

УДК 539.3

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН В ПЛАСТИНАХ

ЯРЕМА С. Я.

Известные критерии предельного равновесия хрупкого тела с произвольно ориентированной трещиной выражаются через взаимосвязанные, но имеющие самостоятельное значение, уравнения для определения предельной нагрузки и для нахождения направления роста трещины, записанные относительно определенной характеристики (напряжение, деформация, энергия деформации) напряженно-деформируемого состояния (чаще всего ее сингулярной составляющей) в малой окрестности фронта трещины (см. обзор [1]). Таким образом, они являются по существу критериями локального разрушения, т. е. страгивания трещины, после чего наступает ее рост, оканчивающийся (но необязательно) полным разрушением тела. Для описания этой стадии необходимо уравнения предельной нагрузки заменить уравнениями скорости роста трещины, связывающими ее модуль и направление с характеристиками локального механического состояния, обычно (чем ограничимся) коэффициентами интенсивности напряжений. Как предельный случай такого уравнения для трещин отрыва можно рассматривать и критерий Ирвина, записанный в виде  $v=0$ , если  $K_I < K_{Ic}$ , и  $v > 0$ , если  $K_I = K_{Ic}$  ( $v$  — скорость роста трещины,  $K_I$  и  $K_{Ic}$  — коэффициент интенсивности напряжений и его критическое значение), с помощью которого решалась одна из первых задач этого класса об эволюции трещины, близкой к круговой в растянутом на бесконечности теле [2]. Без уравнения скорости роста трещины нельзя определить закон ее роста во времени, и время до разрушения тела или потери им работоспособности при достижении трещиной определенных размеров, а также траектории точек фронта, если в его окрестности отсутствует симметрия поля напряжений, относительно касательной к трещине плоскости. Исключение в условиях плоской задачи составляют случаи, когда достаточно проследить движение лишь одной вершины трещины (одна краевая трещина, внутренняя трещина с одним неподвижным концом или с идентичными условиями в обоих концах). При этом траектория (но не закон движения) может быть определена по текущим значениям коэффициента интенсивности напряжений при заданном критерии выбора направления трещины. Аналогично в трехмерном теле нельзя без уравнения скорости роста трещины определить форму фронта трещины, если значение коэффициента интенсивности напряжений вдоль него изменяется.

Таким образом, для прогнозирования кинетики разрушения путем развития криволинейных трещин, а также критической нагрузки и долговечности необходимо, во-первых, определить напряженно-деформированное состояние коэффициента интенсивности напряжений в каждой точке фронта трещины и, во-вторых, знать его взаимосвязь с направлением и значением скорости ее роста [3–5]. В последнее десятилетие здесь достигнуты значительные успехи. Разработаны эффективные методы определения КИН для трещин любой формы, особенно в двумерном случае [6]. Предложены критерии для определения направления (угла  $\theta$ ) роста трещины [1], которые хорошо согласуются с наблюдаемой плавностью (в макро) плоскостей трещины. Встречающиеся изломы, как правило, могут быть отнесены за счет резкого (по сравнению со скоростью роста трещины) изменения направления главных напряжений, дефектов структуры и динамических эффектов, а также изменений механизмов разрушения [7]. Накоплены и в известной степени обобщены в виде уравнений данные о скорости роста трещины при статическом [8–10] и особенно циклическом [10, 11] нагружении, правда, только для трещин отрыва, расположенных перпендикулярно наибольшему растягивающему напряжениям.

Несмотря на эти достижения, закономерности развития криволинейных трещин исследованы мало, хотя они наряду с познавательным (в частности, для интегральной проверки исходных уравнений) имеют и прикладное значение при прогнозировании долговечности элементов конструкций, оптимизации их форм и разработке мер по торможению трещин. Они позволяют также моделировать рост трещин в полях напряжений, возмущенных дефектами структуры (поры, включения), с целью выяснения влияния таких дефектов и создания на этой основе высокопрочных материалов. Большое внимание до сих пор уделяли лишь начальному направлению роста трещин и разрушающей нагрузке пластины с косыми по отношению к главным напряжениям трещинами [1]. Рост трещин во времени, в основном при усталости, исследовали главным образом в случаях, когда трещины развиваются в своей плоскости (см. [8, 9] и обзоры [12, 13]). Весьма немногочис-

ленные экспериментальные и аналитические исследования криволинейных траекторий ограничены случаями, когда для их определения не требуется уравнения скорости роста трещины [4, 6, 9, 10, 14, 15].

