

УДК 539.375

РАСЧЕТ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ
И КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ
ДЛЯ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЫ В СЛОЕ

ВАЙНШТОК В. А., ВАРФОЛОМЕЕВ И. В.

Поверхностные трещины являются одним из типичных трехмерных дефектов в конструкциях. К настоящему времени получено численное решение ряда задач о нормальном нагружении берегов полуэллиптической трещины (см., например, [1-8]). Однако в большинстве работ [1-3, 6-8] рассмотрены случаи однородной и линейно изменяющейся нагрузки, а ограниченный характер данных для градиентов напряжений более высокой степени [4, 5] не позволяет использовать их в широком диапазоне значений эллиптичности и относительной глубины трещины.

Вместе с тем получение инженерных формул для коэффициентов интенсивности напряжений при произвольном распределении номинальных напряжений имеет важное значение. Эффективное решение этой задачи может быть основано на использовании весовых функций [9-11].

Публикуемая работа содержит развитие методики определения весовых функций и коэффициентов интенсивности напряжений [11] для произвольного нормального нагружения берегов поверхностной полуэллиптической трещины в слое. Полученные результаты позволяют сравнительно просто и точно строить инженерные формулы для коэффициентов интенсивности напряжений.

1. Рассмотрим вывод обобщенного уравнения метода весовых функций для трещин с криволинейным фронтом [11]. Пусть линейно-упругое тело ослаблено трещиной, к берегам которой приложена нормальная нагрузка σ_0 , вызывающая раскрытие берегов трещины u_0 . Изменение потенциальной энергии тела при варьировании площади трещины S равно

$$\delta\Pi = \int_s \sigma_0 \delta u_0 dS \quad (1.1)$$

с другой стороны

$$\delta\Pi = \int_\Gamma J_0 \delta R d\Gamma = \int_\Gamma \frac{K_0^2}{H} \delta R \cos \varphi d\Gamma \quad (1.2)$$

где Γ — контур трещины, J_0 — вектор потока энергии, δR — вектор смещения точек фронта трещины, K_0 — коэффициент интенсивности напряжений вдоль фронта трещины, соответствующий нагрузке σ_0 , H — обобщенный модуль Юнга, φ — угол между δR и нормалью к фронту трещины.

Приравнивая выражения (1.1) и (1.2), получим

$$\int_s \sigma_0 \delta u_0 dS = \int_\Gamma \frac{K_0^2}{H} \delta R \cos \varphi d\Gamma \quad (1.3)$$

Аналогично для нагрузки σ_n (соответственно, смещений u_n и коэффициента интенсивности напряжений K_n) найдем

$$\int_s \sigma_n \delta u_n dS = \int_\Gamma \frac{K_n^2}{H} \delta R \cos \varphi d\Gamma \quad (1.4)$$

Используя принцип суперпозиции для линейно-упругого тела и теорему Бетти

$$\int_s (\sigma_n + \sigma_0) \delta(u_n + u_0) dS = \int_\Gamma \frac{(K_n + K_0)^2}{H} \delta R \cos \varphi d\Gamma$$

$$\int_s \sigma_0 \delta u_n dS = \int_s \sigma_n \delta u_0 dS$$

а также уравнения энергетического баланса (1.3) и (1.4), получим следующее уравнение метода весовых функций:

$$\int_\Gamma \frac{K_0 K_n}{H} \delta R \cos \varphi d\Gamma = \int_s \sigma_n \delta u_0 dS \quad (1.5)$$

Отсюда следует известная формула для плоских задач [12] (a — длина трещины):

$$K_n = \frac{H}{K_0} \int_0^a \sigma_n \frac{\partial u_0}{\partial a} dx$$

Если определены функции K_0 и u_0 (например, для однородной нагрузки), уравнение (1.5) служит для определения величины K_n , соответствующей произвольной нагрузке σ_n . Для трещин полуэллиптической формы K_0 достаточно точно определяется по данным численных расчетов [1, 3, 6–8] либо с помощью эмпирической формулы [2], поэтому в уравнении (1.5) остается определить функцию u_0 .

