

УДК 539.375

МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ ХРУПКОГО МАТЕРИАЛА С ТРЕЩИНАМИ ПРИ ОДНООСНОМ НАГРУЖЕНИИ

ГЕРМАНОВИЧ Л. Н., ДЫСКИН А. В.

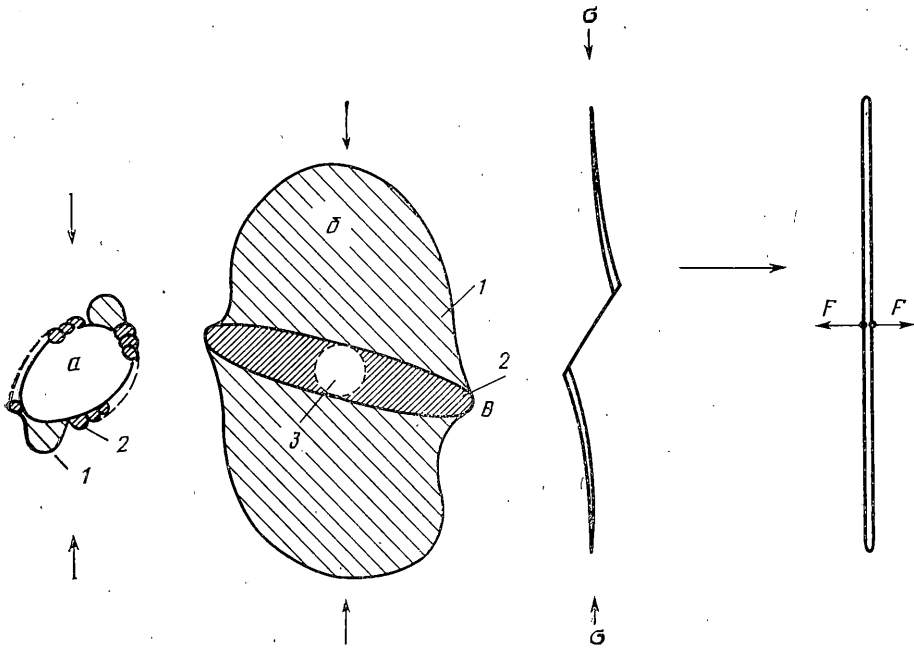
Рассматривается модель разрушения (нарушения целостности) тела из хрупкого материала, содержащего много редко расположенных трещин при сжатии и растяжении в случае, когда временные эффекты несущественны. Для такого материала определяется коэффициент хрупкости (отношение предела прочности на сжатие к пределу прочности на растяжение). При этом для условий сжатия, когда разрушению предшествует значительный этап устойчивого роста трещин, учитывается взаимодействие трещин. Прочность на сжатие согласно проведенному анализу оказывается обратно пропорциональной безразмерной концентрации трещин в степени $1/6$. Теоретические результаты сопоставлены с известными экспериментальными данными, полученными на образцах горных пород.

Применительно к горным породам разработка моделей влияния трещин на их прочность особенно актуальна. Это связано с часто весьма существенной трещиноватостью, присущей и небольшим объемам горных пород, но в еще большей мере важно для прогнозирования прочностных характеристик достаточно больших объемов горных пород, содержащих в значительных концентрациях крупные трещины.

Попытки установить для хрупкого материала, содержащего трещины, связь его прочностных характеристик с характеристиками трещин начались с работ Гриффитса и в течение долгого времени ограничивались в основном тем, что такая связь устанавливалась исходя из предположения о возможности отождествить начало роста отдельной трещины с разрушением образца как целого (обзор некоторых работ в этом направлении см. в [1, 2]). Как отмечалось многими авторами (см., например, [1, 2]), при сжатии такой подход дает заниженные значения предела прочности, поскольку в этом случае разрушению предшествует значительная стадия устойчивого роста трещин. Это означает, что требуется рассмотрение как закономерностей роста отдельной трещины, так и учета роли концентрации трещин и взаимодействия между ними.

Попытка учесть влияние концентрации трещин (дефектов) была предпринята в [3–5]. В [3] с использованием перколяционных соображений было получено следующее выражение для макроскопического предела прочности: $\sigma_c = \Delta\sigma_c \cdot (1,4)^{1/6} (3\pi a^3 N_s / 4)^{-1/6}$, где $\Delta\sigma_c$, как сказано автором [3], «то значение поля дефекта на расстоянии R_c от его центра, которое является разрушающим для данного материала», $N_s a^3$ — концентрация дефектов. Так как в [3] R_c — критический перколяционный радиус, то под $\Delta\sigma_c$, по-видимому, можно понимать микроскопический предел прочности материала между дефектами. В этом случае обращает на себя внимание тот факт, что когда концентрация дефектов меньше 1,16, т. е. среднее расстояние между дефектами превышает их характерный размер a , то, согласно этой формуле, $\sigma_c > \Delta\sigma_c$ и, следовательно, макроскопическая прочность превышает микроскопическую. В [4] рассмотрены закономерности роста трещин, растущих из пор в направлении сжатия. Разрушение такого материала при сжатии связывалось со слиянием этих трещин и предполагалось, что оно происходит тогда, когда длина трещин достигает половины расстояния между порами. В [5] рассматривается материал с периодической системой близкорасположенных трещин и его предел прочности на сжатие, согласно существующим представлениям (см., например, [2, 6]), отождествляется с напряжением, при котором стадия устойчивого роста трещин сменяется вследствие их взаимодействия стадией неустойчивого роста. Отметим, что выбранная в [5] система трещин фактически моделирует образование наклонной макротрещины. При этом искривленные участки траектории трещин моделируются ломаной линией, состоящей из изолированных прямолинейных трещин, расположенных стык в стык, что вносит в скачок смещения (в местах стыка) особенности.

В [7, 8] предпринята попытка рассмотреть разрушение, вызванное ростом и взаимодействием трещин, ответвившихся от начальных трещин [7] и пор [8]. Взаимодействие трещин учитывается следующим образом. Каждая трещина считается находящейся в конечной пластине так, что ближайшие соседние трещины замещаются свободными боковыми границами, влияние которых на рост трещины на стадии ее значительного прорастания происходит, как принято в [7, 8], за счет изгиба балки, находящейся между выросшей трещиной и свободными боковыми границами. Заметим, что поскольку соседние трещины, моделируемые свободными боковыми гра-



Фиг. 1

Фиг. 2

ницами, находятся в точно таких же условиях, как и рассматриваемая, изгиб балок фактически невозможен.

В [9] рассматривается модель разрушения хрупких тел при сжатии, вызванная расклиниванием зерен.

Типичным представителем хрупких трещиноватых материалов являются горные породы. При одноосном однородном сжатии хрупких горных пород в процессе нагружения происходит значительное (в несколько раз [6]) увеличение размеров начальных трещин, в то время как концентрация начальных трещин наибольших размеров, т. е. способных сильно прорасти, достаточно мала. Можно поэтому предположить, что происходящее в этом случае столбчатое (см., например, [1, 6]) разрушение образцов вызывается слиянием сильно выросших трещин, происходящем при напряжениях, соответствующих обусловленному взаимодействием трещин переходу от устойчивого роста к неустойчивому. При этом каждая грань столбиков образована только теми трещинами, которые росли примерно в параллельных плоскостях.