В данной работе представлены и обсуждаются современное состояние вопроса и итоги проведенных автором с сотрудниками экспериментальных и аналитических исследований роста трещин, несимметрично расположенных в поле напряжений в хрупких изотропных пластинах при статическом и циклическом нагружениях.

**1. Постановка и путь решения задачи.** Задачу решали дифференциальным (пошаговым) методом [16]. Трещину рассматривали как ломаную, каждое звено которой соответствует малому ее приросту  $\Delta l$  вдоль прямой под углом  $\theta$  к предыдущему направлению (фиг. 1). После каждого прироста трещины вычисляли коэффициент интенсивности напряжений, отрыва  $K_I$  и поперечного сдвига  $K_{II}$  у правой (+) и левой (-)

ее вершин, воспользовавшись методом сингулярных интегральных уравнений. При их выводе исходили из интегральных представлений комплексных потенциалов Мусхелишвили, а сами уравнения решали, преобразовав их с помощью квадратурных формул Гаусса — Чебышева в систему линейных алгебраических уравнений [6]. Поскольку действительные траектории трещин — гладкие кривые, особенности в вершинах ломаной не учитывались,

за исключением точек, где они реально существуют; в рассматриваемых задачах — это излом, образуемый при первом продвижении начальной трещины (точки  $A_0$  и  $B_0$  на фиг. 1). Угол отклонения трещины  $\theta$  определяют с помощью критерия максимальных растягивающих напряжений ( $\sigma_6$ -критерия), позволяющего естественно обобщить на криволинейные трещины уравнение скорости роста трещины, установленное по результатам наблюдений за трещинами отрыва, а также представить угол  $\theta$  в явном виде [2, 10]:

$$\theta^\pm = 2 \arctg \{ [K_I^\pm - \sqrt{(K_I^\pm)^2 + 8(K_{II}^\pm)^2} \operatorname{sgn} K_I^\pm] / (4K_{II}^\pm) \} \quad (1.1)$$

Затем задавали приращения длины трещины  $\Delta l$  за  $\Delta N$  циклов нагружения пропорционально скоростям  $v$  продвижения ее вершин

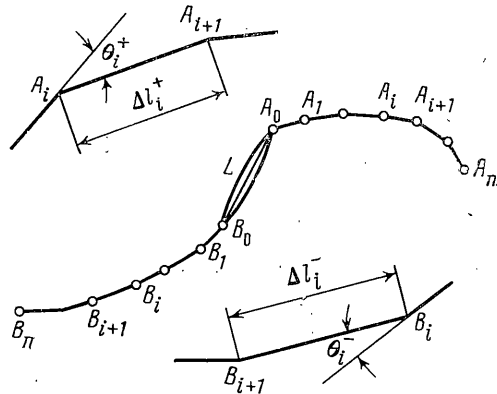
$$\Delta l^\pm = \Delta N v^\pm \quad (1.2)$$

Скорости роста трещин усталости определяли из уравнения [11]:

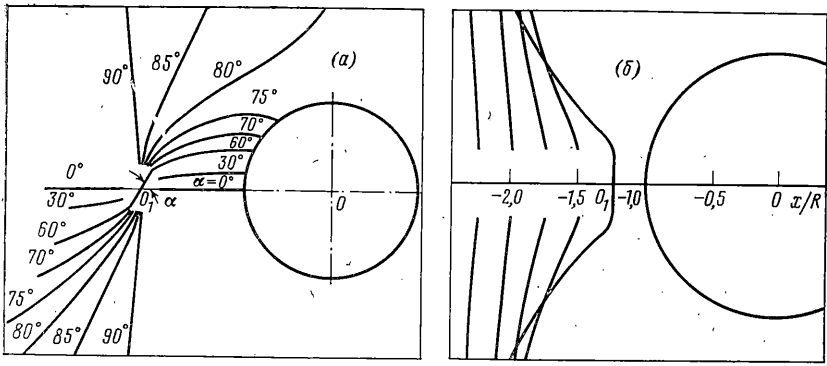
$$v^\pm = \Delta l^\pm / \Delta N = v_0 [(K_{I0}^\pm - K_{Ih}) / (K_{fc} - K_{I0}^\pm)]^q \quad (1.3)$$