2. Согласно [10, 11], приближенное выражение для u_0 целесообразно представить в виде

$$u_0(r, t, a, \alpha, \beta) = \frac{2\sigma_0 a}{HE(k)} \left[f(t, \alpha, \beta) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} + F(t, \alpha, \beta) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{3/2} \right] \quad (2.1)$$

где r, θ — полярные координаты, t — параметр эллипса, a, b — меньшая и большая полуоси эллипса соответственно, $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода, $k^2 = 1 - \alpha^2$, $\alpha = a/b$, $\beta = a/h$, h — толщина слоя, $f(t, \alpha, \beta)$ — безразмерный коэффициент интенсивности напряжений вдоль фронта трещины при однородном нагружении, $F(t, \alpha, \beta)$ — поправка к асимптотическому решению для нормальных смещений берегов трещины. Величина f определяется из уравнения

$$K_0(t, \alpha, \beta) = f(t, \alpha, \beta) \sigma_0 \sqrt{\pi a} [E(k)]^{-1} (\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t)^{1/2} \quad (2.2)$$

В выражении (2.1) R представляет собой расстояние от центра эллипса до контура трещины: $R = a(\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta)^{-1/2}$, или с учетом соотношения $\operatorname{tg} \theta = \alpha \operatorname{tg} t$, связывающего величины полярного и параметрического углов: $R = a(\sin^2 t + \alpha^{-2} \cos^2 t)^{1/2}$.

Выражение (2.1) удовлетворяет фундаментальному решению линейной теории упругости в окрестности сингулярной точки, асимптотическому условию линейной механики разрушения для смещений вблизи фронта трещины, граничному условию на Γ , а при $F = \beta = 0$ — решению для эллиптической трещины. Функция F должна обеспечить неразрывность поля смещений берегов трещины и условие энергетического баланса (1.3).

Изменяя размер трещины и сохраняя ее форму, получим

$$\frac{a}{b} = \frac{\delta a}{\delta b}, \quad \delta u_0|_{\alpha=\text{const}} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial a} \delta a + \frac{\partial u_0}{\partial b} \delta b \right)_{\alpha=\text{const}} =$$

$$= 2\sigma_0 (EH)^{-1} [(f + f_\beta) (1 - \rho^2)^{1/2} + f \rho^2 (1 - \rho^2)^{-1/2} +$$

$$+ (F + F_\beta) (1 - \rho^2)^{1/2} + 3F \rho^2 (1 - \rho^2)^{-1/2}] \delta a \quad (2.3)$$

$$\delta R = \delta a (\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} \rho &= r/R, \quad f_\beta = \beta(\partial f/\partial \beta), \quad F_\beta = \beta(\partial F/\partial \beta) \\ \cos \varphi &= (\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta) (\sin^2 \theta + \alpha^4 \cos^2 \theta)^{-1/2} \\ d\Gamma &= b(\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t)^{1/2} dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t = (\sin^2 \theta + \alpha^4 \cos^2 \theta) (\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta)^{-1}$$

Подстановка (2.3) и (2.4) в уравнение (1.3) дает

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{2E(k)} \beta^{-3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} f^2(t, \alpha, \beta) \beta^2 (\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t)^{1/2} d\beta dt = \\ = \int_0^{\pi/2} \left[f(t, \alpha, \beta) + \frac{3}{5} F(t, \alpha, \beta) \right] dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из условия неразрывности поля смещений на берегах трещины имеем

$$\begin{aligned} u_0(r=0, t, \alpha, \beta) &= 2\sigma_0 a [HE(k)]^{-1} [f(t, \alpha, \beta) + F(t, \alpha, \beta)] = C_0 \\ F(t, \alpha, \beta) &= C_0 HE(k) / (2\sigma_0 a) - f(t, \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (2.6)$$

После подстановки (2.6) в (2.5) получим

$$\begin{aligned} F(t, \alpha, \beta) &= \frac{5}{E(k)} \beta^{-3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} f^2(t, \alpha, \beta) \beta^2 (\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t)^{1/2} d\beta dt - \\ &- \frac{4}{3\pi} \int_0^{\pi/2} f(t, \alpha, \beta) dt - f(t, \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Найденное решение для нормального раскрытия берегов полуэллиптической трещины (2.1), (2.7) предпочтительнее известных в литературе [10]. В [9] выражение u_0 в частном случае не удовлетворяет решению для эллиптической трещины и условию неразрывности смещений, а поправка к асимптотическому решению отрицательна, что противоречит известным результатам [8].