Эти представления о механизме столбчатого разрушения и используются для вычисления предела прочности на сжатие (п. 1). Предел прочности на растяжение (п. 2) можно с достаточной точностью отождествить с напряжением страгивания начальной трещины, перпендикулярной к оси растяжения. В результате отношение предела прочности на сжатие к пределу прочности на растяжение (коэффициент хрупкости) получилось обратно пропорциональным безразмерной концентрации начальных трещин в степени $1/6$ (п. 3). Эта зависимость сопоставлена с данными экспериментов, полученными на образцах хрупких горных пород.

Можно полагать, что рассматриваемые механизмы разрушения характерны также и для других хрупких материалов со сравнительно редко расположенными трещинами.

1. Разрушение при сжатии. Рассмотрим однородное изотропное упругое тело, содержащее в ненагруженном состоянии редко расположенные хаотически ориентированные дискообразные трещины одинакового радиуса a_0 , моделирующие для реальных горных пород группу начальных трещин наибольшего размера, т. е. наиболее сильно прорастающих при нагружении. Предположим, что в процессе нагружения новые трещины не появляются. Примем предложенную в [10] схему развития в хрупком материале при сжатии начальной трещины, плоскость которой наклонена к (ориентированной вертикально) оси сжатия под некоторым углом α .

При сжатии материалов с такой трещиной от участков ее контура, на которых преимущественно действует поперечный сдвиг, ответвляются трещины нормального отрыва. С увеличением нагрузки они устойчиво растут, постепенно ориентируясь вдоль оси сжатия.

Вблизи участков границы, на которых действует также и продольный сдвиг, возникают микротрещины отрыва. С ростом нагрузки их количест-

во и размеры увеличиваются, что вызывает развитие начальной трещины вбок в своей плоскости за счет разрушения материала между микротрещинами (см. фиг. 1, а), а также расширение растущих в направлении сжатия трещин нормального отрыва. В результате на стадии нагружения, приближающейся к разрушению, выросшая трещина приобретает вид типа показанного на фиг. 1, б (1 — участки поверхности, образовавшиеся по механизму нормального отрыва, 2 — участки базовой площадки контакта, образовавшиеся вследствие роста начальной трещины примерно в своей плоскости эффективно по механизму продольного сдвига, 3 — начальная трещина) и растет с увеличением нагрузки устойчиво (см. также [11], где экспериментально изучены начальные стадии роста трещины, и [12], где исследованы продольные осевые сечения образцов песчаника на разных стадиях одноосного сжатия и обнаружено, что с ростом нагрузки следы трещин удлиняются не только в осевом, но и в боковом направлениях, т. е. трещины действительно вытягиваются в направлениях, перпендикулярных оси сжатия). Упрощенное количественное описание роста такой трещины основывается на рассмотрении каждого вертикального сечения в приближении плоской деформации (фиг. 2) и моделировании его прямолинейной трещиной, нагруженной в центре парой сосредоточенных сил, заменяющих действие базовой площадки контакта (см. фиг. 2, а также фиг. 5 в [13]¹). Величина этих сил F приближенно принимается равной горизонтальной проекции силы, стремящейся сдвинуть берега базовой площадки контакта:

$$F = 2\sigma a \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (1.1)$$

где σ — величина сжимающего напряжения ($\sigma > 0$), a — ширина базовой площадки контакта в данном сечении. При этом пренебрегаем влиянием криволинейных участков сечения (см. фиг. 2), а также трением между берегами базовой площадки контакта (заметим, что согласно данным анализа микрошлифов ненагруженных образцов гранита [14] наиболее крупные трещины в основном располагаются между минеральными зернами, коэффициент трения для которых достаточно мал [2]).

Предположим, что разрушение тела, вызванное слиянием сильно выросших трещин, происходит путем разделения его на вертикальные столбики [1, 2, 6]. Тогда каждая грань столбиков будет образовываться трещинами, растущими примерно в одной плоскости. Это позволяет рассматривать их слияние в приближении плоской деформации.

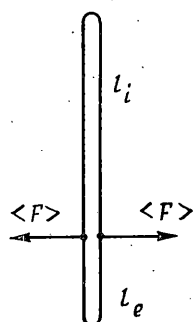
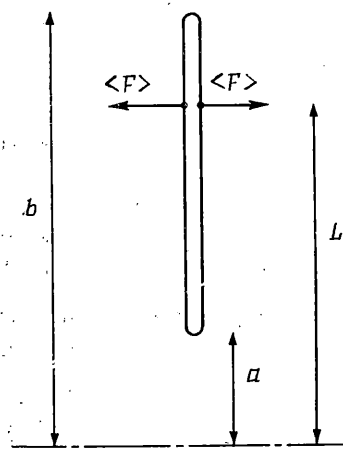
Характерным этапом разрушения такого типа является акт слияния двух соседних выросших трещин. Согласно сказанному, будем моделировать их в приближении плоской деформации двумя расположенными на одной прямой трещинами, каждая из которых нагружена парой сосредоточенных сил (фиг. 3; сосредоточенные силы расположены не в центрах трещин, поскольку вследствие взаимодействия внешние и внутренние концы трещин растут неодинаково).

Величину сосредоточенных сил примем для обеих трещин одинаковой, предполагая, что она равна силе, усредненной по всевозможным ориентациям начальных трещин, и относится к центральному сечению выросших трещин. Полагая, что все ориентации равновероятны, на основании (1.1) получим, что величина этих сил равна

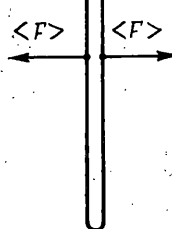
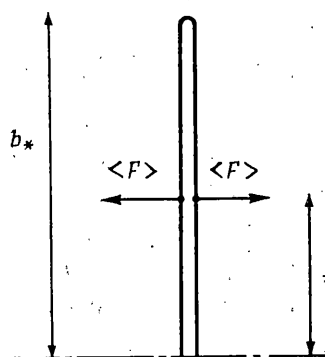
$$\langle F \rangle = \frac{1}{3} a_0 \sigma / \pi \quad (1.2)$$

Расстояние между точками приложения этих сил $2L$ будем считать равным среднему расстоянию между центрами начальных трещин. Влия-

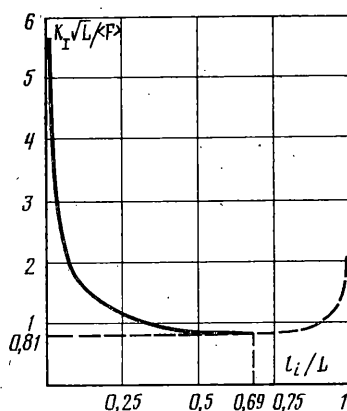
¹ См.: Дыскин А. В. Эффективные деформационные характеристики и условия разрушения твердых тел с системой ориентированных трещин: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Ин-т проблем механики АН СССР. 1986. 26 с. Когда статья была уже отдана в печать, авторам стала известна работа Хории и Немат-Нассера (Horie H., Nemat-Nasser S. Brittle failure in compression: splitting, faulting and brittle-ductile transition // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1986. A319. P. 337–374), в которой рассмотрена аналогичная модель трещины, но без учета того факта, что в вершине растущей трещины коэффициент интенсивности напряжений поперечного сдвига равен нулю.