где  $K_{fc}$  и  $K_{Ih}$  — критический и пороговый коэффициенты интенсивности напряжений;  $v_0$ ,  $q$  — параметры;  $K_{I0}^\pm = [K_I^\pm \cos(\theta^\pm/2) - 3K_{II}^\pm \sin(\theta^\pm/2)] \cdot \cos^2(\theta^\pm/2)$ ;  $\theta^\pm$  определяются уравнением (1.1);  $K_{I0}^\pm$  — наибольший коэффициент интенсивности напряжений цикла в плоскости очередного прироста трещины. Повторяя последовательно указанную процедуру находили траекторию трещины как функцию числа циклов нагружения.

**2. Рост усталостной трещины вблизи отверстия.** Рассмотрим рост трещины усталости вблизи кругового отверстия в пластине при всестороннем циклическом равномерном растяжении на бесконечности усилиями  $p$  [16]. Коэффициент интенсивности напряжений в вершинах трещины вычисляли по производной от функции скачка перемещений  $q'(t)$  на берегах разре-



Фиг. 1



Фиг. 2

за  $L$ , которую находили в результате решения сингулярного интегрального уравнения

$$\int_L [M(t, \tau) g'(\tau) d\tau + N(t, \tau) \overline{g'(\tau)} d\bar{\tau}] = f(t); \quad t, \quad \tau \in L \quad (2.1)$$

$$M(t, \tau) = e_1 - R^2 \bar{e}_2 / t + R^2 e_2^2 (R^2 - \tau \bar{\tau}) / \tau + [e_1 - R^2 \bar{e}_2 / \bar{t} + R^2 e_2^2 (R^2 - \tau \bar{\tau}) (2t \bar{t}^2 \tau + R^4 - 3R^2 \bar{t} \tau) / (\bar{t}^2 \tau)] d\bar{t} / dt$$

$$N(t, \tau) = \bar{e}_1 - R^2 e_2 / \bar{t} + R^2 \bar{e}_2^2 (R^2 - \tau \bar{\tau}) / \tau + [\bar{e}_1^2 (t - \tau) + R^2 / (\bar{t}^2 \tau) + e_2^2 (R^4 t \bar{t} - 2R^2 t \bar{t}^2 \tau - 2R^4 + 3R^4 \bar{t} \tau) / \bar{t}^3] d\bar{t} / dt, \quad d\bar{t} / dt = \exp(-2i\varphi(t))$$

$$f(t) = 2\pi p (1 + \bar{t}^{-2} d\bar{t} / dt), \quad e_1 = (\tau - t)^{-1}, \quad e_2 = (R^2 - \bar{t} \tau)^{-1}$$

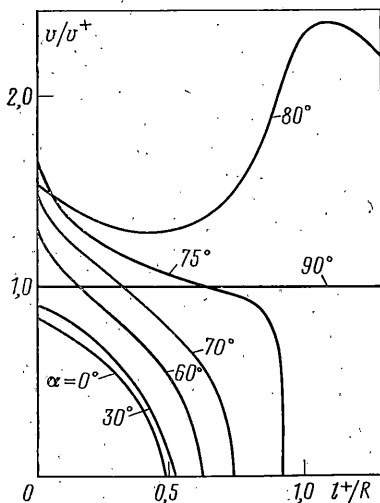
где  $\varphi(t)$  — угол между касательной к контуру  $L$  в точке  $t$  и осью  $Ox$ ,  $R$  — радиус отверстия; черта сверху обозначает комплексное сопряжение.

