

УДК 539.3

## СТОХАСТИЧЕСКАЯ ТЕРМОУПРУГОСТЬ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

БУТКО А. М., НОВИЧКОВ Ю. Н.

Для достоверной оценки долговечности неоднородных слоистых оболочек, эксплуатируемых в условиях стохастического температурного поля, необходимо создание обобщенных программных комплексов ЭВМ. Основой таких комплексов являются математическое обеспечение и программные подмножества, позволяющие рассчитывать спектральные характеристики элементов тензора напряжений в отдельных слоях оболочки. Главной проблемой при создании таких комплексов является преодоление сложностей решения уравнений термомеханики слоистых оболочек, связанных с высоким порядком дифференциальных уравнений термомеханического равновесия.

Некоторые стохастические задачи термоупругости для тонких однослойных и двухслойных оболочек решены в [1–3], однако при решении стохастических задач термомеханики слоистых оболочек используемые в [1, 3] алгоритмы не всегда удобны из-за высокого порядка систем и наличия комплексных параметров системы.

В публикуемой статье развивается теория и численный метод расчета стохастических характеристик полей напряжений в слоях многослойной оболочки, необходимые для оценки надежности и долговечности композитной оболочки.

Статистические характеристики внешнего температурного поля принимаются известными. В дальнейшем рассматриваются централизованные поля температур и перемещений, считая, что задача по определению математических ожиданий соответствующих полей решена.

При построении теории принимаются следующие предположения, которые условно можно разделить на три вида.

*Теплофизические гипотезы:* теплофизические параметры материалов слоев не зависят от температуры. Скоростью диссипации энергии в мягком слое в уравнениях теплопроводности пренебрегаем, как эффектом второго порядка малости. Не учитываем связь между тепловыми и механическими эффектами. На границах слоев осуществляется идеальный тепловой контакт.

*Механические гипотезы:* жесткие слои многослойной оболочки следуют гипотезам Кирхгофа — Лява. Мягкие слои являются трансверсально мягкими. Учитывается изменение метрики при переходе от слоя к слою.

*Стохастические гипотезы:* статистические характеристики полей перемещений и напряжений анализируются в рамках корреляционной теории. Внешнее температурное поле является стационарным случайным по времени и однородным по пространственным координатам. В силу учета кинематических условий на торцах оболочки поля перемещений в слоях оболочки будут неоднородны по пространственным координатам и стационарны по времени.

**1. Основные уравнения термоупругости многослойных оболочек.** Пусть оболочка состоит из регулярно чередующихся жестких и мягких слоев с различными теплофизическими и вязкоупругими свойствами. Распределение температуры по толщине каждого слоя при малой толщине слоев, достаточно медленной изменчивости температуры по координатам срединной поверхности и при достаточно малой частоте изменения температуры во времени может быть аппроксимировано линейной функцией. Так, для жесткого слоя

$$T^{(k)} = T_0^{(k)}(x_1, x_2, t) + z_{(k)} \Theta^{(k)}(x_1, x_2, t) \quad (1.1)$$

Здесь  $T_0^{(k)}$  — температура срединных поверхностей  $k$ -го жесткого слоя,  $\Theta^{(k)}$  — температурные градиенты,  $x_1, x_2$  — криволинейные ортогональные координаты на срединной поверхности жесткого слоя,  $z_{(k)}$  — нормальная координата.

Соотношения, связывающие характеристики распределения температур в мягких слоях с соответствующими функциями для жесткого слоя, получаются из условий идеального теплового контакта между слоями.

Уравнения теплопроводности могут быть получены из вариационного принципа В. В. Болотина, согласно которому требуется стационарность некоторого функционала, в который наряду с искомой температурой в слоях оболочки входят температуры фиктивного процесса, являющегося временным зеркальным отображением действительного процесса [4]. Введение этого процесса делает явление в целом консервативным.

Уравнение теплопроводности и естественные граничные условия получаются как уравнения Остроградского — Эйлера вариационной задачи  $\delta I=0$ . В оперативной форме уравнения теплопроводности можно записывать так:

$$\mathbf{H}_{x_1, x_2, t} \mathbf{T} = \mathbf{q}(T_+, T_-) \quad (1.2)$$

где вектор  $\mathbf{T}$  имеет в качестве своих элементов температуры срединных поверхностей жестких слоев и температурный градиент.

Для пластин и достаточно тонких оболочек, когда влиянием изменения метрики на распределение температуры в многослойной системе можно пренебречь, дифференциальный оператор  $\mathbf{H}_{x_1, x_2, t}$  имеет вид

$$\mathbf{H}_{x_1, x_2, t} = \left\| \begin{array}{l} c_T \rho_T H \frac{\partial}{\partial t} - H \nabla_\alpha (\lambda_T^{\alpha\beta} \nabla_\beta T) + \kappa_+ + \kappa_-; (\kappa_+ - \kappa_-) h \eta \\ (\kappa_+ - \kappa_-) h \eta; \quad c_\Theta \rho_\Theta \frac{H}{12} h^2 \frac{\partial}{\partial t} - H \frac{h^2}{12} \nabla_\alpha (\lambda_\Theta^{\alpha\beta} \nabla_\beta \Theta) + \\ + \lambda_0 H + \frac{1}{2} h^2 \eta (\kappa_+ + \kappa_-) \end{array} \right\| \quad (1.3)$$

$$m' = 2m + 1, \quad H = m'h + 2ms, \quad \eta = m(1 + \lambda)^{+1/2}$$

$$\lambda = \lambda' s / (\lambda'' h), \quad c_T \rho_T H = m' c' \rho' h + 2mc'' \rho'' s$$

$$c_\Theta \rho_\Theta H = m' c' \rho' h p + 2mc'' \rho'' s l$$

$$\lambda_0 H = m' \lambda' h + 2m \lambda'' h^2 \lambda^2 / s$$

$$\lambda_T^{\alpha\beta} H = m' \lambda'^{\alpha\beta} h + 2m \lambda''^{\alpha\beta} s$$

$$\lambda_\Theta^{\alpha\beta} H = m' \lambda'^{\alpha\beta} h p + 2m \lambda''^{\alpha\beta} s l$$