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

нием окружающих трещин будем пренебрегать. Таким образом, рассматриваются парные, в указанном смысле, взаимодействия «средних» трещин.

Длину трещин (на стадии устойчивого роста) будем определять из условия, что их концы находятся в состоянии предельного равновесия, т. е. коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва достигает некоторого предельного значения, равного $K(2/\pi)^{1/2}$, где K — модуль сцепления [15], характеризующий трещиностойкость материала по отношению к нормальному отрыву в масштабе микротрещин.

В [15, 16] показано, что устойчивый рост трещин, изображенных на фиг. 3, происходит до тех пор, пока величина сосредоточенных сил $\langle F \rangle$

не достигнет критического значения, равного

$$F_c = 0,98KL^{1/2} \quad (1.3)$$

где $2L$ — расстояние между точками приложения сосредоточенных сил (т. е. между центрами начальных трещин). При этом длины внутренних и внешних концов трещин соответственно равны: $l_i = L - a \approx 0,7L$, $l_e = b - L \approx 0,6L$, т. е. длины трещин составляют $1,3L$.

При $\langle F \rangle = F_c$ рост трещин становится неустойчивым: малое удлинение концов трещин при неизменном $\langle F \rangle$ вызывает увеличение коэффициентов интенсивности напряжений $K_I^{(i)}$ для внутренних концов. Для того чтобы условие $\langle F \rangle = F_c$ можно было принять в качестве условия слияния трещин, необходимо показать, что и дальнейшее удлинение не уменьшает достигнутого значения $K_I^{(i)}$.

Это можно сделать следующим образом. Согласно [15–17], выражения для статических коэффициентов интенсивности напряжений у внутренних ($K_I^{(i)}$) и внешних ($K_I^{(e)}$) концов трещин (с учетом принятых здесь обозначений и после исправления некоторых неточностей) имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I^{(i)} \\ K_I^{(e)} \end{array} \right\} = \frac{2\langle F \rangle}{\sqrt{\pi b(b^2 - a^2)}} \left[\left(\frac{b^2 - L^2}{L^2 - a^2} \right)^{\pm 1/2} \mp \frac{b \sqrt{(b^2 - L^2)(L^2 - a^2)}}{K(k)} \times \right. \\ \left. \times \int_a^b \frac{dx}{(L+x) \sqrt{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}} \right] \quad (1.4)$$

где $2b$ — расстояние между внешними концами трещин, $2a$ — расстояние между их внутренними концами, $k^2 = 1 - a^2/b^2$, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Покажем, что удлинение только внешних концов (увеличение b) при неизменных величинах a и $\langle F \rangle$ приводит к увеличению $K_I^{(i)}$. Для этого достаточно показать, что убывает функция $\psi(b) = I(b)/I_0(b)$, где

$$I_0(b) = \frac{1}{b} K(k), \quad I(b) = \frac{1}{b} \int_a^b \frac{dx}{(L+x) \sqrt{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}} \quad (1.5)$$

т. е. для любых $b_1 > b$ имеет место неравенство $I(b)I_0(b_1) - I(b_1)I_0(b) > 0$. В этом можно убедиться, проведя в интегралах (1.5) замену переменной $x = b(1 - k^2 y^2)^{1/2}$ и записав произведение двух однократных интегралов в виде двукратного интеграла.

Зависимость $K_I^{(i)}$ от длины внутреннего конца ($l_i = L - a$) до значений $l_i = 0,99L$ при фиксированной длине внешнего конца, соответствующей началу неустойчивого роста трещин ($l_e \approx 0,6L$ [13]), показана на фиг. 4 штриховой линией. Интеграл (1.4) вычислялся численно. Сплошная линия на фиг. 4 иллюстрирует зависимость $K_I^{(i)}$ от l_i , соответствующую устойчивому росту трещин ($l_i < 0,7L$), и получена путем решения уравнения $K_I^{(e)} = K_I^{(i)}$.

Таким образом, на основании проведенного анализа можно полагать, что при $\langle F \rangle = F_c$ произойдет слияние соседних трещин. После слияния получается трещина, которую можно приближенно представить прямой линией трещиной, нагруженной двумя парами сосредоточенных сил величины $\langle F \rangle$ (фиг. 5). Полагая, что ее концы должны находиться в состоянии предельного равновесия, используем приведенное в [16] соотношение, связывающее ее длину ($2b_*$) с величиной сосредоточенных сил:

$$K^{-1}L^{-1/2}\langle F \rangle = \{1/2[(b_*/L)^2 - 1]L/b_*\}^{1/2} \quad (1.6)$$

Отсюда, учитывая (1.3), имеем $b_* = 2,36L$. Видно, что две трещины после слияния дополнительно подрастают до длины, в 2,36 раз большей среднего расстояния между ними. Это позволяет предполагать, что их слияние приводит к подсоединению к ним новых трещин, что означает, согласно принятой трактовке, разрушение образца.

Из (1.3), учитывая (1.2), находим, что предел прочности на сжатие равен $\sigma_c = 2,31KL^{1/2}/a_0$.

Отметим, что в рассматриваемой модели средняя длина трещин непосредственно перед слиянием (разрушением) равна $1,3L$, т. е. отношение расстояния между выросшими трещинами к их длине оказывается примерно равным 1,5. Это в два раза меньше значения, получающегося на основе концентрационного критерия [18].

Для оценки величины L разобьем все начальные трещины на группы, в каждую из которых попадают трещины, растущие примерно в параллельных плоскостях. Введем безразмерную концентрацию всех начальных трещин $v_0 = Na_0^{-3}$, где N — количество трещин в единице объема. Тогда концентрация трещин в каждой группе равна $v_1 \approx v_0/m$, где m — количество групп². Учитывая, что количество трещин каждой группы, приходящееся на единицу объема, $N/m \approx (2L)^{-3}$, имеем $2L/a_0 \approx v_1^{-1/3}$, откуда и из (1.6):

$$\sigma_c = 2,31K(2a_0)^{-1/3}v_1^{-1/6}. \quad (1.7)$$

Поскольку в выражение (1.7) концентрация начальных трещин входит в степени $1/6$, в первом приближении можно положить $v_1 = v_0$. Для более точного определения σ_c необходимо знать величину m . Оценка для нее будет дана ниже при сопоставлении модели с экспериментальными данными.