При этом предполагалось, что потеря устойчивости траектории трещины, когда она самопроизвольно сворачивает в сторону (как, например, в образце типа двухконсольной балки), не происходит. Этот особый случай, наблюдаемый при двухосном нагружении пластины, если растягивающие напряжения, параллельные трещине впереди ее вершины, больше чем перпендикулярные, требует рассмотрения регулярной части поля напряжений.

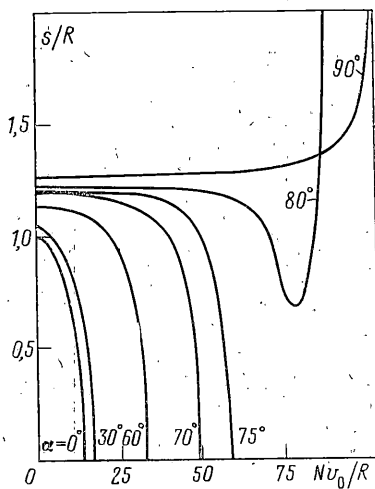
Параметры уравнения (1.3) определяли по известной методике<sup>1</sup> на тонких (толщиной 3 мм) дисковых образцах из алюминиевого сплава Д16Т с трещиной, перпендикулярной направлению проката. Получено:  $K_{Ib} = 3,8$  МПа·м<sup>1/2</sup>,  $K_{Ic} = 34,7$  МПа·м<sup>1/2</sup>,  $\nu_0 = 4,1 \cdot 10^{-7}$  м/цикл,  $q = 1,7$ .

Анализ результатов расчета показал, что траектория трещины существенно зависит от ее ориентации (фиг. 2, а); при малых углах наклона трещины  $\alpha$  правая ее вершина выходит на отверстие, а при больших, начиная с точки перегиба траектории, им отталкивается. Такой эффект тем сильнее, чем ближе трещина к отверстию (фиг. 2). Отношение скоростей левой  $v^-$  к правой  $v^+$  вершин трещины также весьма чувствительно к ее ориентации (на фиг. 3 показана зависимость этой величины от пути  $l^+$ , пройденного правой вершиной трещины). При малых углах наклона всегда быстрее движется правая вершина, при больших — вначале левая, затем правая, а при больших — всегда левая. Такая картина обусловлена двумя противоборствующими факторами — концентрацией напряжений возле отверстия и экранированием их нагрузки. По известным траекториям можно построить кривые, изображающие зависимость пути трещины (в частности, расстояние  $s$  ее вершины от числа циклов (фиг. 4).

<sup>1</sup> Ярема С. Я., Панасюк В. В., Попович В. В. Метод испытания металлов на циклическую трещиностойкость. Препринт № 9. Львов: Физ.-мех. ин-т АН УССР. 1978. 54 с.