Выражение (2.1) с учетом (2.7) используем для определения весовой функции. Из (1.5) видно, что дифференциал δu_0 играет роль функции Грина для K_n , т. е. весовой функции. Для трещины с полуэллиптическим фронтом при произвольном изменении полуосей весовая функция имеет вид

$$\begin{aligned} \delta u_0 &= \delta u_0|_{\delta a} + \delta u_0|_{\delta b} \\ \delta u_0|_{\delta a} &= 2\sigma_0 (HE)^{-1} \{ [(1-\gamma)f + f_\alpha + f_\beta] (1-\rho^2)^{1/2} + \\ &+ f\rho^2 (1-\rho^2)^{-1/2} \sin^2 t + [(1-\gamma)F + F_\alpha + F_\beta] (1-\rho^2)^{1/2} + \\ &+ 3F\rho^2 (1-\rho^2)^{1/2} \sin^2 t \} \delta a \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \delta u_0|_{\delta b} &= 2\sigma_0 \alpha (HE)^{-1} [(\gamma f - f_\alpha) (1-\rho^2)^{1/2} + f\rho^2 (1-\rho^2)^{-1/2} \cos^2 t + \\ &+ (\gamma F - F_\alpha) (1-\rho^2)^{1/2} + 3F\rho^2 (1-\rho^2)^{1/2} \cos^2 t] \delta b \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$f_\alpha = \alpha(\partial f/\partial \alpha), \quad F_\alpha = \alpha(\partial F/\partial \alpha), \quad \gamma = \alpha^2 k^{-2} [K(k)/E(k) - 1] \quad (2.10)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. В частном случае из формул (2.8), (2.9) следует известное решение плоской задачи [12].

3. Коэффициент интенсивности напряжений при неоднородном нагружении берегов трещины удобно представить в следующем виде:

$$K_n(t, \alpha, \beta) = \psi_n(t, \alpha, \beta) K_0(t, \alpha, \beta) \quad (3.1)$$

Для определения функции поправки на неоднородность поля напряжений ψ_n , используя (1.5), произведем два варьирования площади тре-

щины, при каждом из которых изменяется одна из полуосей эллипса:

$$\int_{\Gamma} \frac{K_n K_0}{H} \delta R|_{\delta a} \cos \varphi d\Gamma = \int_s \sigma_n \delta u_0|_{\delta a} dS \quad (3.2)$$

$$\int_{\Gamma} \frac{K_n K_0}{H} \delta R|_{\delta b} \cos \varphi d\Gamma = \int_s \sigma_n \delta u_0|_{\delta b} dS$$

$$\delta R|_{\delta a} = \sin^2 \theta (\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta)^{-1/2} \delta a \quad (3.3)$$

$$\delta R|_{\delta b} = \alpha^3 \cos^2 \theta (\sin^2 \alpha + \theta^2 \cos^2 \theta)^{-1/2} \delta b$$

В дальнейшем ограничимся случаем степенной нагрузки, определяемой одним из выражений

$$\sigma_n(x) = \sigma_0 (x/a)^n, \quad \sigma_n(\rho, t) = \sigma_0 \rho^n \sin^n t \quad (3.4)$$

Функцию ψ_n представим в виде

$$\psi_n(t, \alpha, \beta) = A_1^{(n)}(\alpha, \beta) + A_2^{(n)}(\alpha, \beta) \sin^n t \quad (3.5)$$

После подстановки выражений (2.8), (2.9), (3.3)–(3.5) в (3.2) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_1^{(n)}$ и $A_2^{(n)}$:

$$p_{i1}^{(n)} A_1^{(n)} + p_{i2}^{(n)} A_2^{(n)} = q_i^{(n)} \quad (i=1, 2) \quad (3.6)$$

где обозначено (интегрирование по t от 0 до $\pi/2$):

$$p_{11}^{(n)} = \int f^2 \sin^2 t (\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t)^{1/2} dt$$

$$p_{12}^{(n)} = \int f^2 \sin^{n+2} t (\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t)^{1/2} dt$$

$$p_{21}^{(n)} = \int f^2 \cos^2 t (\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t)^{1/2} dt$$

$$p_{22}^{(n)} = \int f^2 \cos^2 t \sin^n t (\sin^2 t + \alpha^2 \cos^2 t)^{1/2} dt$$

$$q_1^{(n)} = (2/\pi) E \int \sin^n t \{D_1^{(n)} [(1-\gamma)f + f_\alpha + f_\beta] +$$

