МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1988

УДК 539.3

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ОБЛУЧЕНИИ

АЛИЗАДЕ А. Н., АМЕНЗАДЕ Р. Ю., ПРЕОБРАЖЕНСКИЙ И. Н.

Взаимодействие тел с различными физическими полями часто сопровождается изменением объема материала, которое является результатом физико-химических превращений [1]. Это обстоятельство имеет место, в частности, при облучении твердых тел потоками элементарных частиц, в первую очередь нейтронов. Это весьма сложное явление зависит, с одной стороны, от состава и энергии потока частиц, а с другой – от состава облучаемого вещества. При этом выяснено, что облучение вызывает изменение механических свойств тела и неоднородность [2]. Этот эффект следует учитывать в расчетах конструкций активной зоны реактора. В публикуемой статье разработан вариационный метод, на основе которого могут быть исследованы задачи определения напряженно-деформированного состояния неоднородных по толщине тонкостенных упругих анизотропных элементов конструкций (оболочек, пластинок), работающих в условиях действия интенсивных нейтронных потоков. В качестве примера рассмотрено облучение сжатого изотропного кольца.

1. «Оболочечный» вариационный принцип получим из трехмерной теории упругости неоднородного анизотропного тела. Рассмотрим равновесие (предполагается, что динамическими эффектами, а также изменениями площадей и объема при деформации можно пренебречь) облучаемой неоднородной анизотропной среды объема V, ограниченного достаточно гладкой поверхностью S. Тогда для геометрически линейной теории оно описывается следующей краевой задачей:

$$\nabla_j\sigma^{kj}=0 \tag{1.1}$$

$$e_{ij}^{\vee}=A_{ijkl}(x^k, D, \varkappa_m)\sigma^{kl}+\theta(x^k, D, \varkappa_m)g_{ij}, \quad 2e_{ij}=\nabla_iu_j+\nabla_ju_i \tag{1.2}$$

$$T_k^{\circ}=\sigma^{kj}n_j, \quad (x^k\in S_1), \quad u_k^{\circ}=u_k(x^k\in S_2) \tag{1.3}$$

где x^k – криволинейные координаты, e_{ij} – ковариантные компоненты тензора малой деформации, $e_{ij}^{\vee}$ – значения деформации, определяемые физическим законом, σ^{kj} – контравариантные составляющие тензора напряжений, g_{ij} – метрический тензор, $A_{ijkl}\sigma^{kl}$ – ковариантные компоненты тензора деформации, θ – объемная деформация, u_i – ковариантные составляющие вектора перемещения, u_k° и $T^{k\circ}$ – заданные компоненты вектора перемещения и усилия, ∇_j – оператор ковариантного дифференцирования, n_j – единичный вектор нормали, $S=S_1\cup S_2$, D – доза облучения, $\varkappa_m$ – физические параметры. Отметим, что $\theta(x^k, 0, \varkappa_m)=0$, а A_{ijkl} при $D=0$ являются упругими постоянными необлученного тела. Рассматриваемую задачу можно сформулировать с помощью вариационной теоремы следующим образом: стационарное значение функционала

$$J=\int\limits_V\left\{e_{ij}^{\bullet}\sigma^{ij\bullet}-e_{ij}^{\vee\bullet}\sigma^{ij\bullet}+\frac{1}{2}A_{ijkl}\sigma^{ij\bullet}\sigma^{kl\bullet}\right\}dV-$$

$$-\int\limits_{S_1}T^{i\circ\bullet}u_i^{\bullet}\,dS-\int\limits_{S_2}T^{i\circ\bullet}(u_i^{\bullet}-u_i^{\circ\bullet})\,dS \tag{1.4}$$

при условиях (1.2) в качестве уравнений Эйлера приводит к уравнению (1.1) и граничным условиям (1.3). За независимые варьируемые величины принимаются $\sigma^{ij\cdot}$ и $u_i^\cdot$, а точкой сверху обозначается дифференцирование по D. Доказательство данной теоремы аналогично [3] и поэтому здесь не приводится. Необходимо отметить, что уравнения равновесия и соотношения упругости получаются независимо друг от друга. Этот факт и предопределяет справедливость применения функционала (1.4) для формулировки вариационного принципа теории неоднородных по толщине оболочек при объемном изменении.

