

УДК 539.374

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ, РАССЕЯННОЕ РАЗРУШЕНИЕ И КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ НЕУПРУГИХ КОМПОЗИТОВ

АХУНДОВ М. Б.

В работе предлагается модель деформирования и рассеянного разрушения повреждающихся изотропных и анизотропных сред в условиях сложнапряженного состояния, основанная на представлении о наследственном характере процессов деформирования и накопления повреждений. Даны критерии прочности для указанных сред, выписаны их конкретные виды для некоторых типов неупругих композитов. В рамках предложенной модели удается описать результаты известных в литературе экспериментов на ползучесть и длительную прочность.

Твердым телам, как известно, присуще явление статической усталости. Наблюдаемое при этом разрушение представляет собой необратимый кинетический процесс накопления повреждений, происходящий по всему объему материала. Интерес к анализу процессов накопления повреждений в материалах объясняется тем, что во многих случаях эксплуатации именно накопление повреждений является причиной разрушения конструкции, а также большими перспективами использования данного подхода для описания процессов деформирования и разрушения полимерных и композитных материалов.

Рассматривались два типа меры поврежденности — скалярные [1–6] и тензорные [7]. Во всех случаях за момент разрушения принимается такой момент, когда мера поврежденности достигает некоторой критической величины, являющейся константой материала. Однако в последнее время появились опытные данные, устанавливающие, что степень поврежденности в момент макроскопического разрушения зависит от истории нагружения и не является константой материала. Одномерная модель деформирования и разрушения повреждающихся сред, учитывающая указанный эффект, была предложена в [8] и апробирована на большом количестве экспериментальных данных. В этой модели, основанной на представлениях о наследственном характере процессов обратимой ползучести и накопления повреждений, процессы деформирования и разрушения считаются взаимосвязанными.

Однако в связи с повышением требований к точности расчета конструкций и оценки их долговечности в условиях эксплуатации обычные методики расчетов на основе одномерных моделей становятся неудовлетворительными. Следует отметить, что для такого большого и важного класса конструктивных материалов, как композиты, возникновение одноосного напряженного состояния является маловероятным. Примером служит слоистый композит, в котором реализуется сложное напряженное состояние даже при нагружении материала в одном направлении.

В публикуемой работе предлагается модель деформирования и разрушения изотропных и анизотропных материалов — композитов — в условиях сложного напряженного состояния, обладающих вязкими свойствами, причиной разрушения которых является процесс накопления повреждений и для которых процессы деформирования и разрушения оказываются взаимосвязанными. Эта модель основана на представлениях о том, что оба процесса — вязкого течения и накопления повреждений — описываются операторами наследственного типа. Использование интегральных представлений дает возможность описывать процессы деформирования и разрушения для значительно более широкого класса путей нагружения, чем кинетические теории. Следует также отметить, что все параметры модели могут быть определены из опытов на одноосное нагружение.

1. Для изотропных материалов принимаются следующие определяющие соотношения:

$$e_{ij} = (s_{ij} + L^* s_{ij} + M^* s_{ij}) / 2\mu_0 \quad (1.1)$$
$$\varepsilon = (\sigma + P^* \sigma + N^* \sigma) / 3K_0$$

где  $L^*$ ,  $P^*$  и  $M^*$ ,  $N^*$  — операторы наследственного типа, описывающие соответственно процессы вязкого течения и накопления повреждений,  $\mu_0$ ,  $K_0$  — модули сдвига и объемной деформации,  $s_{ij}$ ,  $e_{ij}$  — девиаторы, а  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  — шаровые части тензоров напряжений и деформаций соответственно.

Если материал не чувствителен к виду напряженного состояния и в упругом случае для него справедлив критерий прочности Мизеса  $\sigma_i = \text{const}$ , где  $\sigma_i = (s_{ij}s_{ij})^{1/2}$ , то для материала, повреждающегося в процессе нагружения, критерий прочности может быть записан в виде

$$\sigma_i + M^* \sigma_i = \sigma_0 \quad (1.2)$$

где  $\sigma_0$  — некоторая константа, определяющая прочность бездефектного материала. Если в упругом случае для материала справедлив критерий прочности Кулона — Мора  $\sigma_i + \alpha \sigma = \text{const}$ , то для материала, повреждающегося в процессе нагружения, критерий прочности будет иметь вид

$$(\sigma_i + M^* \sigma_i) + \gamma (\sigma + N^* \sigma) = \sigma_0 \quad (1.3)$$

Операторы  $M^*$  и  $N^*$ , входящие в соотношения (1.2), (1.3), те же, что и в уравнениях (1.1).