Заметим, что вместо учета парных взаимодействий нетрудно рассмотреть другую, в некотором смысле крайний, случай — бесконечную цепочку параллельных взаимодействующих трещин, образующих после слияния одну грань длинного столбика. На основании [17] получим $\sigma_c = 1,88a_0^{-1}KL^{1/2}$. Это на 20% меньше, чем при учете только парных взаимодействий (см. (1.6)).

2. Предел прочности на растяжение. Рассмотрим материал с редко расположенными дискообразными трещинами одинакового радиуса a_0 , подверженный одноосному, однородному растяжению. Предположим сначала, что найдется трещина, плоскость которой перпендикулярна к оси растяжения (рассматривается группа наиболее крупных трещин, размеры которых считаем примерно одинаковыми). Тогда в качестве разрушающего можно принять напряжение начала страгивания этой трещины, поскольку ее рост в однородном материале будет неустойчивым. При этом возможностью ее торможения вследствие пересечения с какой-либо другой трещиной (ситуация типа T -образной), а также взаимодействием между трещинами пренебрегаем, поскольку трещины расположены редко.

Предполагая по-прежнему, что условием начала роста трещины является условие $K_I = K(2/\pi)^{1/2}$, и используя решение задачи о дискообразной трещине (см., например, [17]), получим выражение для предела прочности на растяжение:

$$\sigma_t = (2a_0)^{-1/2}K \quad (2.1)$$

Однако в теле конечных размеров (образце) может не найтись начальная трещина, примерно перпендикулярная к оси растяжения. В этом случае предел прочности будет превышать (2.1). Поскольку с увеличением размеров образца вероятность появления такой трещины растет, естественно ожидать, что среднее (по ансамблю образцов) значение предела прочности будет приближаться к σ_t .

Оценим, насколько среднее значение предела прочности $\sigma_t^{(n)}$ в образцах, содержащих n трещин, будет отличаться от σ_t . Введем в рассмотрение случайную величину σ_1 — прочность элемента, содержащего одну случайно выбранную трещину. Очевидно, что $\sigma_1 \geq \sigma_t$. Если $F_1(x)$ — функция распределения σ_1 , то функция распределения прочности образцов, содержащих n трещин, имеет вид [20] $F_n(x) = 1 - [1 - F_1(x)]^n$. Естественно считать, что случайная величина σ_1 имеет математическое ожидание. Тогда среднее

² Разбиение трещин на аналогичные группы использовалось также в [19], где было принято $m=2$.

значение предела прочности образца, содержащего n трещин, равно

$$\langle \sigma \rangle_n = \int_{\sigma_i}^{\infty} x dF_n(x) = \sigma_i + \int_{\sigma_i}^{\infty} [1 - F_1(x)]^n dx \quad (2.2)$$

Отсюда видно, что $\langle \sigma_n \rangle \rightarrow \sigma_i$ при $n \rightarrow \infty$.

Получим оценку сверху для величины $\Delta \sigma_n = \langle \sigma_n \rangle - \sigma_i$. Предел прочности элемента, содержащего одну трещину σ_i , зависит от угла α наклона ее плоскости к оси растяжения. Предположим, что величина σ_i при любой ориентации трещины примерно равна напряжению начала ее роста. Для трещин, плоскости которых почти параллельны оси растяжения, будут при этом получаться завышенные значения предела прочности, поскольку такие трещины не должны влиять на прочность элемента. Реально в этом случае она определяется разрушением на меньшем масштабном уровне. Еще более высокие значения σ_i получатся, если предположить, что трещина может расти только от тех участков контура, на которых действует чисто поперечный сдвиг, а возможностью роста вследствие продольного сдвига пренебречь. На этих участках контура коэффициенты интенсивности напряжений нормального отрыва (K_I) и поперечного сдвига (K_{II}) имеют вид [17]: $K_I = 2\sigma(a_0/\pi)^{1/2} \sin^2 \alpha$, $K_{II} = 2\sigma(a_0/\pi)^{1/2} \sin \alpha \cos \alpha$. Естественно считать (см., например, [21]), что такие трещины будут расти по площадкам нормального отрыва (на которых отсутствует сдвиг) и критерием начала их роста является критерий обобщенного нормального отрыва [17]. Легко, однако, показать, что если воспользоваться более простым энергетическим критерием [17] (непосредственно в данном случае неприемлемым вследствие излома трещины в момент страгивания), то можно получить только завышенные значения для напряжения начала роста трещины σ_i . В соответствии с этим имеем $(2a_0)^{1/2} K^{-1} \sigma_i = (\sin \alpha)^{-1}$. В случае материала с хаотически ориентированными трещинами угол α равномерно распределен на отрезке $[0, \pi/2]$, поэтому $F_1(x) = 1 - (2/\pi) \arcsin(\sigma_i/x)$. Отсюда и из (2.2) после интегрирования по частям получаем для $n \geq 2$:

$$\frac{\Delta \sigma_n}{\sigma_i} \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[1 + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{t^{n+2} [5 + \cos^2(\pi t/2)] \cos(\pi t/2)}{\sin^4(\pi t/2)} dt \right] \quad (2.3)$$

Интеграл в (2.3) элементарно оценивается сверху, в результате имеем

$$\Delta \sigma_n / \sigma_i \leq 4,25 / [(n+1)(n+2)] \quad (2.4)$$

Таким образом, с увеличением числа трещин в образце $\langle \sigma_n \rangle$ стремится к предельному значению σ_i , даваемому выражением (2.1), не медленнее n^{-2} .

В частности, в [10] из обработки опытов по дилатансии для гранита Westerly получено, что концентрация группы начальных трещин наибольшего размера равна $Na_0^3 \sim 10^{-4}$. Согласно данным работ [14, 22], наибольшая длина начальных трещин составляет 0,5 мм. Поскольку рабочая часть образцов, использованных в [23] для определения предела прочности гранита на растяжение, имела объем свыше 3 см³, в ней должно было содержаться свыше 18 начальных трещин этой группы. Поэтому, согласно (2.4), $\Delta \sigma_n / \sigma_i \leq 0,011$, т. е. оценка предела прочности по формуле (2.1) имеет в рассматриваемом случае погрешность, не превышающую $\approx 1\%$.

3. Коэффициент хрупкости. Сопоставление с экспериментальными данными. Из соотношений (1.7) и (2.1) с учетом того, что $v_1 = v_0/m$, находим связь между пределами прочности на одноосное сжатие и растяжение:

$$\sigma_c = 2,31 (v_0/m)^{-1/6} \sigma_t \quad (3.1)$$

Отсюда коэффициент хрупкости $\chi = \sigma_c / \sigma_t = 2,31 \cdot v_1^{-1/6}$.

Таким образом, в рассматриваемом случае коэффициент хрупкости зависит только от концентрации начальных трещин, точнее тех начальных трещин, которые растут примерно в параллельных плоскостях, причем эта зависимость довольно слабая.