2. Для преобразования функционала (1.4) в оболочечный следует принять определенные допущения, связанные с представлениями теории тонких оболочек. Используя техническую теорию, перемещения произвольных точек оболочки запишем в виде

$$u_\alpha{}^*=u_\alpha(x^1,\ x^2)-z\nabla_\alpha w(x^1,\ x^2),\quad u_3{}^*=w \tag{2.1}$$

Здесь u_α и w — перемещения точек срединной поверхности соответственно вдоль координатных линий x^1, x^2 и нормали. Как обычно, будем считать, что греческие индексы принимают значения 1 и 2, а ∇_α — двумерный оператор ковариантного дифференцирования. Звездочкой обозначаются величины, относящиеся к любой эквидистантной поверхности. С учетом (2.1) справедливы следующие соотношения [4]:

$$e_{\alpha\beta}{}^*=e_{\alpha\beta}-z\nabla_\alpha\nabla_\beta w=e_{\alpha\beta}+z\varkappa_{\alpha\beta} \tag{2.2}$$

$$2e_{\alpha\beta}=\nabla_\alpha u_\beta+\nabla_\beta u_\alpha-2b_{\alpha\beta}w$$

где $b_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй квадратичной формы, а $\varkappa_{\alpha\beta}$ — кривизны. Вследствие тонкостенности примем линейный закон распределения напряжений по толщине

$$\sigma^{\alpha\beta}={}^1/_2N^{\alpha\beta}/h+{}^3/_2zM^{\alpha\beta}/h^3 \tag{2.3}$$

в котором $N^{\alpha\beta}$ и $M^{\alpha\beta}$ — соответственно усилия и моменты. Далее будем полагать, что $dV=dSdz$, где dS — элементарная площадь срединной поверхности, и ограничимся рассмотрением «жестконеоднородной» оболочки [5], для которой можно принять силовую гипотезу о незначительности нормального напряжения σ^{33} ($\sigma^{33}\approx 0$). Выписав все необходимые соотношения теории тонких оболочек (2.1)—(2.3), перейдем к преобразованию функционала (1.4). Первый объемный интеграл запишется как

$$\int\limits_V e_{ij}^\cdot\sigma_{ij}^\cdot\,dV=\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_S\{({}^1/_2N^{\alpha\beta\cdot}/h+{}^3/_2zM^{\alpha\beta\cdot}/h^3)\,(e_{\alpha\beta}^\cdot+z\varkappa_{\alpha\beta}^\cdot)\}\,dS\,dz=$$

$$=\int\limits_S(N^{\alpha\beta\cdot}e_{\alpha\beta}^\cdot+M^{\alpha\beta\cdot}\varkappa_{\alpha\beta}^\cdot)\,dS$$

Учитывая (1.2), перепишем последующие объемные интегралы в следующем, удобном для дальнейших преобразований виде

$$\int\limits_V(-e_{ij}^{\cdot}\sigma^{ij\cdot}+{}^1/_2A_{ijkl}\sigma^{ij\cdot}\sigma^{kl\cdot})\,dV=\int\limits_V[-(A_{ijkl}\sigma^{kl}+\theta g_{ij})^\cdot\sigma^{ij\cdot}+{}^1/_2A_{ijkl}\sigma^{ij\cdot}\sigma^{kl\cdot}]\,dV=$$

$$=-\int\limits_V({}^1/_2A_{ijkl}\sigma^{ij\cdot}\sigma^{kl\cdot}+\dot{A}_{ijkl}\sigma^{kl}\sigma^{ij\cdot}+\theta^\cdot\sigma^{ij\cdot}g_{ij})\,dV$$

Тогда, аналогично приведенному ранее рассуждению получим

$$-{}^1/_2\int\limits_V A_{ijkl}\sigma^{ij\cdot}\sigma^{kl\cdot}\,dV=-{}^1/_2\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_S A_{\alpha\beta\eta\gamma}\sigma^{\alpha\beta\cdot}\sigma^{\eta\gamma\cdot}\,dS\,dz=$$

$$=-{}^1/_2\int\limits_S[\overset{(0)}{A}_{\alpha\beta\eta\gamma}N^{\alpha\beta\cdot}N^{\eta\gamma\cdot}+2\overset{(1)}{A}_{\alpha\beta\eta\gamma}N^{\eta\gamma\cdot}M^{\alpha\beta\cdot}+\overset{(2)}{A}_{\alpha\beta\eta\gamma}M^{\alpha\beta\cdot}M^{\eta\gamma\cdot}]\,dS$$