$$+ D_2^{(n)} f \sin^2 t + D_3^{(n)} F \sin^2 t + D_4^{(n)} [(1-\gamma)F + F_\alpha + F_\beta]\} dt$$

$$q_2^{(n)} = (2/\pi) E \int \sin^n t [D_1^{(n)} (\gamma f - f_\alpha) +$$

$$+ D_2^{(n)} f \cos^2 t + D_3^{(n)} F \cos^2 t + D_4^{(n)} (\gamma F - F_\alpha)] dt$$

$$D_1^{(n)} = {}^{1/4} \sqrt{\pi} \Gamma(n/2+1) / \Gamma((n+1)/2+2)$$

$$D_2^{(n)} = {}^{1/2} \sqrt{\pi} \Gamma(n/2+2) / \Gamma((n+1)/2+2)$$

$$D_3^{(n)} = {}^{3/4} \sqrt{\pi} \Gamma(n/2+2) / \Gamma((n+1)/2+3)$$

$$D_4^{(n)} = {}^{3/8} \sqrt{\pi} \Gamma(n/2+1) / \Gamma((n+1)/2+3)$$

Для аппроксимации коэффициента интенсивности напряжений, соответствующего однородному нагружению берегов полуэллиптической поверхностной трещины, может быть использована известная эмпирическая формула [2], которая с точностью 6% аппроксимирует результаты численных расчетов [1]. Последние, в свою очередь, в пределах 4,5% согласуются с более точным решением [3] для максимально углубленной точки фронта трещины. Однако при $\beta=0$ имеет место заметное отличие данных [1–3] от корректных результатов, полученных в [7, 8] для полубесконечного тела. Поэтому целесообразно представить функцию f в сле-

дующем виде:

$$f(t, \alpha, \beta) = f_0(t, \alpha) f_1(t, \alpha, \beta) \quad (3.7)$$

где f_0 — безразмерный коэффициент интенсивности напряжений для трещины в полупространстве, f_1 — поправка на конечную толщину тела. В [11] данные [7, 8] аппроксимировались с погрешностью $\sim 2\%$ при $t \neq 0$:

$$f_0(t, \alpha) = 1,12 + \alpha [0,09 - 0,16 \sin t (\sin^2 t + \alpha^{-2} \cos^2 t)^{1/2}] \quad (3.8)$$

Проводя интерполяцию результатов [1–3], для функции $f_1(t, \alpha, \beta)$ получим

$$f_1(t, \alpha, \beta) = 1 + A_1 \beta^2 + A_2 \beta^4 + \alpha \beta^2 (A_3 + A_4 \beta^2) (1 - \sin t)^2 \quad (3.9)$$

$$A_1(\alpha) = -0,5 + 0,8(0,2 + \alpha)^{-1} + 0,09(1,23 + \alpha)^{-2}$$

$$A_2(\alpha) = 0,4545 - 0,909(0,65 + \alpha)^{-1} + 7,62 \cdot 10^{-5}(0,0028 + \alpha)^{-2} \quad (3.10)$$

$$A_3(\alpha) = 1,652(1 - \alpha), \quad A_4(\alpha) = -0,73 + 0,81\alpha + 0,29(0,1 + \alpha)^{-2}$$

Выражения (3.9), (3.10) с погрешностью 4% аппроксимируют данные [1, 3] при $t=0$ и $t=\pi/2$ соответственно.

Следует отметить, что при $0 < t < \varepsilon$ ($\pi - \varepsilon < t < \pi$) коэффициент $K(t)$ достигает некоторого экстремального значения, причем $K(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \pi$), поскольку асимптотика напряжений вблизи свободной поверхности тела имеет иной порядок, чем $t^{-1/2}$ [13]. Однако величина ε настолько мала [7, 8], что в [1–6, 9] максимальное значение коэффициента интенсивности напряжений в указанных интервалах формально относят к точкам $t=0$ ($t=\pi$); кроме того, по имеющимся в литературе данным невозможно определить величину t , при которой $K(t)$ достигает экстремального значения. Развитый здесь подход позволяет учесть отмеченную выше особенность поведения коэффициента интенсивности напряжений и использовать в расчетах фактический закон распределения $K_0(t)$ вдоль фронта трещины. Однако делать это нецелесообразно в силу указанных причин и, так как погрешность вычислений при интегрировании на множестве меры, имеющей порядок величины ε (см. (1.5)), будет иметь тот же порядок. Фактический характер распределения коэффициента интенсивности напряжений в интервале $0 < t < \varepsilon$ ($\pi - \varepsilon < t < \pi$) не оказывает, видимо, существенного влияния на трещиностойкость элемента конструкции, поскольку при $\varepsilon \rightarrow 0$ пластическая зона вблизи свободной поверхности тела, которая контролируется экстремальным значением $K(t)$ вблизи этой поверхности, перекрывает участок фронта трещины с немонотонным поведением $K(t)$.

