0^2G(z)V(z)=0$$

$$z=\pm h/2:\quad \partial V(z)/\partial z=0$$

Материал Кельвина — Фойхта [10]. Здесь следует положить ($\eta(z)$ — коэффициент вязкости): $M(z,p)=1$, $N(z,p)=3K(z)$, $Q(z,p)=1$, $L(z,p)=2[G(z)+\eta(z)p]$. Тогда имеем

$$F_1(z,p)=\frac{4[G(z)+\eta(z)p][3K(z)+G(z)+\eta(z)p]}{3K(z)+4[G(z)+\eta(z)p]}$$

$$F_2(z,p)=\frac{2[G(z)+\eta(z)p]\{3K(z)-2[G(z)+\eta(z)p]\}}{3K(z)+4[G(z)+\eta(z)p]} \tag{4.1}$$

и, кроме того, уравнение для определения $\lambda_0(p)$:

$$\{[G(z)+\eta(z)p]V^*(z,\ p)_{,z}\}_{,z}+\lambda_0^2(p)[G(z)+\eta(z)p]V^*(z,\ p)=0$$
$$z=\pm h/2:\quad V^*(z,\ p)_{,z}=0 \tag{4.2}$$

Материал Максвелла [10]. Здесь следует положить $M(z,\ p)=1$, $N(z,\ p)=3K(z)$, $Q(z,\ p)=p+G(z)/\eta(z)$, $L(z,\ p)=2G(z)p$. Тогда имеем

$$F_1(z,\ p)=4G(z)p[3K(z)\Delta+G(z)p]\{\Delta[3K(z)\Delta+4G(z)p]\}^{-1} \tag{4.3}$$
$$F_2(z,\ p)=2G(z)p[3K(z)\Delta-2G(z)p]\{\Delta[3K(z)\Delta+4G(z)p]\}^{-1}$$
$$\Delta=p+G(z)/\eta(z)$$

а $\lambda_0(p)$ определяем с помощью следующей задачи Штурма:

$$[2G(z)p\Delta^{-1}V^*(z,\ p)_{,z}]_{,z}+\lambda_0^2(p)2G(z)p\Delta^{-1}V^*(z,\ p)=0$$
$$z=\pm h/2:\quad V^*(z,\ p)_{,z}=0 \tag{4.4}$$

Окончательные выражения для всех переменных построенной здесь теории вязкоупругих пластин можно получить после обратного преобразования по Лапласу. Как показывают примеры конкретных вязкоупругих характеристик (4.1)–(4.4), это обращение удается получить аналитически только для частных случаев.

5. Рассмотрим в заключение задачу об изгибе вязкоупругой пластины. Пусть пластина ($0\leqslant x_1\leqslant a$, $0\leqslant x_2\leqslant b$) шарнирно опертая по краям $x_1=0$, $x_1=a$, $x_2=0$, $x_2=b$ и нагружена поперечной распределенной силой $q_3=q(x_1,\ x_2)$. Если все свойства материала симметричны относительно $z=0$, то дифференциальное уравнение для упругих прогибов с учетом деформаций поперечного сдвига имеет вид [3]:

$$\Delta\Delta w(x_1,\ x_2)=q(x_1,\ x_2)/D-\Delta q(x_1,\ x_2)/\Gamma$$

где Δ — оператор Лапласа, D — жесткость на изгиб, Γ — жесткость на поперечный сдвиг. Решение этого уравнения есть

$$w(x_1,\ x_2)=w^{\text{к}}(x_1,\ x_2)+w^{\text{т}}(x_1,\ x_2)$$
$$w^{\text{к}}(x_1,x_2)=\frac{1}{D}\sum_{m,n}\frac{q_{mn}}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}\sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2)$$
$$w^{\text{т}}(x_1,x_2)=\frac{1}{\Gamma}\sum_{m,n}\frac{q_{mn}}{\lambda_m^2+\mu_n^2}\sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2)$$
$$q_{mn}=\frac{4}{ab}\int\limits_0^a\int\limits_0^b q(x_1,x_2)\sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2)\,dx_1\,dx_2$$
$$\lambda_m=m\pi/a,\quad \mu_n=n\pi/b$$

В случае квадратной пластины и синусоидальной нагрузки максимум прогиба есть

$$w_{\max}=[4D\pi^4/(q_0a^4)]\,w(a/2,\ a/2)= \tag{5.1}$$
$$=1+2D\pi^2/(\Gamma a^2)\quad (q_0=\text{const})$$

Для однослойных пластин поправка $2D\pi^2/(\Gamma a^2)$ имеет порядок $O(h^2/a^2)$, для многослойных она может быть существенной.

Эту же задачу рассмотрим на основе принципа соответствия для вязкоупругих пластин. Для пропорционального нагружения $q(x_1,\ x_2,\ t)=q^0(x_1,\ x_2)f(t)$ при одинаковых краевых условиях, одинаковой форме пластины и нагружении имеем следующую связь между изображениями вязкоупругих прогибов и упругих прогибов: $W^{\text{к}*}(x_1,\ x_2,\ p)=pR(p)w^{\text{к}*}\cdot(x_1,\ x_2,\ p)$, $W^{\text{т}*}(x_1,\ x_2,\ p)=pS(p)w^{\text{т}*}(x_1,\ x_2,\ p)$, $R(p)=D/(pD(p))$, $S(p)=\Gamma/(p\Gamma(p))$.