$$-\int_V A^{\cdot}_{ijkl}\sigma^{kl}\sigma^{ij\cdot}\,dV=\int_{-h}^{h}\int_S A_{\alpha\beta\eta\gamma}\sigma^{\eta\gamma}\sigma^{\alpha\beta\cdot}\,dS\,dz=$$

$$=\int_S [A^{(0)\cdot}_{\alpha\beta\eta\gamma}N^{\alpha\beta\cdot}N^{\eta\gamma\cdot}+A^{(1)\cdot}_{\alpha\beta\eta\gamma}M^{\alpha\beta\cdot}N^{\eta\gamma}+A^{(1)\cdot}_{\alpha\beta\eta\gamma}N^{\alpha\beta\cdot}M^{\eta\gamma}+A^{(2)\cdot}_{\alpha\beta\eta\gamma}M^{\alpha\beta\cdot}N^{\eta\gamma}]\,dS$$

$$-\int_V \theta^{\cdot}\sigma^{ij\cdot}g_{ij}\,dV=-\int_{-h}^{h}\int_S \theta^{\cdot}\sigma^{\alpha\beta\cdot}g_{\alpha\beta}\,dS\,dz=-g_{\alpha\beta}\int_S(\theta_0^{\cdot}N^{\alpha\beta\cdot}+\theta_1^{\cdot}M^{\alpha\beta\cdot})\,dS$$

где для краткости записи введены следующие обозначения (интегрирование по z от $-h$ до h):

$$A^{(0)}_{\alpha\beta\eta\gamma}=\frac{1}{4h^2}\int A_{\alpha\beta\eta\gamma}\,dz,\qquad A^{(1)}_{\alpha\beta\eta\gamma}=\frac{3}{4h^4}\int A_{\alpha\beta\eta\gamma}z\,dz$$

$$A^{(2)}_{\alpha\beta\eta\gamma}=\frac{9}{4h^6}\int A_{\alpha\beta\eta\gamma}z^2\,dz,\qquad \theta_0=\frac{1}{2h}\int\theta\,dz,\qquad \theta_1=\frac{3}{2h^3}\int\theta z\,dz$$

Таким образом, функционал для решения задач теории неоднородных по толщине оболочек с учетом объемного изменения имеет вид

$$J=\int_S\{N^{\alpha\beta\cdot}e_{\alpha\beta}^{\cdot}+M^{\alpha\beta\cdot}\varkappa_{\alpha\beta}^{\cdot}-{}^1/_2[A^{(0)}_{\alpha\beta\eta\gamma}N^{\alpha\beta\cdot}N^{\eta\gamma\cdot}+2A^{(1)}_{\alpha\beta\eta\gamma}N^{\eta\gamma\cdot}$$

$$M^{\alpha\beta\cdot}+A^{(2)}_{\alpha\beta\eta\gamma}M^{\alpha\beta\cdot}M^{\eta\gamma\cdot}]-[A^{(0)\cdot}_{\alpha\beta\eta\gamma}N^{\alpha\beta\cdot}N^{\eta\gamma}+A^{(1)\cdot}_{\alpha\beta\eta\gamma}M^{\alpha\beta\cdot}N^{\eta\gamma}+ \tag{2.4}$$

$$+A^{(1)\cdot}_{\alpha\beta\eta\gamma}N^{\alpha\beta\cdot}M^{\eta\gamma}+A^{(2)\cdot}_{\alpha\beta\eta\gamma}M^{\alpha\beta\cdot}M^{\eta\gamma}]-[g_{\alpha\beta}(\theta_0^{\cdot}N^{\alpha\beta\cdot}+\theta_1^{\cdot}M^{\alpha\beta\cdot})]\}\,dS-J_L$$

Здесь контурный интеграл J_L определяется следующим образом:

$$J_L=\int_{L_1}(T^{\alpha\circ\cdot}u_\alpha^{\cdot}-M^{\alpha\circ\cdot}\nabla_\alpha w^{\cdot}+T^{3\circ\cdot}w^{\cdot})\,dl+$$

$$+\int_{L_2}[u_\alpha^{\cdot}-u_\alpha^{\circ\cdot})T^{\alpha\cdot}-(\nabla_\alpha w^{\cdot}-(\nabla_\alpha w)^{\circ\cdot})M^{\alpha\cdot}+(w^{\cdot}-w^{\circ\cdot})T^{3\cdot}]\,dl$$