$$p = 1 + 4m(m+1)(1+\lambda)^2, \quad l = \lambda^2 + (4m-1)(1+\lambda)$$

Здесь среднему слою присвоен индекс «нуль», а остальным  $\pm 1 \dots \pm m$ ,  $c'$  и  $c''$  — удельные теплоемкости для жестких и мягких слоев;  $\rho'$  и  $\rho''$  — плотности материалов слоев;  $\lambda'^{\alpha\beta}$  и  $\lambda''^{\alpha\beta}$  — контравариантные компоненты тензора коэффициентов теплопроводности;  $\nabla_\alpha^{(h)}$  и  $\nabla_\alpha^{[k]}$  — символы ковариантного дифференцирования на срединных плоскостях соответствующих слоев;  $\kappa_\pm$  — коэффициенты теплоотдачи поверхности жесткого слоя в окружающую среду на лицевых поверхностях;  $T_\pm$  — температура среды над и внутри оболочки.

После определения из (1.3) температуры среднего слоя  $T$  и градиента в жестких слоях  $\Theta$  можно определить распределение температуры по всему пакету слоистой оболочки [4].

Рассмотрим уравнения термоупругого равновесия многослойной оболочки. Пусть для жестких слоев многослойной оболочки справедливы гипотезы Кирхгофа — Лява. Для задач термоупругости в выражениях для трансверсальной деформации мягких слоев учитываются температурные удлинения нормальных элементов жестких слоев, примыкающих к данному мягкому слою:

$$\varepsilon_{33}^{[k]} = (w^{(h+1)} - w^{(h)} - \alpha' T_0^{[k]} h) / s \quad (1.4)$$

где  $\alpha'$  — коэффициент температурного расширения материала жестких слоев в направлении нормали,  $T_0^{[k]}$  — средняя температура в мягком слое,  $w^{(h)}$  — нормальное перемещение слоев.

Усилия и моменты в жестких и мягких слоях с учетом температурных слагаемых определяются формулами

$$N^{(k)\alpha\beta} = \hbar \lambda'_{\alpha\beta\gamma\delta} (e_{\gamma\delta}^{(k)} - \alpha_{\gamma\delta} T_0^{(k)}) \quad (1.5)$$

$$M^{(k)\alpha\beta} = 1/2 \hbar^3 \lambda'_{\alpha\beta\gamma\delta} (\kappa_{\gamma\delta}^{(k)} + \alpha_{\gamma\delta} \Theta^{(k)}), \quad Q^{[k]\alpha} = 2s a^{[k]\alpha\beta} G'' \varepsilon_{\beta 3}^{[k]}$$

$$N^{[k]} = s E'' (\varepsilon_{33}^{[k]} - \alpha'' T_0^{[k]}) \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2)$$

Здесь  $\alpha_{\gamma\delta}$  — компоненты тензора коэффициентов линейного расширения материала жесткого слоя,  $a^{[k]\alpha\beta}$  — контравариантные компоненты метрических тензоров срединных поверхностей мягких слоев,  $\lambda'_{\alpha\beta\gamma\delta}$  — компоненты тензора упругих постоянных.

Входящие в выражения (1.5) компоненты тензора деформаций срединной поверхности  $e_{\alpha\beta}^{(k)}$  и изменения кривизны  $\kappa_{\alpha\beta}^{(k)}$  определяются выражениями

$$e_{\alpha\beta}^{(k)} = 1/2 (\nabla_{\alpha}^{(k)} v_{\beta}^{(k)} + \nabla_{\beta}^{(k)} v_{\alpha}^{(k)} + 2b_{\alpha\beta}^{(k)} w^{(k)}) \quad (1.6)$$

$$\kappa_{\alpha\beta}^{(k)} = 1/2 (\nabla_{\alpha}^{(k)} \varphi_{\beta}^{(k)} + \nabla_{\beta}^{(k)} \varphi_{\alpha}^{(k)} - b_{\alpha\gamma}^{(k)} \Theta_{\beta\gamma}^{(k)} - b_{\beta\gamma}^{(k)} \Theta_{\alpha\gamma}^{(k)})$$

$$\varphi_{\alpha}^{(k)} = \nabla_{\alpha}^{(k)} w^{(k)} - b_{\alpha\beta}^{(k)} v_{\beta}^{(k)}, \quad \Theta_{\alpha\beta}^{(k)} = 1/2 (\nabla_{\alpha}^{(k)} v_{\beta}^{(k)} - \nabla_{\beta}^{(k)} v_{\alpha}^{(k)})$$

$$\varepsilon_{\alpha 3}^{[k]} = 1/2 [1/2 \nabla_{\alpha}^{[k]} (h+s) (w^{(h+1)} + w^{(h)}) + (v_{\alpha}^{(h+1)} - v_{\alpha}^{(h)}) - b_{\alpha}^{[k]\beta} (h+s) (v_{\beta}^{[k+1]} + v_{\beta}^{(h)})] / s$$

Применение принципа минимума свободной энергии дает возможность получить уравнения термоупругого равновесия [4]:

$$\nabla_{\beta}^{(k)} N^{(k)\alpha\beta} - b_{\beta}^{(k)\alpha} \nabla_{\gamma}^{(k)} M^{(k)\beta\gamma} - s^{-1} (t_k' Q^{[k]*\alpha} - t_k'' Q^{[k-1]**\alpha}) - 2s^{-1} c_0 b_{\beta}^{[k]\alpha} (t_k' Q^{[k]*\beta} + t_k'' Q^{[k-1]**\beta}) = 0 \quad (1.7)$$

$$N^{(k)\alpha\beta} b_{\alpha\beta}^{(k)} + \nabla_{\alpha}^{(k)} \nabla_{\beta}^{(k)} M^{(k)\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}^{(k)} [c_0 s^{-1} (t_k' Q^{[k]*\alpha} + t_k'' Q^{[k-1]**\alpha})] - s^{-1} (t_k' N^{[k]} - t_k'' N^{[k-1]}) = 0$$

Компоненты тензора в  $b_{\beta}^{(k)\alpha}$  и параметры  $t_k'$  и  $t_k''$  характеризуют метрику каждого жесткого слоя оболочки ( $c_0 = 1/2(h+s)$ ).