Особенностью данного подхода является то, что операторы  $L^*$ ,  $P^*$ ,  $M^*$ ,  $N^*$  и константы  $\gamma$ ,  $\sigma_0$  могут быть определены, например, из опытов на одноосное растяжение, поскольку они не должны зависеть от вида напряженного состояния.

Важным моментом в построенной модели является различие операторов  $L^*$ ,  $P^*$ , описывающих вязкое течение, и  $M^*$ ,  $N^*$ , описывающих процесс накопления повреждений. Ядра операторов поврежденности  $M^*$  и  $N^*$  должны быть, вообще говоря, неразностными, в то время как ядра операторов ползучести  $L^*$  и  $P^*$  могут быть разностного типа. Действие операторов ползучести распространяется на весь интервал времени от исходного до текущего, в то время как операторы поврежденности действуют лишь в тех интервалах времени, когда реализуемое в теле напряженное состояние способствует процессу накопления повреждений:

$$\begin{aligned} L^* \sigma_i &= \int_0^t L(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau, & P^* \sigma &= \int_0^t P(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \\ M^* \sigma_i &= \sum_{k=1}^n \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(t_k^+, \tau) \sigma_i(\tau) d\tau, & N^* \sigma &= \sum_{k=1}^r \int_{t_k^-}^{t_k^+} N(t_k^+, \tau) \sigma(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.4)$$

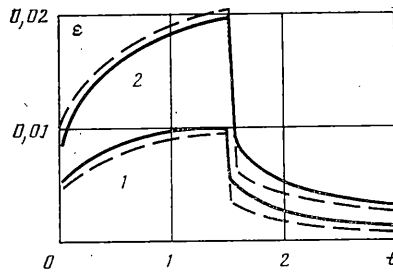
Условия накопления повреждений определяют класс путей нагружений, для которых справедлива построенная модель. Для проверки предложенной модели (1.1), (1.2) были обработаны результаты экспериментов на ползучесть и длительную прочность полиэтилена высокой прочности [9] при различных видах напряженного состояния. Были также проанализированы опыты по ползучести полиэтилена в условиях активного нагружения и разгрузки [10]. При этом использовалось соотношение между интенсивностями, вытекающее для указанных видов нагружения из первого соотношения (1.1):

$$2\mu_0 \varepsilon_i = \sigma_i + L^* \sigma_i + M^* \sigma_i \quad (1.5)$$

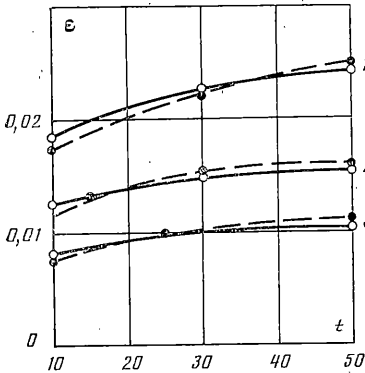
При обработке экспериментальных данных оказалось достаточным взять первый член разложения ядра  $M(t, \tau)$  в ряд по степеням  $t-\tau$ , т. е. обработка данных проводилась с использованием слабосингулярных ядер Абеля  $M(t-\tau) = m(t-\tau)^{-\alpha}$ ,  $L(t-\tau) = l(t-\tau)^{-\beta}$ . Учитывая, что мгновенные значения коэффициентов Пуассона оказались малы, принималось, что  $2\mu_0 \approx E_0$ . Кроме того, расчеты показали близость  $\alpha$  и  $\beta$ , поэтому в дальнейшем  $\alpha \approx \beta$ . В этом случае расчетные формулы, следующие из (1.5) и использованные для обработки указанных экспериментальных данных, имеют вид:

для прямой ползучести ( $\sigma_i = \text{const}$ ):

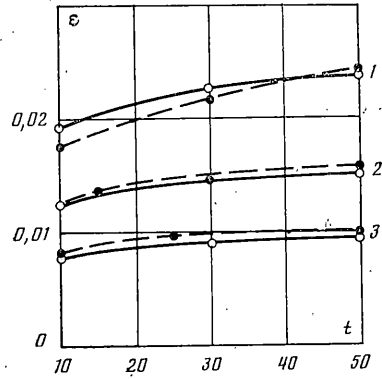
$$E_0 \varepsilon_i = \sigma_i [1 + (m+l)t^{1-\alpha} / (1-\alpha)] \quad (1.6)$$



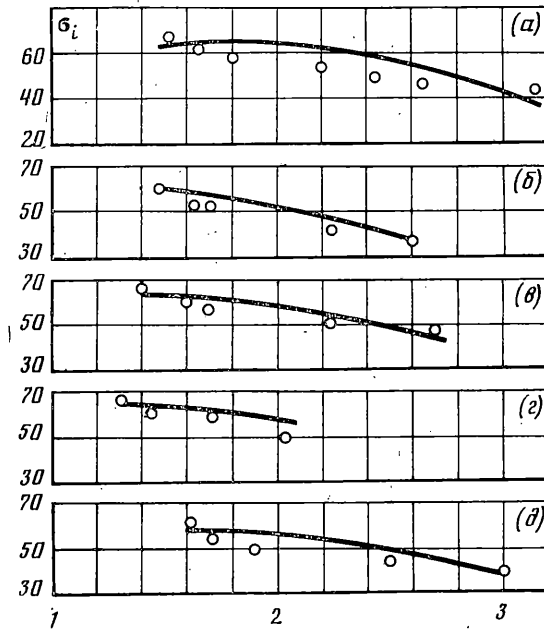
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

для ползучести с возвратом ( $\sigma_i = \text{const}$ ,  $0 \leq t \leq t_*$ ,  $\sigma_i = 0$ ,  $t > t_*$ ,  $t_*$  — время начала разгрузки):

$$E_0 \varepsilon_i = \sigma_i \{ l [ t^{1-\alpha} - (t-t_*)^{1-\alpha} ] + m t_*^{1-\alpha} \} \quad (1.7)$$

для процесса длительной прочности ( $\sigma_i = \text{const}$ ):

$$\sigma_i [ 1 + m t^{1-\alpha} / (1-\alpha) ] = \sigma_0 \quad (1.8)$$

Параметры определяющих уравнений и критерия прочности  $m$ ,  $l$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma_0$  определялись из опытов на одноосное нагружение. Постоянные  $E_0$ ,  $m+l$ ,  $\alpha$  определялись по кривым прямой ползучести, а константа прочности  $\sigma_0$  — по кривой длительной прочности. Кривые ползучести с возвратом [10] позволяют выделить оператор накопления повреждений. На фиг. 1 приведены экспериментальные (сплошные) и расчетные (пунктирные) кривые прямой и обратной ползучести полиэтилена высокой прочности при одноосном нагружении ( $1 - \sigma_i = 49,2$  кгс/см<sup>2</sup>;  $2 - \sigma_i = 73,7$  кгс/см<sup>2</sup>). По этим кривым согласно формуле (1.7) определялся параметр  $m$ . При наличии кривой длительной прочности параметр ядра поврежденности  $m$  определялся по нему. Далее этот же набор параметров использовался для расчета диаграмм деформирования и прочностных характеристик при различных видах напряженного состояния и различных режимах нагружения. Соответствующие кривые приведены на фиг. 2–4. На фиг. 2 (одноосное нагружение) и фиг. 3 ( $\sigma_{11}/\sigma_{22} = 2,5$ ) приведены экспериментальные (сплошные) и расчетные (пунктирные) кривые ползучести полиэтилена высокой плотности ( $1 - \sigma_i = 10$  МПа;  $2 - \sigma_i = 8$  МПа;  $3 - \sigma_i = 6$  МПа). На фиг. 4 (на оси абсцисс показана логарифмическая шкала относительного времени) приведены расчетные кривые длительной прочности полиэтилена высокой плотности (точки — эксперимент) при различных видах напряженного состояния ( $a - \sigma_{11}/\sigma_{22} = 0$ ,  $b - \sigma_{11}/\sigma_{22} = 0,5$ ,  $c - \sigma_{11}/\sigma_{22} = 1$ ,  $d - \sigma_{11}/\sigma_{22} = 2$ ,  $e - \sigma_{11}/\sigma_{22} = 4$ ). Сравнение экспериментальных и расчетных кривых ползучести и длительной прочности для изотропных полимерных материалов, не чувствительных к виду напряженного состояния, позволяет считать, что предложенная модель дает вполне удовлетворительные результаты.