Таким образом, из всего отмеченного следует, что (как и предполагается в большинстве работ) фактический закон изменения коэффициента интенсивности напряжений в рассматриваемом интервале не имеет практического значения и формально экстремальное значение коэффициента интенсивности напряжений при $0 < t < \varepsilon$ ($\pi - \varepsilon < t < \pi$) можно отнести к точке $t=0$ ($t=\pi$).

4. Наибольший интерес представляют значения коэффициентов интенсивности напряжений в максимально углубленной точке фронта трещины. Введем обозначение $C_n(\alpha, \beta) = \psi_n(\pi/2, \alpha, \beta)$. Тогда при полиномиальном нагружении берегов трещины $\sigma(x) = \sigma_0 [1 + \sum \lambda_n (x/a)^n]$ коэффициент интенсивности напряжений в указанной точке равен

$$K = K_0(\pi/2, \alpha, \beta) (1 + \sum \lambda_n C_n)$$

Расчеты коэффициентов C_n методом весовых функций были выполнены в широком диапазоне изменения значений конфигурационных параметров тела с трещиной. При этом для аппроксимации функции f были использованы выражения (3.8)–(3.10), а также эмпирическая формула [2]. Проведенные расчеты позволяют строить инженерные формулы для коэффициентов C_n :

$$C_n(\alpha, \beta) = C_{1n}(\alpha) + C_{2n}(\alpha) \beta^2 + C_{3n}(\alpha) \beta^4 \quad (4.1)$$

$$C_{11} = 0,61 + 0,11\alpha, \quad C_{12} = 0,47 + 0,13\alpha, \quad C_{13} = 0,39 + 0,14\alpha$$

$$C_{21} = -(0,166 - 0,476\alpha + 0,818\alpha^2) (0,230 + \alpha)^{-1}, \quad C_{22} = -(0,063 + 0,188\alpha) (0,072 + \alpha)^{-1}$$

$$C_{23} = -(0,125 + 0,040\alpha) (0,162 + \alpha)^{-1}, \quad C_{31} = (0,052 - 0,266\alpha + 0,614\alpha^2) (0,092 + \alpha)^{-1}$$

$$C_{32} = (0,056 + 0,128\alpha) (0,077 + \alpha)^{-1}, \quad C_{33} = (0,129 - 0,051\alpha) (0,212 + \alpha)^{-1}$$

Таблица 1

α	β	C_1 , [3]	C_1 , [2]	C_1 , [6]	C_1	C_1	C_1
1,0	0,10	0,702	0,672	—	0,726	0,671	0,716
	0,25	0,697	0,674	—	0,706	0,664	0,696
	0,50	0,687	0,678	—	0,646	0,647	0,640
	0,80	0,686	0,682	—	0,582	0,634	0,606
0,5	0,10	0,641	0,635	0,715	0,673	0,655	0,663
	0,25	0,633	0,629	0,664	0,663	0,646	0,654
	0,50	0,612	0,617	0,648	0,637	0,618	0,627
	0,80	0,599	0,603	0,578	0,610	0,582	0,599
0,333	0,10	0,622	0,621	—	0,654	0,646	0,645
	0,25	0,612	0,608	—	0,642	0,634	0,636
	0,50	0,578	0,585	—	0,609	0,602	0,608
	0,80	0,558	0,558	—	0,572	0,559	0,565
0,2	0,10	0,609	0,608	—	0,642	0,638	0,630
	0,25	0,595	0,587	—	0,628	0,625	0,617
	0,50	0,547	0,553	—	0,593	0,589	0,577
	0,80	0,520	0,511	—	0,553	0,533	0,511