Соотношения закона Гука для данного случая запишутся следующим образом (слои упругие и изотропные):

$$\sigma_{11}^{(k)} = \frac{E'_{(k)}}{1 - \nu_{(k)}^2} [(e_{11}^{(k)} + \nu_{(k)} e_{22}^{(k)}) - z_{(k)} (\kappa_{11}^{(k)} + \nu_{(k)} \kappa_{22}^{(k)})]$$

$$\sigma_{12}^{(k)} = \frac{E'_{(k)}}{1 + \nu_{(k)}} (e_{12}^{(k)} - z_{(k)} \kappa_{12}^{(k)}) \quad (1 \Leftrightarrow 2) \quad (1.8)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^{[k]} = 2G'' \varepsilon_{\alpha 3}^{[k]}, \quad \sigma_{33}^{[k]} = E'' \varepsilon_{33}^{[k]}$$

где  $E'_{(k)}$ ,  $\nu_{(k)}$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала жесткого слоя.

**2. Метод дискретных трансформант Фурье.** Метод состоит из трех этапов. На первом этапе к исходной системе термоупругости применяется метод канонических спектральных разложений. Рассматриваются полубесконечные или оболочки конечных размеров. В итоге приходим к системе дифференциальных уравнений с комплексными элементами относительно

трансформант Фурье полей перемещений в оболочке. Если получена двумерная система, то на основе метода Власова — Канторовича она редуцируется к одномерной.

Второй этап метода состоит в применении к полученной системе относительной трансформант Фурье устойчивого численного метода дискретной ортогональной прогонки С. К. Годунова. В итоге получаем дискретный в заданной области оболочки вектор решений трансформант Фурье. При этом численное решение осуществляется во всей области значений волновых чисел.

На третьем этапе дискретные трансформанты Фурье используются для вычисления спектральных характеристик соответствующих стохастических полей<sup>1</sup>.

Проиллюстрируем применение метода дискретных трансформант Фурье к расчету стохастических характеристик напряжений в слоистых оболочках. Пусть внешнее случайное температурное поле является стационарным по времени и однородным по пространственным координатам. Его можно представить как сумму математического ожидания и пульсаций. Положим, что пульсации температуры во внутренней среде отсутствуют.

Пульсационные составляющие температуры, перемещений и напряжений будем исследовать в рамках корреляционной теории, считая математические ожидания соответствующих полей известными. В силу искажения напряженно-деформированного состояния в торцевой зоне оболочки случайные поля перемещений и напряжений будут неоднородными по продольной координате и стационарными по времени. Поле температуры в слоях оболочки полагаем статистически однородным.

Будем рассматривать случай, когда масштаб корреляции внешнего температурного поля по окружной координате  $x_2$  сопоставим с диаметром оболочки (например, наружным), т. е. по окружной координате случайное поле обладает периодичностью.

Для исследования указанных случайных полей применим метод канонических спектральных разложений [8, 9]. Введем вектор параметров температуры  $T = (T, \Theta)$ . Тогда справедливы разложения

$$T_+(x, t) = \sum_{n^{\circ}=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(k, \omega) \exp[i(kx + \omega t)] dk_1 d\omega \quad (2.1)$$

$$T(x, t) = \sum_{n^{\circ}=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(k, \omega) T^{\circ}(k, \omega) \exp[i(kx + \omega t)] dk_1 d\omega$$

$$x = (x_1, x_2), \quad k = (k_1, k_2), \quad n^{\circ} = k_2/R_2$$

где  $Q(k, \omega)$  — дельта-коррелированная случайная функция с известной спектральной плотностью  $S_+(k, \omega)$ ,  $k$  — вектор волновых чисел,  $\omega$  — частота.

Базисные функции параметров распределения температуры определяются из решения линейной системы теплопроводности с комплексными элементами.

Введем обобщенный вектор перемещений жестких слоев оболочки  $f(x, t)$ , элементами которого являются продольные, тангенциальные и нормальные перемещения. Для вектора  $f$  принимается разложение:

$$f(x, t) = \sum_{n^{\circ}=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(k, \omega) f^{\circ}(k, \omega, x_1) \exp[i(k_2 x_2 + \omega t)] dk_1 d\omega \quad (2.2)$$

В силу линейности соотношений упругости для напряжений в жестких слоях оболочки будет справедливо разложение типа (2.2) с базисными функциями  $p_{\alpha\beta}^{\circ(h)}(k, \omega, x_1)$ .

<sup>1</sup> Изложенный метод впервые предложен в [5] и применялся к расчету пульсаций тепловых напряжений в [6, 7].

Уравнения термоупругого равновесия записываются в операторном виде относительно перемещений

$$L^{(n)}\mathbf{f}=\mathbf{q}(T) \quad (2.3)$$

где  $L^{(n)}$  — дифференциальная матрица-оператор размером  $(8n \times 8n)$ ,  $n$  — число жестких слоев оболочки,  $\mathbf{q}$  — входной вектор температурного воздействия.

Подстановка разложений (2.2) и (2.4) в уравнения (1.7) приводит к дифференциальной системе относительно трансформант Фурье полей перемещений, содержащей комплексные коэффициенты. Для удобства решения представим вектор базисных функций разложений перемещений в виде:

$$\mathbf{f}^\circ(\mathbf{k}, \omega, x_1) = \mathbf{f}_r^\circ(\mathbf{k}, \omega, x_1) + i\mathbf{f}_m^\circ(\mathbf{k}, \omega, x_1) \quad (2.4)$$

Аналогично представляются функции  $T^\circ$ ,  $p_{\alpha\beta}^{\circ(h)}$ . При этом индекс  $r$  указывает на принадлежности к действительной, а  $m$  — мнимой части выражения.

Введем вектор  $\mathbf{y}$ , элементами которого являются действительные и мнимые части представления (2.4), а также их соответствующие производные.