Нелинейная модель деформирования и разрушения повреждающейся изотропной среды представляется следующими определяющими уравнениями и критерием прочности:

$$e_{ij} = s_{ij}/(2\mu_0) + \int_0^t L(t-\tau) f(\sigma, \sigma_i) s_{ij}(\tau) d\tau + \sum_{h=1}^n \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(t_k^+, \tau) g(\sigma, \sigma_i) s_{ij}(\tau) d\tau \quad (1.9)$$

$$\varepsilon = \sigma/(3K_0) + \int_0^t P(t-\tau) \lambda(\sigma, \sigma_i) \sigma(\tau) d\tau + \sum_{h=1}^r \int_{t_k^-}^{t_k^+} N(t_k^+, \tau) \omega(\sigma, \sigma_i) \sigma(\tau) d\tau$$

$$[\sigma_i + M^*(g \cdot \sigma_i)] + \gamma [\sigma + N^*(\omega \cdot \sigma)] = \sigma_0 \quad (1.10)$$

Заметим, что нелинейная модель описывает явление дилатансии. Действительно, для некоторых типов материалов в момент разрушения при кручении наблюдается увеличение объема материала — явление разрыхления.

Для анизотропного материала определяющие соотношения, учитывающие процессы вязкого течения и накопления повреждений, принимаются в виде

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} + L_{ijkl}^* \sigma_{kl} + M_{ijkl}^* \sigma_{kl} \quad (2.1)$$

где операторы  $L_{ijkl}^*$  описывают процессы вязкого течения, а  $M_{ijkl}^*$  — накопления повреждений. Примем для ядер этих операторов следующие представления [11]:

$$L_{ijkl}(t) = \sum_{p=1}^{p_1} l_{ijkl}^{(p)} \varphi_p(t), \quad M_{ijkl}(t) = \sum_{p=1}^{p_2} m_{ijkl}^{(p)} f_p'(t) \quad (2.2)$$

Константы анизотропии  $C_{ijkl}$ ,  $l_{ijkl}$ ,  $m_{ijkl}$  имеют одинаковую симметричную структуру типа  $C_{ijkl}=C_{ijlk}=C_{jikh}=C_{hlij}$ , причем тензор  $C_{ijkl}$  положительно-определенный. В этом случае оказывается возможным применение результатов для формулировки инвариантного критерия прочности<sup>1</sup>.

Выполним преобразование Лапласа соотношения (2.1) с учетом (2.2), приняв ядро оператора поврежденности в разностном виде (допустимость этого предположения подтверждается результатами обработки экспериментальных данных):

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = C'_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl}, \quad C'_{ijkl} = C_{ijkl} + \sum_{p=1}^{p_1} l_{ijkl}^{(p)} \bar{\varphi}_p + \sum_{p=1}^{p_2} m_{ijkl}^{(p)} \bar{f}_p. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) имеет тот же вид, что и уравнение для упругого анизотропного материала, причем коэффициенты  $C'_{ijkl}$  сохраняют структуру коэффициентов  $C_{ijkl}$ . Тогда соотношения (2.3) через собственные состояния запишутся в виде