где $T^\alpha=N^{\alpha\beta}n_\beta$, $M^\alpha=M^{\alpha\beta}n_\beta$, $T^3/2h-\nabla_\beta M^{\alpha\beta}n_\alpha$, а n_β — косинусы нормали к контуру. Вывод этого выражения не приводится, так как оно не зависит от структуры материала и получается аналогично [5, 6]. В случае учета массовых сил с компонентами F^α и q в поверхностный интеграл надо добавить члены вида $-\int F^{\alpha\cdot}u_\alpha{}^{*\cdot}dz-\int q^{\cdot}w^{\cdot}dz$. В (2.4) независимыми варьируемыми величинами являются $u_\alpha^{\cdot}$, $w^{\cdot}$, $N^{\alpha\beta\cdot}$ и $M^{\alpha\beta\cdot}$. Заметим, что L_1 — часть контура, где заданы усилия и моменты, а на оставшейся части L_2 — перемещения.

Применяя известную процедуру, нетрудно получить уравнения Эйлера для функционала (2.4):

$$e_{\alpha\beta}^{\cdot}=[A^{(0)}_{\alpha\beta\eta\gamma}N^{\eta\gamma}]^{\cdot}+[A^{(1)}_{\alpha\beta\eta\gamma}M^{\eta\gamma}]^{\cdot}g_{\alpha\beta}\theta_0^{\cdot}$$

$$\varkappa_{\alpha\beta}^{\cdot}=[A^{(1)}_{\alpha\beta\eta\gamma}N^{\eta\gamma}]^{\cdot}+[A^{(2)}_{\alpha\beta\eta\gamma}M^{\eta\gamma}]^{\cdot}g_{\alpha\beta}\theta_1^{\cdot}$$

$$(\nabla_\beta N^{\alpha\beta})^{\cdot}=0,\qquad (b_{\alpha\beta}N^{\alpha\beta}+\nabla_\alpha\nabla_\beta M^{\alpha\beta})^{\cdot}=0$$

$$T^{\alpha\circ\cdot}=T^{\alpha\cdot},\qquad M^{\circ\cdot}=M^{\alpha\cdot},\qquad T^{3\circ\cdot}=T^{3\cdot}\qquad (l\in L_1)$$

$$w^{\circ\cdot}=w^{\cdot},\qquad u_\alpha{}^{\circ\cdot}=u_\alpha^{\cdot},\qquad (\nabla_\alpha w)^{\circ\cdot}=\nabla_\alpha w^{\cdot}\qquad (l\in L_2)$$

где l — точка соответствующей границы.

Полученная система является дифференциальной относительно производных по дозе облучения D. Для решения этой системы сформулируем начальные условия, заключающиеся в отсутствие напряженно-деформируемого состояния оболочки и граничных условий при $D=0$. После интегрирования получим

$$
\begin{gathered}
e_{\alpha\beta}=A^{(0)}_{\alpha\beta\eta\gamma}N^{\eta\gamma}+A^{(1)}_{\alpha\beta\eta\gamma}M^{\eta\gamma}+g_{\alpha\beta}\theta_0 \\
\varkappa_{\alpha\beta}=A^{(1)}_{\alpha\beta\eta\gamma}N^{\eta\gamma}+A^{(2)}_{\alpha\beta\eta\gamma}M^{\eta\gamma}+g_{\alpha\beta}\theta_1 \\
\nabla_\beta N^{\alpha\beta}=0, \quad b_{\alpha\beta}N^{\alpha\beta}+\nabla_\alpha\nabla_\beta M^{\alpha\beta}=0 \\
T^{\alpha\circ}=T^\alpha, \quad M^{\alpha\circ}=M^\alpha, \quad T^{3\circ}=T^3 \quad (l\in L_1) \\
w^\circ=w, \quad u_\alpha{}^\circ=u_\alpha, \quad (\nabla_\alpha w)^\circ=\nabla_\alpha w \quad (l\in L_2)
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Анализ физических соотношений (2.5) позволяет заключить, что при неоднородности деформации и кривизны, в отличие от однородного случая, зависят одновременно от усилий и моментов. Случай кусочного включения (в частности, многослойности оболочки) можно моделировать введением функций с интегрируемыми особенностями, что обусловлено усреднением по толщине механических характеристик. Отметим, что в общем случае $A^{(k)}$ зависят от дозы облучения.