После разделения действительной и мнимой частей система уравнений относительно базисных функций полей перемещений записывается в канонической форме

$$d\mathbf{y}/dx_1 = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{q}_*(\mathbf{k}, \omega) \quad (2.5)$$

Система замыкается краевыми условиями на торцах оболочки  $\mathbf{a}_j\mathbf{y} = \mathbf{b}_j$ , где  $j=1$  соответствует сечению  $x_1=0$ , а  $j=2$  — сечению  $x_1=l$ .

Для решения системы (2.5) применяется численный метод дискретной ортогональной прогонки [10]. Особенность численного решения (2.5) в том, что решение осуществляется при фиксированных волновых числах и частоте. Значения их выбираются из области пространства волновых чисел и частоты, при которых значения соответствующих пространственно-временных спектров дают существенный вклад в значения вычисляемой дисперсии. Шаги дискретизации  $\Delta_k$ ,  $\Delta_\omega$  волнового числа и частоты выбираются на основе анализа изменчивости значений пространственно-временных спектров.

Выражения для искомых пространственно-временных спектров, вычисляемых через дискретные значения элементов вектора решений  $\mathbf{y}$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_T(k_1, \omega) &= \sum_{n^\circ=0}^{\infty} S_+(k, \omega) [(\operatorname{Re} T^\circ)^2 + (\operatorname{Im} T^\circ)^2], \\ \Phi_f(k_1, \omega, x_1) &= \sum_{n^\circ=0}^{\infty} S_+(k, \omega) [(f_r^\circ)^2 + (f_m^\circ)^2] \\ \Phi_{\alpha\beta}^{(h)}(k_1, \omega, x_1) &= \sum_{n^\circ=0}^{\infty} S_+(k, \omega) [(p_{\alpha\beta(r)}^{\circ(h)})^2 + (p_{\alpha\beta(m)}^{\circ(h)})^2] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Дисперсии соответствующих полей можно вычислять при помощи квадратурных формул из выражений типа

$$D\{\sigma_{\alpha\beta}^{(h)}(x_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\alpha\beta}^{(h)}(y, z_{(h)}) dk_1 d\omega \quad (2.7)$$

Обоснованием метода дискретных трансформант Фурье являются следующие положения. Устойчивое численное решение системы (2.5) методом Годунова достигается систематической ортогонализацией решений и

правильной дискретизацией исследуемой области. При этом шаг дискретизации торцевой зоны оболочки можно оценить по формуле  $\Delta_x = \|\lambda_j\|^{-1}$ , где  $\Delta_x$  — шаг дискретизации,  $\|\lambda_j\|$  — оценка нормы спектра собственных значений матрицы коэффициентов  $A$ . Под этой нормой будем понимать собственное значение с максимальной действительной частью ( $j=1, 2, \dots, 24$ ). Эта оценка легко определяется численно при помощи стандартных подпрограмм ЭВМ.

Шаги дискретизации волновых чисел  $\Delta_h, \Delta_\omega$  при использовании выражений (2.6) и вычислении дисперсии (2.7) всегда могут быть выбраны на основе анализа изменчивости значений пространственно-временных спектров при помощи оценки погрешности типа Рунге [14]. Таким образом, итоговая погрешность искомым стохастических характеристик полей перемещений и напряжений может быть априорно заданной.

**3. Приложение к трехслойным оболочкам.** Рассмотрим важный класс многослойных оболочек — трехслойные цилиндрические оболочки, работающие в условиях пульсирующего внешнего температурного поля. Будем рассматривать случай, когда температура распределяется по толщине слоев по линейному закону. Влиянием температурных краевых условий пренебрегаем, т. е. решим стохастическую задачу теплопроводности для случая, когда поля параметров распределения температуры в слоях являются случайными стационарными функциями по времени и однородными по продольной координате  $x=x_1$ .

При обтекании цилиндрической оболочки средой со случайно меняющейся температурой  $T_+$  ( $T_-=0$ ) температурное поле в оболочке можно считать симметричным относительно оси. При этом для исследования температурных полей и термических напряжений в слоях оболочки можно использовать расчетную схему для цилиндрической оболочки в осесимметричном температурном поле.

В такой постановке параметрами распределения температуры являются:  $T$  — температура срединной поверхности всей оболочки,  $\Theta$  — температурный градиент в жестких слоях оболочки.

Тогда, используя уравнения (1.3), а также представление (2.1), приходим к линейной алгебраической системе с комплексными коэффициентами относительно трансформант Фурье-разложений для параметров распределения температуры. Решение системы дается безразмерными выражениями

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} T^\circ &= [(\varphi + \gamma_\circ k_1^2 - 2\eta^2 \xi) d_r + \omega \xi_\circ d_m] d^{-1} \\
 \operatorname{Im} T^\circ &= [\omega \xi_\circ d_r - (\varphi + \gamma_\circ k_1^2 - 2\eta^2 \xi) d_m] d^{-1}, \\
 \operatorname{Re} \Theta^\circ &= [(\gamma_T k_1^2 + 2\kappa_*) \eta d_r + \omega \xi_T \eta d_m] d^{-1} \\
 \operatorname{Im} \Theta^\circ &= [\omega \xi_T \eta d_r - (\gamma_T k_1^2 + 2\kappa_*) \eta d_m] d^{-1} \\
 d &= d_r^2 + d_m^2 \\
 d_r &= (\delta + \gamma_T k_1^2) (\varphi + \gamma_\circ k_1^2) - \omega^2 \xi_T \xi_\circ - 2\eta^2 \xi^2 \\
 d_m &= \omega [(\delta + \gamma_T k_1^2) \xi_\circ + (\varphi + \gamma_\circ k_1^2) \xi_T] \\
 \eta &= 1 + 1/2 \lambda, \quad \lambda = (1 - \psi) / (\psi \lambda_*) \\
 p &= 1 + 2(1 + \lambda)^2, \quad \xi_T = 2 + c\rho(1 - \psi) / \psi \\
 \xi_\circ &= \frac{1}{6} \left( 2p + c\rho \lambda^2 \frac{1 - \psi}{\psi} \right), \quad \gamma_T = \frac{\beta_+}{R_H^*} [2\psi + (1 - \psi) \lambda_*] \\
 \gamma_\circ &= 1/3 \beta_+ [\psi p + 1/2 (1 - \psi) \lambda_* \lambda^2] / R_H^* \\
 c &= c'' / c', \quad \rho = \rho'' / \rho', \quad \lambda_* = \lambda'' / \lambda' \\
 \kappa_* &= \kappa_- / \kappa_+, \quad \delta = 1 + \kappa_*, \quad \xi = 1 - \kappa_* \\
 \psi &= \frac{h}{h+s} \quad R_H^* = \frac{R_2}{h+s} = \frac{n-1+\psi}{1-m_0}, \quad m_0 = \frac{R_1}{R_2}
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

$$T_* = T/T_0, \quad \Theta_* = \frac{1}{2} h \Theta / T_0, \quad \omega_* = c' \rho' h \omega / \kappa_+$$