Если нагрузка имеет вид функции Хэвисайда $q(x_1,\ x_2,\ t)=q_2(x_1,\ x_2)\cdot H(t)$, то окончательно получаем $W(x_1,\ x,\ t)=R(t)w_s^{\text{к}}(x_1,\ x_2)+S(t)w_s^{\text{т}}\cdot(x_1,\ x_2)$, где $w_s^{\text{к}}(x_1,\ x_2)$, $w_s^{\text{т}}(x_1,\ x_2)$ — статические упругие прогибы. При условиях, соответствующих уравнению (5.1), имеем

$$W'_{\max}(t)=[4D\pi^4/(q_0a^4)]W(a/2,\,a/2,\,t)=$$
$$=R(t)+2D\pi^2/(\Gamma a^2)S(t)$$

Рассмотрим трехслойную пластину со следующими параметрами: толщина среднего слоя h, толщина одного из внешних слоев равна s. Внешние слои состоят из одинакового чисто упругого материала ($\eta_1=0$), заполнитель — из вязкоупругого несжимаемого материала. Индекс 1 соответствует внешним слоям, индекс 2 — заполнителю. С учетом неравенства $2s\ll h$ имеем для модели Кельвина — Фойхта (4.1), (4.2):

$$D(p)=\frac{h^3}{3}\eta_2p+D,\quad D=\frac{h^3}{3}\left[G_2+\frac{G_1(3K_1+G_1)}{3K_1+4G_1}\frac{6s}{h}\right]$$

$$R(p)=\frac{1}{p}-\left[p+\frac{3D}{\eta_2h^3}\right]^{-1},\qquad R(t)=1-\exp\left(-\frac{30}{\eta_2h^3}t\right)$$

$$\Gamma(p)=\lambda^2(p)\frac{h^3}{12}\left[G_2+\eta_2p+G_1\frac{6s}{h}\right],\qquad \frac{G_2+\eta_2p}{G_1}=\operatorname{tg}(\lambda(p)s)\operatorname{tg}\lambda(p)\frac{h}{2}$$

Если величина $\lambda(p)$ мала, то ее можно приближенно вычислить: $\lambda^2(p)=2(G_2+\eta_2p)/(G_1hs)$. Тогда

$$\Gamma=G_2h^2[G_2+G_16s/h]/(6G_1s) \tag{5.2}$$
$$S(p)=p^{-1}-\tau_1[(\tau_1-\tau_2)(p+\tau_1^{-1})]^{-1}+$$
$$+\tau_2[(\tau_1-\tau_2)(p+\tau_2^{-1})]^{-1}$$
$$\tau_1=\eta_2/G_2,\quad \tau_2=\eta_2/[G_2+G_16s/h],\quad \tau_1>\tau_2$$

После обращения второго соотношения (5.2) получаем

$$S(t)=1-[(G_2+G^\circ)/G^\circ]\exp(-t/\tau_1)+(G_2/G^\circ)\exp(-t/\tau_2)$$
$$G^\circ=G_1(6s/h)$$

Прогибы в середине квадратной пластины будут

$$W_{\max}(t)=1-\exp\{-[3D/(G_2h^3)]t/\tau_1\}+ \tag{5.3}$$
$$+[2D\pi^2/(\Gamma a^2)]\{1-(1+G_2/G^\circ)\exp(-t/\tau_1)+$$
$$+(G_2/G^\circ)\exp[-(1+G^\circ/G_2)t/\tau_1]\}$$

Видно, что при определенных соотношениях D/Γ второе слагаемое в (5.3) может оказать существенное влияние на прогибы, т. е. в этих случаях следует учитывать влияние деформаций поперечного сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир. 1974. 338 с.
2. *Жилин П. А.* Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. № 386. С. 29–46.
3. *Altenbach H.* Die Grundgleichungen einer linearen Theorie für dünne, elastische Platten und Scheiben mit inhomogenen Materialeigenschaften in Dickenrichtung // Tech. Mech. 1984. B. 5. H. 2. S. 51–58.
4. *Altenbach H.* Die Ermittlung der Deformationsenergie für dünne Platten und Schalen mit in Dickenrichtung veränderlichen Materialeigenschaften // Wiss. Ztschr. Techn. Hochsch. Magdeburg. 1984. B. 28. H. 2. S. 29–33.
5. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз. 1962. 431 с.
6. *Mase G. E.* Behavior of viscoelastic plates in bending // Proc. ASCE. J. Eng. Mech. Div. 1960. V. 86. No. EM 3. P. 25–39.
7. *Nowacki W.* Theorie des Kriechens. Wien: F. Deuticke Verlag. 1965. 224 S.
8. *Rothert H.* Lineare konstitutive Gleichungen der viskoelastischen Cosseratfläche // ZAMM. 1975. B. 55. H. 11. S. 647–656.
9. *Naghdi P. M.* The Theory of Shells and Plates // Handbuch der Physik. B. VIa/2. B.: Springer. 1972. S. 425–640.
10. *Рейнер М.* Реология. М.: Наука. 1965. 223 с.

Магдебург

Поступила в редакцию 8.IV.1986