Оценим возможные границы изменения χ , даваемые рассматриваемой моделью. Основным является предположение о том, что начальные трещины (моделирующие для горных пород группу трещин наибольшего размера) расположены редко, так что до начала слияния они успевают значительно прорасти. Полагая, что при этом их размеры должны увеличиться (для того, чтобы можно было использовать модель трещины, изображенную на фиг. 2) по крайней мере в несколько раз, и учитывая, что влияние двух трещин начинается, когда их длины составляют 0,69 от расстояния между трещинами (см. п. 1), имеем верхнюю границу для ν_1 порядка 10^{-3} (что соответствует расстоянию между начальными трещинами примерно на порядок превышающему их размеры), откуда нижняя граница для коэффициента хрупкости χ равна приблизительно семи.

Верхняя граница для χ определяется некоторой минимальной концентрацией трещин, при которой они еще оказывают влияние на разрушение. Согласно данным [1], верхняя граница для χ порядка 10^2 , откуда нижняя граница для концентрации начальных трещин порядка 10^{-10} , т. е. расстояние между ними на три порядка превосходит их размеры. По-видимому, при столь малой их концентрации основную роль начинают играть другие эффекты, в частности развитие трещин меньших размеров.

Сопоставим расчеты по рассмотренной в данной работе модели с экспериментальными данными о прочности горных пород, взятыми из работ [23–26], относящимися к тем образцам, для которых в работе [10] на основании обработки экспериментальных зависимостей дилатансии (неупругого увеличения объема) от сжимающего напряжения найдены значения концентрации ν_0 наиболее крупных начальных трещин, дающих основной вклад в дилатансию.

Согласно [23–26], форма и соотношения размеров образцов выбирались такими, чтобы в их центральной части действовало примерно одноосное однородное нагружение. Это обстоятельство, а также малость концентраций начальных трещин наибольших размеров (расстояние между трещинами примерно на порядок превышало их размеры) позволяют предположить, что в этих экспериментах имел место рассмотренный механизм разрушения. Конечно, поскольку в условиях одноосного одноосного напряженного состояния находились только центральные части образцов, полное разрушение могло не быть столбчатым.

Ниже приведены значения пределов прочности на растяжение и сжатие σ_t^* и σ_c^* , наблюдавшиеся в экспериментах, обработанных в [10], значения концентрации ν_0 , теоретические значения σ_c , вычисленные по формуле (3.1) для приведенных данных о ν_0 и σ_t^* . Значение m в (3.1) выбиралось из наилучшего согласования эксперимента с теорией.

	σ_t^* , МПа	σ_c^* , МПа	$\nu_0 \cdot 10^4$	σ_c , МПа	δ , %
Песчаник П-0	21	235	3,6	245	4,3
Песчаник П-01	20	232	4	231	-0,6
Песчаник П-03	25	281	5	276	-1,7
Кварцевый диорит Д-2	19	239	2,6	234	-2
Каменная соль	2,4	33	8	24,5	-25,8
Гранит Westerly	21	228	6	225	-1,3
Гранит Westerly	21	281	1,1	299	6,3

Оказалось, что значение $m=6$ дает незначительные относительные погрешности $\delta = (\sigma_c - \sigma_c^*) / \sigma_c^*$ для всех пород, кроме каменной соли. Можно полагать, что для каменной соли важную роль играли пластические эффекты.

Следует отметить, что неучет трения между берегами начальных трещин фактически приводит к завышению значения m . К аналогичному эффекту приводит неучет влияния торцов. Трение на торцах или закрепление их в обоймах должно приводить к возникновению в торцевых

зонах образцов радиальных сжимающих напряжений, которые могут повысить устойчивость образцов, так что возникновение столбиков в центральной части еще не приведет к разрушению всего образца.

Проведенное рассмотрение относится к случаю одноосного сжатия, когда разрушение вызывается слиянием трещин, значительно выросших в направлении сжатия. Можно было бы ожидать, что аналогичный характер роста трещин имеет место и при трехосном осесимметричном сжатии, при котором осевое напряжение значительно превышает боковое. В [1] отмечено, что боковое сжатие сильно затрудняет рост трещин в осевом направлении, однако он все же происходит. Поэтому необходимо более подробно исследовать применимость изложенных выше представлений к этому случаю.

Пусть σ , p — величины осевого и бокового сжимающих напряжений ($\sigma \gg p > 0$). Рассмотрим вначале случай пропорционального нагружения, когда $p = c\sigma$, где c — некоторая константа (результаты экспериментов с таким нагружением представлены в [24]). Коэффициент интенсивности напряжений для прямолинейной трещины, находящейся в поле сжимающих напряжений величины p , нагруженной в центре парой растягивающих сосредоточенных сил F , равен [17] $K_I = F(\pi l)^{-1/2} - p(\pi l)^{1/2}$, где $2l$ — длина трещины. Предполагая, что концы трещины находятся в условиях предельного равновесия ($K_I = K(2/\pi)^{1/2}$), и учитывая зависимость F от σ (формула (1.1); влиянием бокового давления p на величину F пренебрегаем, поскольку $p \ll \sigma$), имеем

$$l^{1/2} = [-K\sqrt{2} + (2K^2 + 4\pi\kappa a_0 p \sigma)^{1/2}] (2\pi p)^{-1} \quad (3.2)$$

где a_0 — радиус начальной трещины, $\kappa = 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha$, α — угол наклона плоскости начальной трещины к оси наибольшего сжатия.

Отсюда с учетом того что $p = c\sigma$, предельная (при $\sigma \rightarrow \infty$) длина выросшей трещины равна $l_{\max} = \kappa a_0 / (\pi c)$. Наибольшее значение κ равно $4/3$; наименьшее из использованных в экспериментах [24] значение c равно 0,069, поэтому $l_{\max}/a_0 \leq 3,55$.

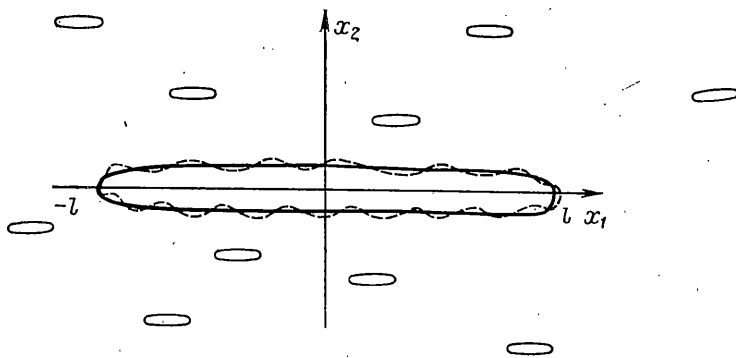
Рассмотрим теперь нагружение с фиксированным боковым давлением ($p = \text{const}$). Наибольшую длину выросшей трещины, соответствующую величине осевого напряжения, равной разрушающей σ_c , найдем из (3.2), подставляя туда выражение для модуля сцепления K через предел прочности на растяжение σ_t (формула (2.1)). Имеем

$$l_{\max}/a_0 = \{[\sigma_t^2 + 4\pi p \sigma_c / 3^{1/2}]^{1/2} - \sigma_t\}^2 / (\pi^2 p^2)$$

В частности, для гранита Westerly ($\sigma_c = 630$ МПа, $p = 50$ МПа [21], $\sigma_t = 21$ МПа [25]) имеем $l_{\max}/a_0 \leq 2,7$.