где  $T_0$  — температура приведения уравнений теплопроводности;  $\beta_+$  — параметр, обратно пропорциональный коэффициенту Био Ви материала жесткого слоя оболочки; его можно представить  $\beta_+ = \psi (R_H^* \text{Vi})^{-1}$ ;  $R_1, R_2$  — внутренний и наружный радиусы оболочки.

Для трехслойной оболочки получаем дифференциальную матрицу-оператор  $L^{(2)}$  в виде

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{\rho_1} R_H^* - \frac{d^2}{dx^2} & -\frac{r_1}{\rho_1} R_H^* & \frac{p_1}{\rho_1} \frac{d}{dx} & -\frac{r_1}{2\rho_1} \frac{d}{dx} \\ -\frac{r_1}{\rho_2} R_H^* & \frac{r_1}{\rho_2} R_H^* - \frac{d^2}{dx^2} & \frac{r_1}{2\rho_2} \frac{d}{dx} & \frac{p_2}{\rho_2} \frac{d}{dx} \\ b_1 \frac{d}{dx} & \frac{1}{2} \frac{r_1}{\gamma_1} \frac{d}{dx} & c_1 + d_1 \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^4}{dx^4} & \frac{\rho_1^*}{\gamma_1} \kappa + \frac{1}{4} \frac{\rho_1^*}{\gamma_1} \kappa \frac{d^2}{dx^2} \\ -\frac{1}{2} \frac{r_1}{\gamma_2} \frac{d}{dx} & b_2 \frac{d}{dx} & \frac{\rho_1^*}{\gamma_2} \kappa + \frac{1}{4} \frac{\rho_1^*}{\gamma_2} \kappa \frac{d^2}{dx^2} & c_2 + d_2 \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^4}{dx^4} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$c_k = -(\rho_1^* \kappa + \rho_k^{-1}) \gamma_k^{-1}, \quad d_k = \frac{1}{4} \rho_1^* \gamma_k^{-1} \kappa$$

$$\chi = g_s (1 - \nu^2) / (f \psi (1 - \psi))$$

$$\kappa = R_H^{*2} (1 - \nu^2) / (f \psi (1 - \psi)), \quad r_k = \rho_k^* R_H^* \kappa$$

$$b_k = (r_{k-1} - r_k - 2\nu) (2\gamma_k)^{-1}$$

$$p_k = (r_{k-1} - r_k - 2\nu) (2\rho_k)^{-1}$$

$$f = E' / E'', \quad g_s = G'' / E'', \quad \gamma_k = \frac{1}{12} (\psi / R_H^*)^2 \rho_k$$

$$\rho_k = R_k' / R_2 = (k - 1 + \psi / 2) / R_H^* + m_0 \quad (k = 1, 2)$$

$$\rho_1^* = \rho_1 + 1 / (2R_H^*), \quad \alpha = \alpha' (1 + \nu)$$

$$w_k = \frac{w^{(k)}}{R_2 \alpha T_0}, \quad u_k = \frac{u^{(k)}}{R_2 \alpha T_0}, \quad \bar{x}_1 = \frac{x_1}{R_2}$$

где  $E'$ ,  $\nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного материала жесткого слоя.

Если жесткий слой является ортотропным, то его упругие и теплофизические характеристики определяются на основе рекомендаций [4, 12, 13].

Проведение процедуры метода дискретных трансформант Фурье к дифференциальной системе термоупругого равновесия с оператором (3.2) приводит к системе дифференциальных линейных продольных ( $U_{1r}, U_{1m}, \dots$ ) и нормальных перемещений ( $W_{1r}, W_{1m}, \dots$ ). Система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_{1r}}{dx^2} &= \frac{r_1}{\rho_1} R_H^* (U_{1r} - U_{2r}) - \frac{r_1}{2\rho_1} \frac{dW_{2r}}{dx} + p_1 \frac{dW_{1r}}{dx} + \text{Re } g_1 \\ \frac{d^2 U_{1m}}{dx^2} &= \frac{r_1}{\rho_1} R_H^* (U_{1m} - U_{2m}) - \frac{r_1}{2\rho_1} \frac{dW_{2m}}{dx} + p_1 \frac{dW_{1m}}{dx} + \text{Im } g_1 \\ \frac{d^2 U_{2r}}{dx^2} &= \frac{r_1}{\rho_2} R_H^* (-U_{1r} + U_{2r}) + \frac{r_1}{2\rho_2} \frac{dW_{1r}}{dx} + p_2 \frac{dW_{2r}}{dx} + \text{Re } g_2 \\ \frac{d^2 U_{2m}}{dx^2} &= \frac{r_1}{\rho_2} R_H^* (-U_{1m} + U_{2m}) + \frac{r_1}{2\rho_2} \frac{dW_{1m}}{dx} + p_2 \frac{dW_{2m}}{dx} + \text{Im } g_2 \\ \frac{d^4 W_{1r}}{dx^4} &= b_1 \frac{dU_{1r}}{dx} + \frac{r_1}{2\gamma_1} \frac{dU_{2r}}{dx} - (\xi_1 + \zeta_1) W_{1r} + \frac{\rho_1^*}{\gamma_1} \kappa W_{2r} - \\ &\quad - d_1 \frac{d^2 W_{1r}}{dx^2} + \frac{1}{4} \frac{\rho_1^*}{\gamma_1} \kappa \frac{d^2 W_{2r}}{dx^2} + \text{Re } q_1 \gamma_1^{-1} \end{aligned}$$