Таблица 2

n	β	C_n , [3]	C_n , [2]	C_n , [4]	C_n , [5]	C_n	C_n	C_n
1	0,10	0,622	0,621	—	—	0,654	0,646	0,645
	0,25	0,612	0,608	0,615	0,618	0,642	0,634	0,636
	0,50	0,578	0,585	0,577	0,554	0,609	0,602	0,608
	0,80	0,558	0,558	0,561	0,549	0,572	0,559	0,565
2	0,10	—	—	—	—	0,512	0,507	0,510
	0,25	—	—	0,471	0,473	0,497	0,493	0,495
	0,50	—	—	0,431	0,415	0,460	0,457	0,451
	0,80	—	—	0,417	0,395	0,422	0,416	0,413
3	0,10	—	—	—	—	0,433	0,431	0,434
	0,25	—	—	0,404	0,391	0,419	0,416	0,420
	0,50	—	—	0,350	0,346	0,382	0,380	0,380
	0,80	—	—	0,331	0,329	0,345	0,342	0,342

Последние выражения в интервале $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 0,8$ с погрешностью 4% аппроксимируют данные настоящей работы, а также [14].

В табл. 1 представлены результаты расчета C_1 (случай нагружения берегов трещины по линейному закону) при $0,2 \leq \alpha \leq 1$, $0,1 \leq \beta \leq 0,8$. Значения C_n ($n=1, 2, 3$) при $\alpha=1/3$, $0,1 \leq \beta \leq 0,8$ приведены в табл. 2. Данные, содержащиеся в последних трех столбцах таблиц, получены соответственно при аппроксимации f формулами (3.8)–(3.10) [2], а также при определении C_n из формул (4.1).

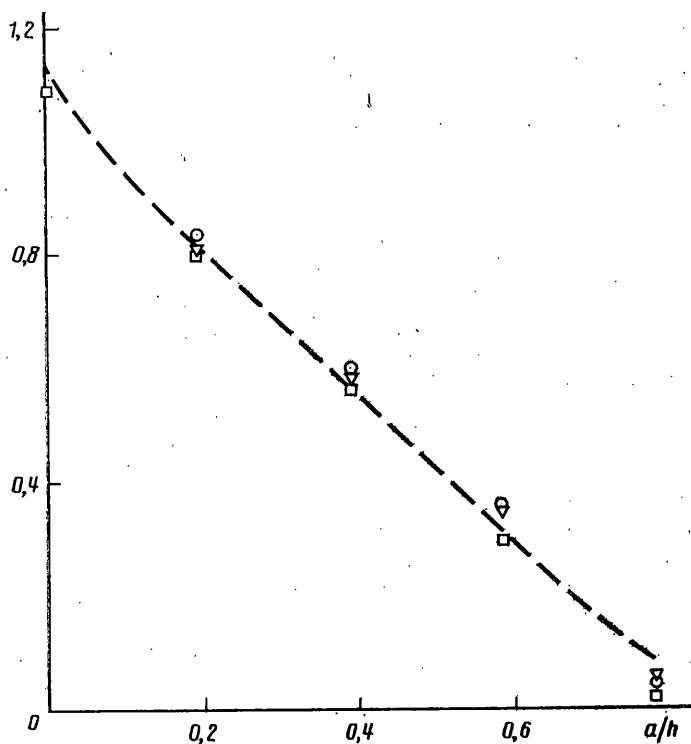
Результаты табл. 1, 2 свидетельствуют о том, что дорогостоящие численные решения [2–6] хорошо согласуются с найденным здесь методом весовых функций. Более близкими к данным [2–6] оказались те значения C_n , полученные на основании изложенного подхода, где для аппроксимации f была использована формула [2].

Воспользуемся полученными результатами для определения величины K_b – коэффициента интенсивности напряжений этой задачи методами конечных элементов [2], полуэллиптической трещины в изгибаемой пластине. В этом случае имеем

$$K_b(\alpha, \beta) = K_0(\pi/2, \alpha, \beta) [1 - 2\beta C_1(\alpha, \beta)]$$

Данная задача, имеющая важное практическое значение, рассматривалась во многих работах, результаты которых были обобщены в [6], что позволило получить наиболее достоверную оценку величин коэффициентов интенсивности напряжений. На фигуре значения $K_b(\alpha=0,5, \beta)$, найденные с помощью изложенного подхода, сопоставлены с численными решениями этой задачи методами конечных элементов [2], массовых сил [3], а также [6]. Полученные данные при $\beta \leq 0,6$ отличаются от результатов [6] до 4%. С увеличением относительной глубины трещины ($\beta > 0,6$) и снижением абсолютного значения коэффициента интенсивности напряжений наблюдается большее отличие результатов.