Таким образом, даже небольшое боковое давление столь сильно затрудняет рост трещин, что в рассмотренных случаях (если по-прежнему учитывать только группу начальных трещин наибольшего размера, расстояние между которыми на порядок превышает их размер), они не могут вырасти настолько, чтобы началось взаимодействие между ними. Это означает, что при неодносном сжатии (поскольку разрушающее напряжение в несколько раз выше, чем при одноосном) растут также и остальные начальные трещины, поэтому общее количество растущих трещин становится достаточно большим (заметим, что согласно данным [22] расстояние между начальными трещинами в сечении ненагруженного образца превышает их средний размер менее, чем в два раза). Это согласуется также с результатами анализа³ скоростей распространения упругих волн в нагружаемых образцах различных горных пород, показавшего, что в случае однородного одноосного сжатия в образце перед разрушением образцуется небольшое число длинных трещин, а в случае, когда на образец наряду с осевым действуют также радиальные сжимающие напряжения, в нем образуется большое количество сравнительно

³ Езерский М. Г. Поведение сейсмоакустических параметров при подготовке макроразрушения в образцах и массивах горных пород: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Ин-т физики Земли АН СССР. 1985. 24 с.



Фиг. 6

коротких трещин. Указанное различие в характере роста трещин наблюдалось также при нагружении пластин со сквозными трещинами [27].

Рассмотренную схему можно распространить на материалы со сквозными трещинами (эксперименты на пластинах с несколькими сквозными трещинами см. в [27, 28]). В результате получим, что

$$\sigma_c = 2,31 K \Omega_0^{-1/4} / \sqrt{2a_0}, \quad \chi = \sigma_c / \sigma_i = 5,13 \Omega_0^{-1/4} \quad (3.3)$$

где $\Omega_0 = 4Ma_0^2$ — двумерная концентрация начальных трещин, M — количество трещин в единице площади, $2a_0$ — длина начальных трещин.

4. Выше рассматривался в некотором смысле крайний случай столбчатого разрушения, инициируемого слиянием пары трещин, происходящим вследствие взаимодействия, без учета влияния окружающих трещин. В качестве другого крайнего случая можно рассмотреть случай значительного прорастания одной или нескольких далеко отстоящих друг от друга трещин (без слияния), вызванного их взаимодействием с окружающими менее проросшими трещинами. Рассмотрим этот случай в приближении плоской деформации.

Пусть имеется плоскость с растущими трещинами, одноосно сжимаемая на бесконечности. Поскольку в реальном теле начальные трещины, вообще говоря, не совсем одинаковы по размерам и по-разному наклонены к оси сжатия, то выросшие из них трещины будут иметь разные длины, причем ниже будет показано, что взаимодействие только усилит это различие. В рамках рассматриваемого крайнего случая считаем, что выросшие трещины близких размеров находятся далеко друг от друга и практически не взаимодействуют, а основной эффект дает взаимодействие между трещинами сильно различающихся размеров, т. е. предполагаем, что по крайней мере при нагрузках, близких к разрушающей, имеет место широкое распределение выросших трещин по размерам [29, 30]. Соответственно взаимодействие трещин будем учитывать предложенным в [29] методом самосогласования, считая большую трещину находящейся в эффективной (сплошной) среде с модулями упругости, определяемыми малыми трещинами.

Введение эффективной среды соответствует усреднению полей напряжений и деформаций по элементу объема (в рассматриваемом случае — площади), содержащему много малых трещин. Такой подход допустим для определения раскрытия больших трещин, усредненного по всевозможным расположениям малых (см. фиг. 6, где пунктиром показано возможное положение берегов большой трещины при некоторой конкретной реализации расположения малых трещин, а сплошной линией — среднее положение этих берегов). Однако для моделирования роста трещин необходимо знать коэффициенты интенсивности напряжений, описывающие напряженное состояние в концевой области, которая в рассматриваемом случае малых растущих трещин не содержит (и вообще является маленькой по сравнению даже с малыми трещинами), поскольку все растущие

трещины образовались вследствие значительного прорастания далеко отстоящих друг от друга начальных трещин. Таким образом, в концевых областях и вообще в непосредственной близости от берегов большой трещины (в малом масштабе) нельзя вводить эффективную среду. Поэтому при определении коэффициентов интенсивности следует считать, что большая трещина находится в материале с исходными модулями упругости и с заданным раскрытием, определяемым, как отмечено выше, методом самосогласования.

Начнем с вычисления скачка смещения (раскрытия) на большой трещине. Поскольку все малые трещины параллельны, эффективная среда будет ортотропной. Для трещины в ортотропной среде в системе координат x_1, x_2 , связанной с центром трещины (ось x_1 направлена вдоль трещины; см. фиг. 6), и такой, что оси x_1, x_2 совпадают с осями симметрии среды, имеем, согласно [31], следующие выражения для поля смещений:

$$u_1 = 2 \operatorname{Re} [p_1 \varphi(z_1) + p_2 \psi(z_2)], \quad u_2 = 2 \operatorname{Re} [q_1 \varphi(z_1) + q_2 \psi(z_2)]$$

$$\begin{aligned} \frac{s_2 - s_1}{s_2} \varphi'(z_1) &= \frac{1}{2\pi i \sqrt{z_1^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{t^2 - l^2} p(t)}{t - z_1} dt \\ \frac{s_1 - s_2}{s_1} \psi'(z_2) &= \frac{1}{2\pi i \sqrt{z_2^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{t^2 - l^2} p(t)}{t - z_2} dt \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$z_i = x_1 + s_i y_1, \quad p_i = a_{11} s_i^2 + a_{12}, \quad q_i = (a_{12} s_i^2 + a_{22}) / s_i \quad (i=1,2)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{66}$ — упругие податливости ортотропного тела, s_1, s_2 — корни (с положительными мнимыми частями) характеристического уравнения $a_{11} s^4 + (2a_{12} + a_{66}) s^2 + a_{22} = 0$, знаком плюс обозначено значение корня на верхнем берегу разреза (трещины). Из (4.1), используя то, что на линии трещины $z_1 = z_2 = x_1$, получаем следующее представление для нормальной компоненты скачка смещения ($\Delta u_2 = u_2^+ - u_2^-$):