$$\frac{d^4 W_{1m}}{dx^4} = b_1 \frac{dU_{1r}}{dx} + \frac{r_1}{2\gamma_1} \frac{dU_{2m}}{dx} - (\xi_1 + \zeta_1) W_{1m} + \frac{\rho_1^*}{\gamma_1} \chi W_{2m} +$$

$$+ d_1 \frac{d^2 W_{1m}}{dx^2} + \frac{1}{4} \frac{\rho_1^*}{\gamma_1} \chi \frac{d^2 W_{2m}}{dx^2} + \text{Im } q_1 \gamma_1^{-1}$$

$$\frac{d^4 W_{2r}}{dx^4} = b_2 \frac{dU_{2r}}{dx} - \frac{r_1}{2\gamma_2} \frac{dU_{1r}}{dx} - (\xi_2 + \zeta_2) W_{2r} + \frac{\rho_1^*}{\gamma_2} \chi W_{1r} +$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\rho_1^*}{\gamma_2} \chi \frac{d^2 W_{1r}}{dx^2} + d_2 \frac{d^2 W_{2r}}{dx^2} + \text{Re } q_2 \gamma_2^{-1}$$

$$\frac{d^4 W_{2m}}{dx^4} = b_2 \frac{dU_{2m}}{dx} - \frac{r_1}{2\gamma_2} \frac{dU_{1m}}{dx} - (\xi_2 + \zeta_2) W_{2m} + \frac{\rho_1^*}{\gamma_2} \chi W_{1m} +$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\rho_1^*}{\gamma_2} \chi \frac{d^2 W_{1m}}{dx^2} + d_2 \frac{d^2 W_{2m}}{dx^2} + \text{Im } q_2 \gamma_2^{-1}$$

$$\rho_k^* = \frac{R_k''}{R_2}, \quad \rho_0^* = \rho_n^* = 0, \quad \rho_k^* = \frac{2k-1+\psi}{2R_H^*} + m_0$$

$$\xi_k = \frac{1}{4} d_k R_H^{*2} g_s, \quad \zeta_k = (\rho_k \gamma_k)^{-1}, \quad \text{Re } g_1 = C_x \text{Re } g_1^{\check{}} - S_x \text{Im } g_1^{\check{}}$$

$$\text{Im } g_1 = C_x \text{Im } g_1^{\check{}} + S_x \text{Re } g_1^{\check{}}, \quad C_x = \cos k_1 x, \quad S_x = \sin k_1 x$$

$$\text{Re } g_{1,2}^{\check{}} = - \frac{k_1 g}{\rho_{1,2}} (\text{Im } T^\circ \mp \lambda_1 \text{Im } \Theta^\circ),$$

$$\text{Im } g_{1,2}^{\check{}} = \frac{k_1 g}{\rho_{1,2}} (\text{Re } T^\circ \mp \lambda_1 \text{Re } \Theta^\circ),$$

$$\text{Re } q_{1,2} = C_x \text{Re } q_{1,2}^{\check{}} - S_x \text{Im } q_{1,2}^{\check{}}, \quad \text{Im } q_{1,2} = C_x \text{Im } q_{1,2}^{\check{}} + S_x \text{Re } q_{1,2}^{\check{}}$$

$$\text{Re } q_{1,2}^{\check{}} = (1 \mp p_*) \text{Re } T^\circ \mp (\lambda_1 \mp k_1^2 f_{1,2}) \text{Re } \Theta^\circ$$

$$\text{Im } q_{1,2}^{\check{}} = (1 \mp p_*) \text{Im } T^\circ \mp (\lambda_1 \mp k_1^2 f_{1,2}) \text{Im } \Theta^\circ$$

$$g = \psi / [(1 + \nu) R_H^*], \quad \lambda_1 = 1 + \lambda$$

$$f_k = \frac{\rho_k}{6} \frac{\psi}{R_H^*}, \quad p_* = \frac{R_H^* \alpha_* (1 - \nu^2)}{f \psi} \rho_1^*, \quad \alpha_* = \frac{\alpha''}{\alpha'}$$

Замена (1→2) дает  $\text{Re } g_2$  и  $\text{Im } g_2$ . Вводим вектор решений следующим образом:  $y = (U_{1r}, U_{1r}', \dots, W_{2m}'', W_{2m}''')^T$ , где штрихи означают производные. В этом случае матрица  $A$  имеет размерность  $(24 \times 24)$  и ее элементы ввиду громоздкости здесь не приводятся. Система должна решаться совместно с граничными условиями на торцах оболочки.

Рассматривался случай жесткого заземления на торце  $x=0$ . На расстоянии  $x=l$  от торца, причем это расстояние должно по крайней мере в 2,5 раза превосходить зону краевого эффекта, можно поставить любые краевые условия (заземление, свободное опирание, свободный край).

Ненулевыми элементами матрицы краевых условий, соответствующих краевым условиям жесткой заделки, являются:  $a_{11} = a_{23} = a_{25} = a_{35} = a_{47} = 1$ ,  $a_{5+2i, 9+4j} = 1$ ,  $a_{6+2i, 10+4j} = 1$ , где индексы  $i$  и  $j$  одновременно принимают значения 0, 1, 2, 3.