3. Для реализации предложенной теоремы в качестве примера рассмотрим задачу облучения сжатого давлением q тонкого упругого изотропного неоднородного по толщине кольца радиуса R и модулем Юнга $E=E(z)$. Данная конструкция может описывать поведение длинных цилиндрических оболочек в области, где можно пренебречь влиянием закреплений. В этом случае, введя в рассмотрение полярные координаты, запишем функционал в виде

$$
\begin{aligned}
J = \int_0^{2\pi}\Big\{ & N^\cdot e^\cdot+M^\cdot\varkappa^\cdot-\frac{1}{2}\,[A^{(0)}N^{2\cdot}+2A^{(1)}N^\cdot M^\cdot+A^{(2)}M^{2\cdot}]- \\
& -[A^{(0)\cdot}N^\cdot N+A^{(1)\cdot}NM^\cdot+A^{(1)\cdot}N^\cdot M+A^{(2)\cdot}M^\cdot M]- \\
& -[\theta_0{}^\cdot N^\cdot+\theta_1{}^\cdot M^\cdot]-q^\cdot w^\cdot\Big\}R\,d\varphi
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где согласно теории тонких оболочек (интегрирование по z от $-h$ до h):

$$
e=R^{-1}(\partial u/\partial\varphi+w), \quad \varkappa=-R^{-2}\partial^2 w/\partial\varphi^2 \tag{3.2}
$$

$$
A^{(0)}=E_0{}^{-1}={}^1/_4h^{-2}\int E^{-1}(z)\,dz, \quad A^{(1)}=E_1{}^{-1}={}^3/_4h^{-4}\int E^{-1}(z)\,z\,dz
$$

$$
A^{(2)}=E_2{}^{-1}={}^9/_4h^{-6}\int E^{-1}(z)\,z^2\,dz
$$

С учетом формул (3.2) функционал (3.1) преобразуем следующим образом:

$$
\begin{aligned}
J = \int_0^{2\pi}\Big\{ & N^\cdot(R^{-1}\,\partial u^\cdot/\partial\varphi+w^\cdot/R)-M^\cdot R_2{}^{-1}\,\partial^2 w^\cdot/\partial\varphi^2-\frac{1}{2}\,(N^{2\cdot}E_0{}^{-1}+ \\
& +2N^\cdot M^\cdot E_1{}^{-1}+M^{2\cdot}E_2{}^{-1})-(E_2{}^{-1\cdot}NN^\cdot+E_1{}^{-1\cdot}(NM^\cdot+MN^\cdot)+ \\
& +E_2{}^{-1\cdot}M^\cdot M]-(\theta_0{}^\cdot N^\cdot+\theta_1{}^\cdot M^\cdot)-q^\cdot w^\cdot\Big\}R\,d\varphi
\end{aligned}
$$

в котором независимыми варьируемыми величинами являются $u^\cdot$, $w^\cdot$, $N^\cdot$ и $M^\cdot$, а уравнения Эйлера имеют вид

$$
\begin{gathered}
\partial N^\cdot/\partial\varphi=0, \; R^{-1}N^\cdot-R^{-2}\partial^2 M^\cdot/\partial\varphi^2-q^\cdot=0 \\
R^{-1}\,\partial u^\cdot/\partial\varphi+R^{-1}w^\cdot-E_0{}^{-1}N^\cdot-E_1{}^{-1}M^\cdot-E_0^{-1\cdot}N-E_1^{-1\cdot}M-\theta_0{}^\cdot=0 \\
R^{-2}\,\partial^2 w^\cdot/\partial\varphi^2+E_1{}^{-1}N^\cdot+E_2{}^{-1}M^\cdot+E_1^{-1\cdot}N+E_2^{-1\cdot}M+\theta_1{}^\cdot=0
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Принимая допущения, сформулированные при доказательстве изложенного выше вариационного принципа, можно заключить, что при $D=0$ величины N, M и w характеризуют напряженно-деформированное состояние упругого неоднородного по толщине кольца под действием давления q. Используя вариационный принцип [7] и не приводя всех необходимых выкладок (они формально аналогичны приведенным, так как используемые функционалы совпадают, если под точкой понимать дифференцирование по q и положить $\theta=0$), получим следующую систему уравнений, описывающих это состояние:

$$\partial N^{\cdot}/\partial\varphi=0, \quad R^{-1}N^{\cdot}-R^{-2}\partial^2 M^{\cdot}/\partial\varphi^2-q^{\cdot}=1$$

$$R^{-1}\partial u^{\cdot}/\partial\varphi+R^{-1}w^{\cdot}-E_0^{-1}N^{\cdot}-E_1 M^{\cdot}=0$$

$$R^{-1}\partial^2 w^{\cdot}/\partial\varphi^2+E_1^{-1}N^{\cdot}+E_2^{-1}M^{\cdot}=0 \tag{3.4}$$

Здесь предполагается, что давление q не зависит от дозы облучения, а E_0, E_1 и E_2 — усредненные механические характеристики необлученного тела. Начальные условия для системы (3.4) при $q=0$ имеют вид $N=0$, $M=0$, $u=w=0$. После интегрирования получим

$$\partial N/\partial\varphi=0, \quad R^{-1}N-R^{-2}\partial^2 M/\partial\varphi^2-q=0$$

$$R^{-1}\partial u/\partial\varphi+R^{-1}w+E_0^{-1}N-E_1^{-1}M=0 \tag{3.5}$$

$$R^{-2}\partial^2 u/\partial\varphi^2+E_1^{-1}N+E_2^{-1}M=0$$

Полученная таким образом система (3.5) есть система начальных условий для (3.3). Проинтегрировав (3.3) при этих условиях, окончательно запишем

$$\partial N/\partial\varphi=0, \quad R^{-1}N-R^{-2}\partial^2 M/\partial\varphi^2-q=0$$

$$R^{-1}\partial u/\partial\varphi+R^{-1}w-E_0^{-1}N-E_1^{-1}M-\theta_0=0$$

$$R^{-2}\partial^2 w/\partial\varphi^2+E_1^{-1}N+E_2^{-1}M+\theta_1=0$$

Для частного случая осевой симметрии будем иметь $N=qR$, $R^{-1}w-E_0^{-1}N-E_1^{-1}M-\theta_0=0$, $E_1^{-1}N+E_2^{-1}M+\theta_1=0$. Тогда

$$M=-E_2(qR/E_1+\theta_1), \quad w=R(qkRE_2-E_1^{-1}E_2\theta_1+\theta_0)$$

где величина $k=(E_0E_2)^{-1}-E_1^{-1}>0$ (см. [7]). При $q=0$ имеем

$$w=R(\theta_0-E_2E_1^{-1}\theta_1), \quad M=-E_2\theta_1$$

Из последней формулы следует, что в случае осевой симметрии «конструированием» неоднородности при заданном виде облучения, когда $E_2/E_1=\theta_0/\theta_1$, можно добиться того, чтобы $w=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григолюк Э. И., Попович В. Е.* Об одном энергетическом методе определения перемещений при облучении упругого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 2. С. 82–87.
2. *Ленский В. С.* Влияние радиоактивных облучений на механические свойства твердых тел // Инж. сб. 1960. Т. 28. С. 97–133.
3. *Ализаде А. Н., Амензаде Р. Ю.* Об одном вариационном принципе определения напряженно-деформируемого состояния упругого тела при облучении с учетом геометрической нелинейности // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1982. № 6. С. 48–56.
4. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.
5. *Амензаде Р. Ю., Ализаде А. Н., Преображенский И. Н.* Вариационная теорема теории неоднородных по толщине оболочек // Механика композит. материалов. 1983. № 3. С. 546–548.
6. *Амензаде Ю. А.* Курс общей теории тонких упругих оболочек. Баку: Маариф. 1982. 175 с.
7. *Амензаде Р. Ю., Шихлинская Г. Т.* К задаче устойчивости цилиндрической оболочки из неоднородного материала // Докл. АН АзССР. 1985. Т. 41. № 6. С. 15–18.

Баку, Москва

Поступила в редакцию
5.VI.1986