Фиг. 3



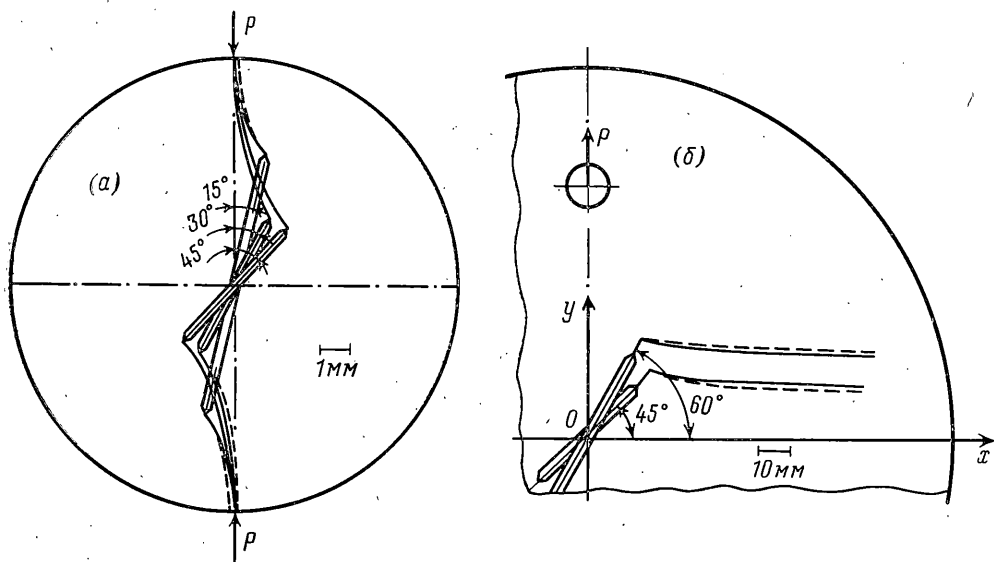
Фиг. 4

Таким образом, результаты расчета не всегда соответствуют интуитивным представлениям. В зависимости от взаимного расположения трещины и отверстия возможно не только ее ускорение, но и замедление; при этом она необязательно втягивается в зону концентрации напряжений у отверстия, но может от нее отталкиваться. Возможен случай, когда во время продвижения трещины у отверстия образуется вторая трещина и дальнейшее разрушение будет определяться взаимодействием двух трещин. Кроме того, трещина может «завязнуть» в отверстии или по пути вследствие понижения  $K_{Ic}$  до порогового уровня. Учет этих факторов открывает новый класс задач о разрушении. Во избежание технических трудностей экспериментальные исследования траекторий трещин с целью их сопоставления с расчетными проводили для случаев, когда трещина развивается симметрично относительно своей середины.

**3. Траектории спонтанного роста трещины.** Траектории закритического роста изучали [17, 18] при разрушении кругового диска, сжимаемого силами, наклоненными под углом  $\alpha$  к центральной трещине (фиг. 5, а). Такого типа образцы широко применяются для испытаний на трещиностойкость хрупких материалов: керамики, твердых сплавов, горных пород, бетона и других.

Расчеты показали, что трещина вначале резко меняет свое направление, образуя излом. При  $\alpha = 45^\circ$  начальный угол  $\theta_0$  между исходной трещиной и касательной к ее траектории составляет  $82^\circ$ . Траектория трещины сильно искривлена и выходит в конце на линию действия сил.

Эксперименты проводили на твердом и хрупком сплаве кобальта с карбидом вольфрама (ВТ15), из порошков которого спекали диски диаметром 15 мм и толщиной 3 мм. В дисках электроискрой создавали щель шириной 0,08 мм, которую затем ориентировали под семью разными углами к направлению сил в интервале от 0 до  $45^\circ$ . Оказалось, что разрушающие силы существенно отклоняются от теоретического прогноза по различным критериям и ложатся вне полосы между крайними теоретическими кривыми диаграммы предельного состояния ( $K_{II}/K_{Ic} = f(K_I/K_{Ic})$ ,  $K_{Ic}$  — критический коэффициент интенсивности напряжений для трещины отрыва). В результате для их определения пришлось построить эмпирическую формулу. Это явление, наблюдаемое также и на других материалах [1], не нашло пока удовлетворительного объяснения. В то же время начальное направление развития трещины хорошо согласуется с рассчитанными по  $\sigma_c$ -критерию и хуже — с вычисленными по другим критериям, в частности критерию удельной энергии деформации (S-критерию) Си. Расчетные (сплошная линия на фиг. 5, а) и экспериментальные (штриховая линия) траектории (последние измеряли на часовом проекторе при 50-кратном увеличении) отклоняются друг от друга не более чем на 0,15 мм; следова-



Фиг. 5

тельно, можно говорить об их совпадении с точностью до погрешностей измерений и расчета. Хотя разрушение образцов происходило, казалось бы, мгновенно, инерционные и волновые эффекты не повлияли сколь-либо заметно на траекторию трещины.

**4. Траектории усталостных трещин.** Траектории усталостных трещин исследовали на дисках, которые циклически растягивали силами, приложенными на расстоянии  $0,65$  радиуса от центра и наклоненными под разными углами к трещине [18]. В связи с центральной симметрией на фиг. 5, б показана лишь четверть диска. Как и в предыдущем случае, исходная трещина вначале резко меняет свое направление, а затем плавно продвигается, постепенно ориентируясь перпендикулярно силам. Расчетные траектории проверяли на дисках диаметром  $230$  мм и толщиной  $3$  мм из алюминиевого сплава Д16Т. Их вырезали из прямоугольных пластин-заготовок с исходной усталостной трещиной, созданной перпендикулярными ей усилиями. Нагрузка была такова, что скорость роста трещины находилась в пределах  $(1 \dots 50) \cdot 10^{-8}$  м/цикл. Экспериментальные траектории (пунктирные линии на фиг. 5, б), которые измеряли на инструментальном микроскопе при увеличении в  $50$  раз, располагались вблизи расчетной (сплошные линии) на расстоянии, не превышающем  $2$  мм.