Приведем расчетные формулы для пространственно-временных спектров полей параметров распределения температуры, полей перемещений в слоях цилиндрической оболочки, полей изгибающих моментов в жестких слоях оболочки, поля трансверсальных напряжений в мягком слое. Все спектры определяются через вектор решений канонической системы метода дискретных трансформант Фурье

$$\Phi_T^{(2)}(k_1, \omega) = S_+(k_1, \omega) \{ [\text{Re } T^\circ \pm (1 + \lambda) \text{Re } \Theta^\circ]^2 + [\text{Im } T^\circ \pm (1 + \lambda) \text{Im } \Theta^\circ]^2 \}$$

$$\Phi_v(k_1, \omega) = S_+(k_1, \omega) [v_r^2 + v_m^2]$$

$$v_r = (U_{1r}, U_{2r}, W_{1r}, W_{2r})^T, \quad v_m = (U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m})^T$$



$$\operatorname{Re} M_{11}^{(k)} = c d^2 W_{kr} / dx^2 + q^\circ (C_x \operatorname{Re} \Theta^\circ - S_x \operatorname{Im} \Theta^\circ)$$

$$\operatorname{Im} M_{11}^{(k)} = c d^2 W_{km} / dx^2 + q^\circ (C_x \operatorname{Im} \Theta^\circ + S_x \operatorname{Re} \Theta^\circ)$$

$$\Phi_{M_{11}}^{(k)}(k_1, \omega, x) = S_+(k_1, \omega) [(\operatorname{Re} M_{11}^{(k)})^2 + (\operatorname{Im} M_{11}^{(k)})^2],$$

$$\Phi_{33}(k_1, \omega, x) = S_+(k_1, \omega) [F_1^2 + F_2^2]$$

$$F_1 = a^\sim [W_{2r} - W_{1r}] - b^\sim C_x \operatorname{Re} T^\circ + b^\sim S_x \operatorname{Im} T^\circ$$

$$F_2 = a^\sim [W_{2m} - W_{1m}] - b^\sim C_x \operatorname{Im} T^\circ - b^\sim S_x \operatorname{Re} T^\circ$$

$$c = 1/12 \psi / R_H^\sim, \quad q^\circ = 1/6 (1 - \nu)^{-1}$$

$$a^\sim = R_H^* / (1 - \psi), \quad b^\sim = \psi / [(1 - \psi)(1 + \nu)]$$

4. Численные результаты. Для расчета статистических характеристик перемещений и напряжений в краевых зонах многослойных цилиндрических оболочек разработан программный вычислительный комплекс, ориентированный на применение ЕС ЭВМ в системе ОС. Базовым подмножеством комплекса является пакет программ, осуществляющих дискретную ортогональную прогонку.

Апробация вычислительного комплекса проводилась на примере оболочки, подверженной случайному температурному воздействию со спектральной плотностью (записанный в безразмерном виде)  $S_+(k_1, \omega) = S \exp(-\omega^2/\tau^2) (1 + k_1^2/k_{01}^2)^{-3}$ , где безразмерные параметры  $\tau^{-1}$ ,  $k_{01}^{-1}$  имеют смысл масштабов корреляции внешнего температурного поля по времени и продольной координате.

При расчетах принимались следующие параметры оболочки:  $\alpha_* = 10$ ,  $c = 2$ ,  $\rho = 0,5$ ,  $Bi = 1$ ,  $S = 0,25$ ,  $\tau = 10$ ,  $k_{01} = 1$ ,  $\kappa_* = 0,7$ ,  $g_* = 0,2$ ,  $\lambda_* = 0,2$ ,  $f = 10$ ,  $\psi = 0,2$ ,  $m_0 = 0,9$ ,  $\nu = 0,3$ ;  $n^\circ = 0$ ,  $\Delta_0 = 0,025$ ,  $\Delta_k = 0,05$ ,  $l = 1$ ;  $l$  — длина интервала интегрирования от левого заземленного торца до сечения оболочки  $x = l$ , где для унификации также ставились краевые условия типа заделки.

На фиг. 1 изображено изменение математических ожиданий нормальных перемещений оболочки с пятью жесткими слоями в ( $n=5$ ) торцевой зоне. На фиг. 1, 2 номер кривой соответствует номеру слоя  $k$ , штрихпунктирные линии — случаю, когда параметр  $\alpha_*$ , характеризующий соотношение коэффициентов линейного расширения, равен 20. Здесь необходимо отметить наличие в торцевой зоне для внутренних слоев отрицательных перемещений.

Изменение математических ожиданий приведенных изгибающих моментов в жестких слоях оболочки в торцевой зоне приводится на фиг. 2. Изгибающий момент высчитался по формуле  $M_k^* = -(\psi/R_H^*)^2 d^2 w_k / dx^2$ .

Анализ зависимостей показывает, что в наиболее загруженных условиях работает внешний слой, а наименее загружены второй и третий слои.

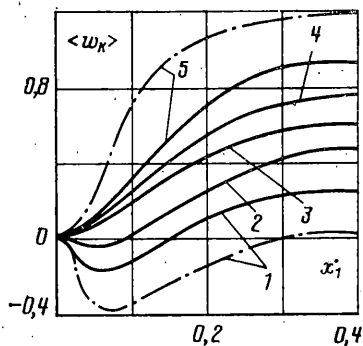
На фиг. 3 приводятся ломаные линии значений математических ожиданий приведенного изгибающего момента в жестких слоях оболочки в сечении  $x=0$ . Оболочки имеют от трех до пяти жестких слоев. Штрихпунктирные линии относятся к случаю, когда параметр  $f$ , характеризующий соотношение модулей упругости материалов мягкого и жесткого слоев, принимался равным  $10^2$ . Отметим, что увеличение числа жестких слоев в пакете оболочки приводит к существенному снижению изгибающих моментов. К аналогичному эффекту приводит уменьшение жесткости материала мягких слоев (возрастание параметра  $f$ ).

Все расчеты математических ожиданий, результаты которых приведены на фиг. 1—3, соответствуют случаю однородного, стационарного теплового поля ( $T_+ = T_- = T_0$ ).

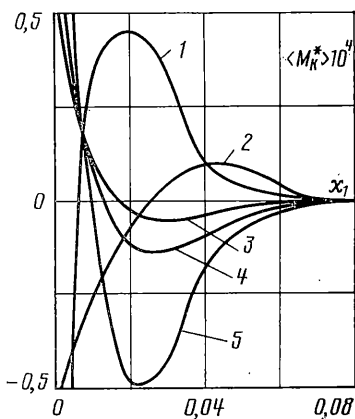
На фиг. 4 показано изменение некоторых элементов вектора решений  $u$  в зоне торца оболочки. Кривая 1 соответствует  $W_{1r}''$ , а линия 2 —  $W_{1m}''$ . Значения на обеих зависимостях увеличены в 10 раз. Кривая 3 относится к  $W_{1r}$ , значения которой увеличены в 5 раз. Линия 4 относится к значениям  $U_{1r}$ , умноженным на  $0,25 \cdot 10^4$ . Рассматривалась оболочка с  $n=2$ .

