

УДК 539.376

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ
УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ТОНКОГО СЛОЯ

ГРИШИН С. А.

Рассматривается плоская задача о вдавливании периодической системы жестких прямоугольных штампов с гладкой подошвой в поверхность слоя, лежащего без трения на недеформируемой подложке. Толщина слоя и расстояние между соседними штампами предполагаются малыми по сравнению с шириной штампа. Ползучесть описывается степенной связью между интенсивностями напряжений и скоростей деформации. Приближенное решение строится путем композиции локального (справедливого вблизи углов) и проникающего решений. Численно исследуется зависимость коэффициента жесткости и некоторых характеристик напряженного состояния от степени нелинейности определяющих соотношений и расстояния между штампами. В линейном случае приближенное решение дается явными формулами.

1. Рассмотрим задачу о вдавливании системы штампов в тонкий слой при плоской деформации. Для описания поведения слоя примем модель установившейся ползучести со степенной связью между интенсивностями напряжений и скоростей деформации [1-8]:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} e_{ij} / \varepsilon_u, \quad \sigma_u = K \varepsilon_u^\mu, \quad \varepsilon_{ii} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

$$\sigma_{x,x} + \tau_{y,y} = 0, \quad \tau_{x,x} + \sigma_{y,y} = 0 \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_x = u_{,x}, \quad \varepsilon_{xy} = 1/2(u_{,y} + v_{,x}), \quad \varepsilon_y = v_{,y} \quad (1.3)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij}, \quad \sigma_u^2 = 1/2 S_{ij} S_{ij}, \quad \varepsilon_u^2 = 1/2 e_{ij} e_{ij}$$

$$\sigma_x = \sigma_{11}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{12} = \tau, \quad \sigma_y = \sigma_{22} \quad (K, \mu = \text{const}, 0 < \mu \leq 1)$$

Здесь индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате. Из симметрии задачи следует, что напряженно-деформированное состояние под каждым из штампов одинаково. Рассмотрим ячейку периодичности — часть слоя, ограниченную прямыми $x = \text{const}$, проходящими через середины штампов и середины промежутков между ними (фиг. 1). В предположении, что отрыва штампа от слоя и слоя от подложки не происходит, граничные условия имеют вид

$$y = 0, \quad 0 < x < a + \Delta/2: \quad v = 0, \quad \tau = 0$$

$$y = h, \quad 0 < x < a: \quad v = \text{const} = \delta, \quad \tau = 0$$

$$y = h, \quad a < x < a + \Delta/2: \quad \sigma_y = \tau = 0 \quad (1.4)$$

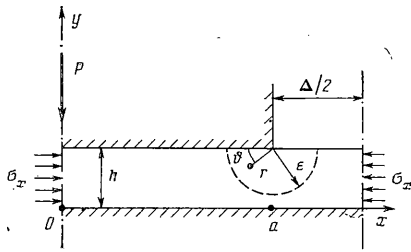
$$0 < y < h, \quad x = 0, \quad x = a + \Delta/2: \quad u = 0, \quad \tau = 0 \quad (1.5)$$

Заметим, что эти условия отличаются от условий похожей задачи об изготовлении штамповкой ребристой плиты, рассмотренной в [6] в рамках деформационной теории пластичности. Введем безразмерные переменные по формулам

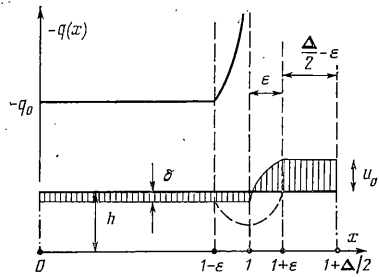
$$h^* = h/a, \quad x^* = x/a, \quad y^* = y/a, \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} t_0, \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} t_0^\mu / K$$

$$P^* = P t_0^\mu / K a, \quad \varepsilon^* = \varepsilon / a, \quad \delta^* = \delta t_0 / a, \quad \Delta^* = \Delta / a$$

$$q^*(x^*) = q(x) t_0^\mu / K, \quad Q^* = Q t_0^\mu / K, \quad p_0^* = p_0 t_0^\mu / K \quad (1.6)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь t_0 — масштаб времени, δ — осадка штампа. Некоторые из введенных в (1.6) величин будут определены ниже. В п. 2 переменные считаются безразмерными.