Таким образом, экспериментально на двух различных материалах — хрупком и пластичном сплавах — установлена пригодность применяемой методики, в том числе ее основного элемента  $\sigma_0$ -критерия, для прогнозирования траектории закритического (спонтанного) и субкритического (усталостного) распространения трещины. Этот вывод согласуется также с наблюдениями, свидетельствующими, что отклонения от предсказанного по  $\sigma_0$ -критерию направления роста трещины происходят, как правило, при наличии достаточно развитой пластичности и (или) анизотропии (включая деформационную) материала. Примером может служить развитие усталостных трещин вдоль полос скольжения. В этой связи рассмотрим принципиальный вопрос о прогнозирующей способности других критериев, который не решен до настоящего времени, несмотря на многие, часто весьма эмоциональные и отвлеченные от реалит дискуссии.

**5. О применимости критериев определения направления роста трещины.** Во все такие критерии [4] заложено, что трещина отрыва развивается в своей плоскости (этим исключаются из рассмотрения редкие, но реальные случаи развития таких трещин по наклонным площадкам). В условиях плоской задачи при малых значениях коэффициентов  $K_{II}$  и положительных  $K_I$  такое предположение приводит к общей зависимости угла откло-

$$\theta = -2n + O(n^3), \quad n = K_{II}/K_I \quad (5.1)$$

согласно которой прогнозы малых углов  $\theta$  по различным простым (т. е. выражаемым через коэффициент интенсивности напряжений) критериям практически не отличаются. В результате при малой сдвиговой составляющей, когда наиболее просто поставить опыт, полоса рассеяния экспериментальных данных перекрывает все теоретические кривые  $\theta = f(n)$  и не позволяет отдать какой-либо из них предпочтение. При больших отношениях  $n$  (в том числе при чистом сдвиге, когда  $K_I = 0$ ,  $n = \infty$ ) кривые расходятся, однако получение здесь корректных экспериментальных данных наталкивается на значительные технические трудности, особенно в связи со смыканием берегов трещины. Все-таки имеющиеся результаты, несмотря на их разброс, дают возможность сократить количество рассматриваемых критериев обычно до  $\sigma_e$ - и  $S$ -критериев и их модификаций. Кривые, рассчитанные по другим критериям, или расположены очень близко к ним или находятся на границах, а то и за пределами полос рассеяния [1].

Большой разброс данных эксперимента связан в первую очередь с применением разных способов образования иницирующего надреза и начальной трещины (щели) в образце. В результате имеются различия в геометрии трещины (контур ее вершины, форма фронта и т. п.), в механическом состоянии (остаточные напряжения) и субструктуре прилегающего к фронту материала. При образовании трещины нагрузкой у ее вершины возникает анизотропная пластическая зона специфической конфигурации (в тонких пластинках — вытянутые полосы с сопутствующим утончением пластины); в полимерах (широко применяемом модельном материале) аналогичную роль играет зона трещин серебра. Возможны исходные анизотропии и структурная неоднородность материала, проявление (особенно в полимерах) временных эффектов и влияния регулярных составляющих напряжений, в том числе параллельных трещине. Все эти факторы не поддаются учету, но несомненно сказываются на результатах эксперимента и приводят к тому, что если даже данные опытов одного автора ложатся на одну кривую, то аналогичные данные многих образуют уже широкую полосу рассеяния. В этой связи большие надежды стали возлагать на оценку пригодности критериев по прогнозируемым на их основании траекториям [16]. Были предприняты аналитические исследования траекторий моделируемых разрезом и сплюснутым эллипсом косых трещин в упругой плоскости на базе  $\sigma_e$ -,  $S$ -,  $\varepsilon_e$ - (максимальные окружные деформации) и модифицированного  $\sigma_e$ -критерия [19–21]. При этом не учитывали подрастание трещины, а геометрическое место экстремумов определяющей для данного критерия величины, которое отождествляли с траекторией трещины, находили по начальному полю напряжений. Такой подход считают на основании сравнения с некоторыми опытными данными допустимым, если прирост трещины не превышает половины ее длины [22]. В результате установлено, что траектории, рассчитанные по разным критериям, в общем мало отличаются, особенно при одноосном растяжении и небольших начальных коэффициентах  $K_{II}$ . При этом, однако, траектория по  $\sigma_e$ -критерию отклоняется от более близких друг к другу траекторий по остальным трем критериям.