Приведенные зависимости относятся к случаю, когда  $k_1 = 0,4$ , а  $\omega = 0,3$ . Отметим, что и при других значениях волнового числа и частоты характер изменения элементов вектора решений остается тот же. С возрастанием  $x$  кривые  $W_{1r}''$  и  $W_{1m}''$  не стремятся к нулю как в случае детерминированной постановки задачи [14], а выходят на некоторые значения, через которые определяются статистические характеристики полей напряжений в зоне, удаленной от торца, где реализуется однородное случайное поле напряжений.

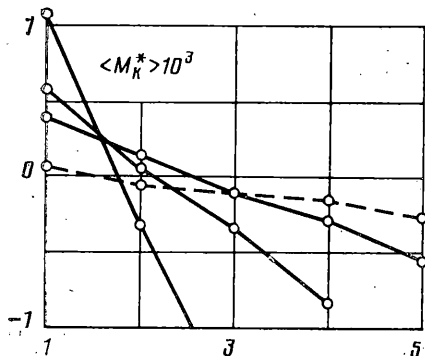
Сечения пространственно-временного спектра изгибающего момента во внутреннем слое оболочки плоскостями  $k_1 = \text{const}$  для оболочки с двумя жесткими слоями изображены на фиг. 5. Линия 1 соответствует случаю  $k_1 = 0$ , а линия 2 —  $k_1 = 0,4$ . Здесь штриховые линии соответствуют сечению  $x = 0,05$ , а сплошные —  $x = 0$ . Характер сечений остается такой же и для пространственно-временных спектров перемещений в слоях оболочки, изгибающих моментов, трансверсальных напряжений в мягком слое. Анализируя зависимости, изображенные на фиг. 5, можно выбрать частоту среза  $\omega_s = 0,45$ .



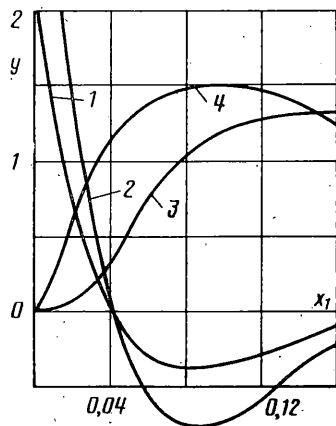
Фиг. 1



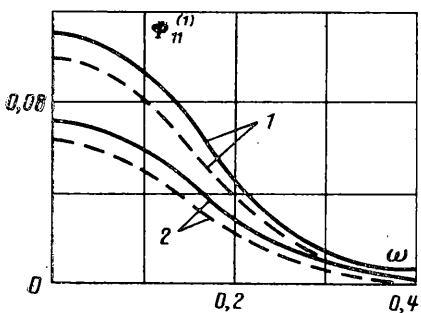
Фиг. 2



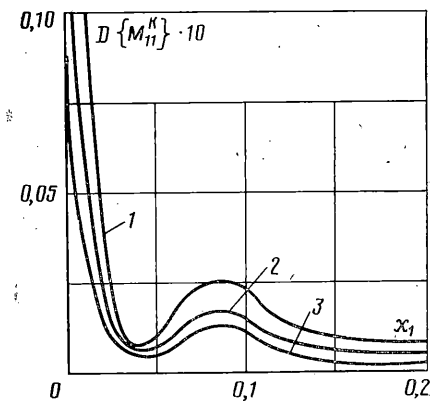
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Изменение безразмерной дисперсии изгибающих моментов в жестких слоях оболочки в зоне торца изображено на фиг. 6. При этом кривая 1 относится к наружному слою оболочки, кривая 3 — к внутреннему. Линия 2 получена в случае пренебрежения изменением метрики жестких слоев оболочки, что приводит к уменьшению порядка системы термоупругого равновесия до шестнадцатого.

На всех зависимостях отмечается локальный минимум в районе сечения  $x = 0,04$ , который обусловлен характером изменения элементов вектора  $y$  в торцевой зоне. Зависимости фиг. 6 показывают, что пренебрежение метрикой жестких слоев приводит к существенному изменению значений дисперсии изгибающих моментов в слоях оболочки в торцевой зоне.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Москаленко В. Н., Харионовский В. В. Прочность элементов теплообменных устройств в условиях случайных пульсаций температур. М.: Атомиздат. 1979. 167 с.
2. Новичков Ю. Н., Бутко А. М. Исследование случайных температурных полей в двухслойных пластинах с применением метода Монте-Карло // Прикл. механика. 1979. Т. 15. № 2. С. 91-98.
3. Новичков Ю. Н., Бутко А. М. Исследование случайных температурных полей и напряжений в двухслойных цилиндрических оболочках // Расчеты на прочность. Вып. 23. М.: Машиностроение. 1982. С. 247-256.
4. Бологин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение. 1980. 375 с.
5. Бутко А. М., Новичков Ю. Н. Численное исследование неоднородных случайных полей термоупругих напряжений в оболочках // Проблемы оптимизации и надежности в строительной механике. М.: Стройиздат. 1983. С. 24.
6. Бутко А. М. Методика численного расчета неоднородных случайных термоупругих напряжений в оболочках // Расчет сооружений, взаимодействующих с окружающей средой. М.: Изд-во Моск. гидромелиорат. ин-та. 1984. С. 74-85.
7. Новичков Ю. Н., Бутко А. М. Стохастическая термомеханика многослойных оболочек // Матер. 2-й Всесоюз. научн.-техн. конф. «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов». Ереван: Изд-во Ереван. ун-та. 1984. Т. 2. С. 231-248.
8. Бологин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат. 1971. 255 с.
9. Бологин В. В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
10. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. (УМН). 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171-174.
11. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1981. 343 с.
12. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ. 1984. 336 с.
13. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение. 1984. 263 с.
14. Новичков Ю. Н., Бутко А. М. Термоупругие краевые эффекты в многослойных цилиндрических оболочках // Расчеты на прочность. Вып. 17. М.: Машиностроение. 1976. С. 76-84.

Москва

Поступила в редакцию  
20.XI.1986