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{\lambda'_\alpha} \sigma_\alpha, \quad \frac{1}{\lambda'_\alpha} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \sum_{p=1}^{p_1} l_\alpha^{(p)} \bar{\varphi}_p + \sum_{p=1}^{p_2} m_\alpha^{(p)} \bar{f}_p.$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа (2.3), получим

$$\varepsilon_\alpha = (\sigma_\alpha + L_\alpha^* \sigma_\alpha + M_\alpha^* \sigma_\alpha) / \lambda'_\alpha \quad (2.4)$$

$$L_\alpha^* = \sum_{p=1}^{p_1} \lambda_\alpha l_\alpha^{(p)} \varphi_p^*, \quad M_\alpha^* = \sum_{p=1}^{p_2} \lambda_\alpha m_\alpha^{(p)} f_p^*$$

Соотношения (2.4) являются деформационными соотношениями, где оператор  $L_\alpha^*$  описывает процесс вязкого течения, а  $M_\alpha^*$  — процесс накопления повреждений. Разница между этими операторами такая же, как и в изотропном случае (см. (1.4)).

Теперь по аналогии с изотропным случаем за критерий прочности примем соотношение

$$\sum_{\alpha=1}^r \chi_\alpha (\sigma_\alpha + M_\alpha^* \sigma_\alpha) = \sigma_0 \quad (r \leq 6) \quad (2.5)$$

где  $\sigma_\alpha = (\sigma_\alpha \cdot \sigma_\alpha)^{1/2}$  — норма тензора  $\sigma_\alpha$ . Критерий прочности (2.5) для каждого типа анизотропии определяет свою поверхность прочности в пространстве напряжений. Запись критерия прочности в терминах собственных состояний, позволяющих учитывать особенности структуры построения материала для одного и того же типа анизотропии, дает возможность выписывать критерии прочности для конкретных композитных материалов различной структуры, но одного и того же типа анизотропии. Так, для композита, составленного из изотропной матрицы, армированной плоскопараллельным семейством тонких листов из другого изотропного материала, и ортогональным к листам пучком гибких волокон, в критерии прочности (2.10) следует положить  $r=4$ :

$$\sigma_1 = |(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin \kappa / \sqrt{2} + \sigma_{33} \cos \kappa| \quad (2.6)$$

$$\sigma_2 = |(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \cos \kappa / \sqrt{2} - \sigma_{33} \sin \kappa|$$

$$\sigma_3 = [2(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)]^{1/2}, \quad \sigma_4 = [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 / 2 + 2\sigma_{12}^2]^{1/2}$$

Для однонаправленно армированного волокнами композита  $r=3$   $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  имеют вид (2.6), а  $\sigma_3$  определяется выражением

$$\sigma_3 = [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 / 2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)]^{1/2} \quad (2.7)$$

<sup>1</sup> Рыжлевский Я. Математическая структура упругих тел. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1983, № 217. 114 с.

Оба указанных композита представляют собой трансверсально-изотропные среды.

Деформационные соотношения (2.4) и критерий прочности (2.5), так же как и для изотропного материала, позволяют проводить аналитическое исследование долговечности конструкций в условиях сложного напряженного состояния, исследовать кинетику развития разрушения в конструкции и определять ее рабочий ресурс. Результаты исследования позволяют также выявить возможность увеличения функционального ресурса конструкции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Объединенная модель разрушения композитных материалов при длительно действующих нагрузках // *Механика композит. материалов.* 1981. № 3. С. 405–420.
2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.
4. *Тамуж В. П., Куксенко В. С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978. 294 с.
5. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1972 с. 327 с.
6. *Локощенко А. М., Мякотин Н. А., Шестериков С. А.* Ползучесть и длительная прочность стали X18H10T в условиях сложного напряженного состояния // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1979. № 4. С. 87–94.
7. *Ильюшин А. А.* Об одной теории длительной прочности // *Инж. ж. МТТ.* 1967. № 3. С. 21–35.
8. *Суворова Ю. В.* Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред // *Механика полимеров.* 1977. № 6. С. 976–980.
9. *Гольдман А. Я.* Прочность конструкционных пластмасс. Л.: Машиностроение, 1979. 320 с.
10. *Крегерс А. Ф., Вилкс У. К.* Ползучесть полиэтилена высокой плотности в активных режимах нагружения // *Механика композит. материалов.* 1985. № 4. С. 579–590.
11. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

Баку

Поступила в редакцию  
5.VI.1986