К аналогичным выводам приводит расчет [23, 24] траектории косой ( $\alpha = 30^\circ$ ) трещины в сжатом диске по  $S_a$ -критерию, базирующемуся на плотности энергии формоизменения, который по значениям угла  $\theta$  наиболее отличается от  $\sigma_e$ -критерия [1]. Траектория по  $S_a$ -критерию в самом начале резко отходит от показанной выше (фиг. 5, е) траектории по  $\sigma_e$ -критерию (начальные углы отклонения отличаются на  $22^\circ$ ). Затем они быстро сближаются и разница между ними практически исчезает. Расхождение траекторий тем больше, чем больше выбранный при расчете прирост трещины  $\Delta L$ , значение которого из физических соображений не должно быть меньше характерного структурного элемента материала, в частности шага бороздок при циклическом нагружении. Описанная картина не про-

тиворечит нашим представлениям о росте трещины. Коэффициент  $K_{II}$  у вершины исходной трещины большой, и углы отклонения по разным теориям заметно отличаются. Однако на протяжении первых приростов трещины значения  $K_{II}$  быстро уменьшаются (ведь разница между углами, рассчитанными по отдельным критериям, меньше их значений) и углы  $\theta$  становятся столь малыми, что уже определяются по общему для всех критериев уравнению (5.1). Будут ли траектории после начального отклонения сливаться, идти параллельно или расходиться (наверно, весьма редко), зависит от того, насколько в конкретном случае изменяются напряжения у вершины трещины при ее отклонении в сторону. Искривление первоначально прямой траектории трещины вследствие плавного изменения направления главных напряжений будет мало зависеть, в связи с малостью  $K_{II}$  после каждого прироста, от выбора критерия. В такой ситуации очевидное преимущество имеет  $\sigma_e$ -критерий, не требующий для определения угла  $\theta$  решения громоздких тригонометрических уравнений.