$$\Delta u_2(x_1) = (B/B_0) \Delta u_2^0(x_1) \quad (4.2)$$

где $B = 2a_{22}^{1/2} [2(a_{11}a_{22})^{1/2} + 2a_{12} + a_{66}]^{1/2}$, B_0 получается из B заменой податливостей $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{66}$ податливостями изотропного тела, равными в случае плоской деформации $a_{11}^0 = a_{22}^0 = E_0^{-1}$, $a_{12}^0 = -\nu_0 E_0^{-1}$, $a_{66}^0 = 2(1 + \nu_0) E_0^{-1}$, ν_0, E_0 — коэффициент Пуассона и модуль Юнга, Δu_2^0 — скачок смещения, который возник бы на рассматриваемой трещине, если бы она находилась в этой изотропной среде и была нагружена теми же усилиями $p(x_1)$. Поскольку $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{66}$ на самом деле являются эффективными податливостями тела с малыми параллельными трещинами, (4.2) фактически дает среднее смещение берегов большой трещины, обусловленное взаимодействием с малыми. После этого, рассматривая большую трещину в исходной изотропной среде с найденным смещением берегов, можно вычислить коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва, который будет иметь вид $K_I = (B/B_0) K_I^0$, где K_I^0 — коэффициент интенсивности напряжений для рассматриваемой трещины без учета ее взаимодействия с малыми трещинами. Учитывая зависимость $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{66}$ от концентрации малых трещин [30], окончательно получаем⁴

$$K_I = K_I^0 (1 + 1/8 \pi \Omega)^3 \quad (4.3)$$

где $\Omega = 4M \langle l^2 \rangle$ — концентрация малых трещин, M — число трещин в единице площади, $\langle l^2 \rangle$ — средний квадрат полудлины малой трещины.

Сделаем относительно (4.3) два замечания.

Во-первых, в методе самосогласования рассматриваются однородно нагруженные трещины, тогда как в рассматриваемом случае трещины

⁴ См. также: Дыскин А. В. Эффективные деформационные характеристики и условия разрушения твердых тел с системой ориентированных трещин: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Ин-т проблем механики АН СССР. 1985. 194 с.

нагружены сосредоточенными силами. Однако влияние малых трещин на большую состоит из двух частей. Первая часть есть напряжение в сплошном материале на месте большой трещины от всех малых трещин вследствие их нагружения сосредоточенными силами; можно показать⁵, что эти напряжения после усреднения по всевозможным расположениям малых трещин обращаются в нуль. Вторая часть есть дополнительные напряжения, вносимые малыми трещинами на место большой вследствие того, что они сами находятся в поле напряжений большой трещины, однородном в силу большого различия размеров. Эта вторая часть фактически и учитывается методом самосогласования, как это и сделано выше.

Во-вторых, с точностью до линейных по концентрации членов (4.3) имеет вид $K_I = K_I^0 (1 + 3\pi\Omega/8)$, что совпадает с соответствующим результатом, полученным в [30] для однородно нагруженных трещин путем явного учета парных (в смысле [32]) взаимодействий между трещинами разных размеров.

Перейдем к рассмотрению роста взаимодействующих трещин при сжатии. Пусть $f_\sigma(l)$ — функция распределения выросших трещин по длинам, имеющая место при достигнутом уровне сжимающих напряжений σ :

$$\int_{l_0}^{l_{\max}} f_\sigma(l) dl = 1 \quad (4.4)$$

где l_0 , $l_{\max}$ — наименьшая и наибольшая полудлины трещин. Будем считать, что каждая растущая трещина представляется разрезом, берега которого нагружены в центре сосредоточенными силами $\langle F \rangle$, усредненными по всевозможным ориентациям начальных трещин и равными (1.2). Отметим, что в отличие от модели п. 1 здесь сосредоточенные силы естественно считать приложенными в центре трещины, поскольку окружающие ее малые трещины распределены достаточно равномерно и должны одинаково влиять на рост обоих концов большой трещины. (Кроме того, как показано в п. 1, для самого сильного случая взаимодействия пары трещин отличие длин концов в момент начала неустойчивого роста не превышает 17%).

При рассмотрении каждой трещины будем считать, что она находится в эффективной среде, образованной меньшими трещинами, а взаимодействием ее с большими трещинами будем пренебрегать, поскольку действующее на нее дополнительное поле напряжений от большой трещины после усреднения по всевозможным расположениям выделенной трещины обратится в нуль в силу условий равновесия материала вокруг большой трещины, и, следовательно, средний коэффициент интенсивности напряжений рассматриваемой трещины будет таким же, как если бы большой трещины не было. Конечно, с точки зрения роста трещины не безразличен знак указанных дополнительных напряжений: трещины, находящиеся в областях дополнительных растягивающих напряжений от большой трещины, растут сильнее, чем трещины, находящиеся в областях дополнительных сжимающих напряжений. Это значит, что при рассмотрении трещины в эффективной среде, образованной растущими трещинами меньших размеров, необходимо, вообще говоря, считаться с тем, что вокруг нее образуются зоны с малыми трещинами разных длин, т. е. с разными эффективными податливостями. Однако ввиду симметрии поля дополнительных напряжений вокруг трещины соответствующие зоны разной податливости также будут расположены симметрично, поэтому всех их в первом приближении будем заменять однородной средой с некоторой средней податливостью, определяемой длинами малых трещин, вычисленной из среднего коэффициента интенсивности напряжений в их концах, т. е. без учета влияния на них большой трещины.

Отметим, что в случае неоднородного сжатия несильное прорастание трещин (п. 3) приводит к тому, что указанные зоны разной податли-

⁵ См. сноску на с. 128.

вости будут расположены несимметрично относительно линии трещины, и потому описанная схема учета взаимодействий может оказаться неприемлемой. Более того, возможно, это обстоятельство и является причиной разрушения сколом при двухосном сжатии.

Исходя из сказанного считаем, что трещины самых маленьких размеров (длины $2l_0$) вообще ни с кем не взаимодействуют и их длина определяется соотношением, описывающим рост трещины под действием сосредоточенных сил $\langle F \rangle$ [10]:

$$l_0 = \frac{1}{2} \langle F \rangle^2 / K^2 \quad (4.5)$$

Для полудлины $l > l_0$ коэффициент интенсивности напряжений, согласно (4.3), равен $K_I = \langle F \rangle (\pi l)^{-1/2} [1 + \pi \Omega(l)/8]^2$, где $\Omega(l)$ — суммарная концентрация трещин размера меньше чем l :

$$\Omega(l) = 4M \int_{l_0}^l l^2 f_\sigma(l) dl \quad (4.6)$$

Приравнявая K_I предельному значению $K\sqrt{2/\pi}$, находим с учетом (4.5)

$$l = l_0 [1 + \pi \Omega(l)/8]^6 \quad (4.7)$$

Выражая из (4.7) $\Omega(l)$, подставляя ее в (4.6) и дифференцируя получившееся тождество по l , получаем

$$f_\sigma(l) = l_0^{-1/6} l^{-11/6} (3\pi M)^{-1} \quad (4.8)$$

Подставляя (4.8) в (4.4), находим зависимость максимальной длины трещины от сжимающих напряжений:

$$l_{\max}(\sigma) = l_0(\sigma) [1 - \frac{11}{2} \pi M l_0^2(\sigma)]^{-6/11} \quad (4.9)$$

где зависимость $l_0(\sigma)$ определяется соотношениями (4.5), (1.2).