Чтобы оценить влияние вида функции ψ_n на значения C_n , были проведены расчеты также при $\psi_n(t, \alpha, \beta) = (A_1 + A_2 \sin^n t) / f(t, \alpha, \beta)$ существенно отличающейся от (3.5). При этом отличие результатов от найденных с использованием выражений (2.7)–(2.9), (3.7)–(3.10) не превысило 3%. Таким образом, вид функции ψ_n не ока-



зывает существенного влияния на результаты расчета коэффициентов интенсивности напряжений при неоднородном нагружении берегов трещины.

Функцию ψ_n часто называют поправкой на неоднородность напряженного состояния. Для оценки влияния неоднородности поля напряжений на величины коэффициентов интенсивности напряжений сравнительно широко используется предположение [15] о возможности замены полуэллиптической трещины симметрично нагруженной трещиной эллиптической формы. Эта гипотеза удовлетворительно ($\sim 5\%$) согласуется с корректными результатами, полученными методом весовых функций для полупространства [11]. Однако из (4.1) следует, что поправка на неоднородность напряженного состояния существенно зависит от величины относительной глубины трещины. Таким образом, в отличие от гипотезы [15], имеющей ограниченную применимость, метод весовых функций дает эффективную возможность использовать уникальные трудоемкие решения трехмерных задач линейной механики разрушения для расчета коэффициентов интенсивности напряжений при произвольном неоднородном нагружении берегов трещины, характерном для условий работы реальных элементов конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Raju I. S., Newman J. C., Jr. Stress-intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates // Eng. Fract. Mech. 1979. V. 11. No. 4. P. 817–829.
2. Newman J. C., Jr., Raju I. S. An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack // Eng. Fract. Mech. 1981. V. 15. No. 1/2. P. 185–192.
3. Isida M., Noguchi H., Yoshida T. Tension and bending of finite-thickness plates with a semi-elliptical surface crack // Intern. J. Fract. 1984. V. 26. No. 3. P. 157–188.
4. McCowan J. J., Raymond M. Stress intensity factor solution for internal longitudinal semi-elliptical surface flaws in a cylinder under arbitrary loading // ASTM STP 677. 1979. P. 365–380.
5. Heliot J., Labbens R. C., Pellissier-Tanon A. Semi-elliptical cracks in a cylinder subjected to stress gradients // ASTM STP 677. 1979. P. 351–364.
6. A critical evaluation of numerical solutions to the «Benchmark» surface-flaw problem // Exp. Mech. 1980. V. 20. No. 8. P. 253–264.
7. Hayashi K., Abe H. Stress intensity factors for a semi-elliptical crack in the surface of a semi-infinite solid // Intern. J. Fract. 1980. V. 16. No. 3. P. 275–285.
8. Hartranft R. P., Sih G. C. Alternating method applied to edge and surface crack problems // Mechanics of fracture. V. 1. Methods of Analysis and Solutions of crack problems. Leyden: Nordhoff. 1973. P. 179–238.
9. Mattheck C., Morawietz P., Munz D. Stress intensity factor at the surface and at the deepest point of a semi-elliptical surface crack in plates under stress gradients // Intern. J. Fract. 1983. V. 23. No. 3. P. 201–212.
10. Вайшигок В. А. Влияние несингулярной составляющей поля перемещений на весовые функции и коэффициенты интенсивности напряжений трещины пор-

мального отрыва при неоднородной нагрузке // Проблемы прочности. 1986. № 6. С. 25-28.

11. *Вайншток В. А., Варфоломеев И. В.* Метод расчета коэффициентов интенсивности напряжений для типичных пространственных дефектов // Проблемы прочности. 1986. № 8. С. 18-24.
12. *Rice J. R.* Some remarks on elastic crack-tip fields // Intern. J. Solids and Struct. 1972. V. 8. No. 6. P. 751-758.
13. *Bueckner H. F.* Field singularities and related integral representations // Mechanics of fracture. V. 1. Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Leyden: Noordhoff. 1973. P. 239-314.
14. *Chell G. G.* The stress intensity factors for part through thickness embedded and surface flaws subject to a stress gradient // Eng. Fract. Mech. 1976. V. 8. No. 2. P. 331-340.
15. *Erdogan F.* Stress intensity factors // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1983. V. 50. No. 4b. P. 992-1002.

Киев

Поступила в редакцию
19.V.1986