Таким образом, в данном случае сравнение траекторий не позволило оценить критерии, что не исключает вообще такой возможности. Когда берега трещины в пластинке нагружены наклоненными силами, ее траектория по  $S$ -критерию (подтвержденная экспериментально [25]), начиная с некоторой точки, пойдет в сторону от траекторий от  $\sigma_e$ - и другим критериям [19]. Подробное экспериментальное исследование этого случая имело бы принципиальное значение для оценки прогнозирующей способности критериев. Однако поскольку расхождение траекторий установлено приближенным методом, требуется предварительно его более точная аналитическая проверка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ярема С. Я., Ивануцкая Г. С. Предельное равновесие и развитие косых трещин. Обзор критериев // Физ.-хим. механика материалов. 1986. № 1. С. 45–47.
2. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка. 1968. 246 с.
3. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е. Определение долговечности квазихрупких тел с трещинами при циклическом нагружении // Физ.-хим. механика материалов. 1975. № 5. С. 35–40.
4. Goldstein R. V., Salganik R. L. Brittle fracture of solids with arbitrary cracks // Intern. J. Fract. 1974. V. 10. No. 4. P. 507–523.
5. Krasovsky A. J., Vainshatok V. A. Application of the  $S_e$  and  $W_e$  theory to predict fatigue crack growth along its trajectory // Proc. Intern. Sympos. on Adsorbed Spec. Energy and/or Strain Energy Density Criterion. Hague, etc.: Martinus Nijhoff Publ. 1982. P. 347–354.
6. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка. 1981. 323 с.
7. Троценко В. Т., Драган В. И. Исследование закономерностей неупругого деформирования и усталостного разрушения металлов при кручении // Проблемы прочности. 1982. № 5. С. 3–10.
8. Баренблатт Г. И., Енгов В. М., Салганик Р. Л. О кинетике распространения трещин. Общие представления. Трещины, близкие к равновесным // Инж. журн. МТТ. 1966. № 5. С. 82–92.
9. Паргон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука. 1974. 416 с.
10. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука. 1974. 640 с.
11. Ярема С. Я. Методология определения характеристик сопротивления развитию трещин (трещиностойкости) материалов при циклическом нагружении // Физ.-хим. механика материалов. 1981. № 4. С. 100–110.
12. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Стадник М. М. Пространственные задачи теории трещин. (Обзор). Ч. 3. Распространение трещин при температурном и усталостном нагружении // Физ.-хим. механика материалов. 1979. № 6. С. 17–26.
13. Панасюк В. В. О современных проблемах механики разрушения // Физ.-хим. механика материалов. 1982. № 2. С. 7–27.
14. Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л. Плоская задача о криволинейных трещинах в упругом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 3. С. 69–82.
15. Шляпников В. Н., Иванышин Н. А. Коэффициенты интенсивности напряжений для трещин сложной формы при двухосном нагружении произвольного направления // Изв. вузов. Авиац. техника. 1983. № 4. С. 72–79.
16. Ярема С. Я., Зборомирский А. И. Аналитическое исследование роста усталостной трещины, произвольно ориентированной в двухосном неравномерном поле напряжений // Физ.-хим. механика материалов. 1984. № 6. С. 54–62.
17. Ярема С. Я., Ивануцкая Г. С., Майстренко А. Л., Зборомирский А. И. Развитие трещины в твердом сплаве при комбинированной деформации I и II видов // Проблемы прочности. 1984. № 8. С. 51–59.

18. Панасюк В. В., Зборомирский А. И., Иванюк Г. С., Ярема С. Я. Применимость  $\sigma_0$ -критерия для прогноза криволинейной траектории трещины // Проблемы прочности. 1986. № 9. С. 3-7.
19. Maiti S. K., Smith R. A. Theoretical and experimental studies on the extension of cracks subjected to concentrated loading near their faces to compare the criteria for mixed brittle fracture // J. Mech. and Phys. Solids. 1983. V. 31. No. 5. P. 389-403.
20. Maiti S. K., Smith R. A. Comparison of the criteria for mixed mode brittle fracture based on the preinstability stress-strain field. Pt I. Slit and elliptical cracks under uniaxial tensile loading // Intern. J. Fract. 1983. V. 23. No. 4. P. 281-295. Pt II. Pure shear and uniaxial compressive loading // Intern. J. Fract. 1984. V. 24. No. 1. P. 5-22.
21. Maiti S. K., Smith R. A. Criteria for brittle fracture in biaxial tension // Eng. Fract. Mech. 1984. V. 19. No. 5. P. 793-804.
22. Sih G. C. Discussion: «Some observations on Sih's strain energy density approach for fracture prediction» / I. Finnie and H. O. Weiss // Intern. J. Fract. 1974. V. 10. No. 2. P. 279-283.
23. Ярема С. Я., Зборомирский А. И. О применимости критериев, определяющих направление развития трещин, для прогноза из траекторий // Трещиностойкость материалов и элементов конструкций: Тез. докл. II Всесоюз. симпоз. по механике разрушения. Киев: Ин-т проблем прочности АН УССР. 1981. Т. 1. С. 99-100.
24. Зборомирский А. И. Применимость критериев хрупкого разрушения для расчета траекторий трещины // Физ.-хим. механика материалов. 1986. № 4. С. 110-113.
25. Sih G. C., Tzou D. Y. Discussion on «Criteria for brittle fracture in biaxial tension» / S. K. Maiti and R. A. Smith // Eng. Fract. Mech. 1985. V. 21. No. 5. P. 977-981.

Львов

Поступила в редакцию  
21.VII.1986