Из (4.9) и (4.5) следует, что отношение $l_{\max}/l_0$ монотонно растет с ростом нагрузки. Это означает, что имевшее место различие размеров выросших трещин на начальном этапе нагружения (когда трещины практически не взаимодействовали) может вследствие взаимодействия только лишь усилиться. В этом смысле модель корректна.

Из (4.9) следует также, что при некотором σ выражение в квадратных скобках обращается в нуль, и следовательно, наибольшая длина выросшей трещины становится бесконечной. Это напряжение в рассматриваемом случае естественно принять за разрушающее напряжение σ_c . Используя (2.1), имеем

$$\sigma_c = 5,134 \sigma_0 \Omega_0^{-1/4} \quad (4.10)$$

где $\Omega_0 = 4Ma_0^2$ — концентрация начальных трещин.

Отметим, что выражения (4.10) и (3.3), полученные разными способами, отличаются незначительно. Ввиду того что указанные выражения описывают разные механизмы разрушения, заметим следующее. В реальных условиях, по-видимому, действуют оба механизма, т.е. имеет место как значительный рост отдельных трещин вследствие их взаимодействия с окружающими, так и слияние выросших трещин. Полученное совпадение результатов в рассмотренных крайних случаях показывает, что при рассмотрении разрушения от одноосного сжатия, по-видимому, допустимо сводить сложную картину взаимодействия растущих трещин к одному из указанных крайних случаев, например, как это сделано в п. 1, к взаимодействию пар трещин. В то же время только на основе обработки опытов по разрушению вряд ли возможно разделить эти два механизма или отдать предпочтение одному из них.

Авторы приносят благодарность Р. Л. Салганику за обсуждение результатов работы и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поль Б.* Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение. Т. 2. М.: Наука. 1975. С. 336–520.
2. *Оберт Л.* Хрупкое разрушение горных пород // Разрушение. Т. 7. Ч. 1. М.: Мир. 1976. С. 59–128.
3. *Челидзе Т. Л.* Методы теории перколяции в механике разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 6. С. 114–123.
4. *Гольдштейн Р. В., Ладыгин В. М., Осипенко Н. М.* Модель хрупкого разрушения слабо пористого материала при сжатии и растяжении // Физ.-техн. пробл. разработки полезн. ископ. 1974. № 1. С. 3–13.
5. *Ланин А. Г., Бочков Н. А., Егоров В. С., Соколов В. А.* Разрушение материалов в хрупком состоянии при сжатии // Проблемы прочности. 1985. № 9. С. 75–80.
6. *Peng S., Johnson A. M.* Crack grows and faulting in cylindrical spesimens of Chelmsford granite // Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr. 1972. V. 9. P. 37–86.
7. *Ashby M. F., Hallam S. D.* The failure of brittle solids containing small cracks under compressive stress states // Acta metall. 1986. V. 34. No. 3. P. 497–510.
8. *Sammis C. G., Ashby M. F.* The failure of brittle porous solids under compressive stress states // Acta metall. 1986. V. 34. No. 3. P. 511–526.
9. *Dey T. N., Wang Chi-Yuen.* Some mechanisms of microcrack growth and interaction in compressive rock failure // Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr. 1981. V. 18. No. 3. P. 199–209.
10. *Дыскин А. В., Салаганик Р. Л.* Модель дилатансии хрупких материалов с трещинами при сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 169–178.
11. *Adams M., Sines G.* Crack extension from flams in a brittle material subjected to compression // Tectonophysics. 1978. V. 49. No. 1/2. P. 97–118.
12. *Sangha C. M., Talbot C. J., Dhir R. K.* Microfracturing of a sandstoun in uniaxial compression // Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr. 1974. V. 11. No. 3. P. 107–113.
13. *Fairhurst C., Cook N. G. W.* The phenomenon of rock splitting parallel to the direction of maximum compression in the neighbourhood of a surface // Proc. First Congr. Intern. Soc. Rock Mech. Lisbon. 1966. V. 1. P. 687–692.
14. *Sprunt E., Brace W. F.* Direct observation of microcavities in cristalline rocks // Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr. 1974. V. 11. No. 2. P. 139–150.
15. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1960. № 3. С. 79–89.
16. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* Замечание к статье «О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения». Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 153.
17. *Chegeranov G. P.* Mechanics of brittle fracture. N. Y.: Mc. Grau-Hill. 1979. 950 p.
18. *Журков С. Н., Курсенко В. С., Петров В. А.* Физические основы прогнозирования механического разрушения // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1981. Т. 259. № 6. С. 1350–1353.
19. *Родионов В. Н., Сизов И. А., Цветков В. М.* Основы геомеханики. М.: Недра. 1986. 301 с.
20. *Фрейдентель А. М.* Статистический подход к хрупкому разрушению // Разрушение. Т. 2. М.: Наука. 1975. С. 616–645.
21. *Erdogan F., Sih G. C.* On the crack extension in plates under plane loading and transvere shear // J. Basic Eng. Trans. ASME. Ser. D. 1963. V. 85. No. 4. P. 519–525.
22. *Hadley K.* Comparison of calculated and observed crack densities and seismic velocities in Westerly granite // J. Geophys. Res. 1976. V. 81. No. 20. P. 3484–3494.
23. *Brace W. F.* Brittle fracture of rocks // State of stress in the earth's crust. Proc. Intern. Conf. Santa Monica, California. N. Y.: Elsevier. 1964. P. 110–178.
24. *Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г.* Пластичность горных пород. М.: Недра. 1979. 301 с.
25. *Brace W. F., Poulding B. W., Scholz C. H.* Dilatancy in the fracture of cristalline rocks // J. Geophys. Res. 1966. V. 71. No. 16. P. 3939–3953.
26. *Scholz C. H.* Microfracturing and the inelastic deformation of rock in compression // J. Geophys. Res. 1968. V. 73. No. 4. P. 1417–1432.
27. *Horii H., Nemat-Nasser S.* Compression-induced microcrack grows in brittle solids: axial splitting and shear failure // J. Geophys. Res. 1985. V. 90. No. B4. P. 3105–3125.
28. *Nemat-Nasser S., Horii H.* Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation and rockburst // J. Geophys. Res. 1982. V. 87. No. B8. P. 6805–6821.
29. *Салаганик Р. Л.* Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 149–158.
30. *Дыскин А. В.* К расчету эффективных деформационных характеристик материала с трещинами // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 130–135.
31. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. Т. 2. М.: Наука. 1975. С. 83–203.
32. *Willis R. J., Acton J. R.* The overall elastic moduli of a dilute suspension of spheres // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1976. V. 29. No. 2. P. 163–177.

Москва

Поступила в редакцию
14.VII.1986