2. Для построения приближенного решения воспользуемся развитым применительно к подобным задачам в [9—11] композиционным подходом, состоящим в отдельном исследовании напряженно-деформированного состояния вблизи и вдали угловых точек области и последующем частичном согласовании асимптотик. Прежде всего, согласно общей схеме решения контактных задач [12], рассмотрим вспомогательную задачу, т. е. отбросим штамп, заменив его действие неизвестной пока нормальной нагрузкой $q(x)$. Естественно ожидать, что функция $q(x)$ будет непрерывной и ограниченной всюду вне угла ($x=1$). Мысленно вырежем в слое полукруг неизвестного малого радиуса ϵ с центром в вершине угла штампа (фиг. 1); будем называть его погранзоной. Построим приближенное решение, справедливое вне погранзоны. Для этого разложим $\tau(x, y)$ в степенной ряд по τ и удержим в нем, пользуясь малостью h и ограниченностью τ вне погранзоны, лишь первые два члена [12—14]: $\tau = \psi_0(x) + \psi_1(x)y$. Из граничных условий (1.4) следует, что $\psi_0 = \psi_1 = 0$, т. е. $\tau = \epsilon_{xy} = 0$. Уравнения равновесия (1.2) дадут $\sigma_y = q(x)$, $\sigma_x = f(y)$ всюду в слое вне погранзоны. Из определяющих соотношений (1.1) с учетом последних равенств получим

$$q(x) = \epsilon_u^{\mu-1} (\epsilon_y - \epsilon_x) + f(y) \quad (2.1)$$

Благодаря малой толщине слоя и ограниченности σ_x вне погранзоны можно положить $f(y) = p_0 = \text{const} < 0$, т. е. усреднить напряжения σ_x по толщине. При этом, если $\epsilon < h$, то p_0 следует считать одним и тем же как под штампами, так и вне их. Из условия несжимаемости $\epsilon_x = -\epsilon_y$, пользуясь тем, что $\epsilon_{xy} = 0$, получим равенство $\epsilon_u = |\epsilon_y|$. С учетом сказанного (2.1) переписется так:

$$q(x) - p_0 = 2|\epsilon_y|^{\mu-1} \epsilon_y \quad (2.2)$$

Разрешая (2.2) относительно ϵ_y , выражая его через v из последнего соотношения Коши (1.3), интегрируя получившееся дифференциальное уравнение с учетом первого условия (1.4) и полагая $y = h$, приходим к следующей нелинейной связи между скоростью поверхности слоя и контактным давлением вне погранзоны:

$$v(x, h) = h2^{-m} |q(x) - p_0|^m \text{sgn}(q(x) - p_0) \quad (2.3)$$

$$(0 < x < 1 - \epsilon, 1 + \epsilon < x < 1 + \Delta/2)$$

Так как по условию (1.4) основной контактной задачи $v = \text{const} = \delta$ при $y = h$, $x < 1$, то из (2.3) следует, что контактное давление под штампом вне погранзоны постоянно: $q = \text{const} = q_0 < 0$.

Обратимся к построению локального решения, справедливого внутри погранзоны. Известна асимптотика решения задачи о контакте без трения жесткой четвертьплоскости с деформируемой полуплоскостью, материал которой подчиняется закону (1.1) [9, 15]. Чтобы применить это решение в рассматриваемом случае, необходимо потребовать, по крайней мере,

чтобы

$$\varepsilon < h, \quad \varepsilon < \Delta/2 \quad (2.4)$$

Тогда контактное давление вблизи края штампа и скорость осадки свободной поверхности в погранзоне определяются соответственно формулами [15, 9, 11]:

$$\sigma_0(r, 0) = -Qs(s-1)r^{s-2}, \quad u_0(r, \pi) = \delta + Qm^{1/(m+1)}g(m) \quad (2.5)$$

$$g(m) = 2^{-m}(m+1)^2 |\varphi''(\pi)|^{m-1} \varphi'''(\pi)$$

$$s = (2m+1)/(m+1), \quad m = 1/\mu$$

Здесь r, ϑ — локальные полярные координаты (фиг. 1), Q — неизвестная положительная константа, $\varphi''(\pi)$ и $\varphi'''(\pi)$ — функции параметра m , найденные численно, значения которых при $1 \leq m \leq 3$ имеются в [11], а при $3,5 \leq m \leq 13$ — в таблице.

По условию задачи, $\Delta \sim h \ll 1$. Отсюда и из (2.4) следует, что $(\Delta/2 - \varepsilon)$ — малая положительная величина. Поэтому можно считать, что скорость поднятия свободной поверхности вне погранзоны постоянна: $v(x) = u_0 = \text{const}$ при $y = h, 1 + \varepsilon < x < 1 + \Delta/2$.

При сращивании решений потребуем, чтобы контактное давление и вертикальная составляющая скорости свободной поверхности были непрерывны на границе погранзоны. Тогда

$$q_0 = -Qs(s-1)\varepsilon^{s-2}, \quad u_0 = \delta + Qm\varepsilon^{1/(m+1)}g(m) \quad (2.6)$$

С другой стороны, поскольку $q = 0$ при $1 + \varepsilon < x < 1 + \Delta/2$, из (2.3) имеем, что $u_0 = h2^{-m}|p_0|^m$, а так как $v(x) = \delta < 0$ при $x < 1 - \varepsilon$, то опять из (2.3) имеем $-\delta = h2^{-m}|q_0 - p_0|^m$. Исключая p_0 из двух последних уравнений, получим

$$q_0 = -2h^{-\mu}(|\delta|^\mu + u_0^\mu) \quad (2.7)$$

Потребуем, чтобы «склеенное» контактное давление удовлетворяло условию равновесия штампа, а также наложим условие сохранения объема, заключенного в ячейке периодичности, вытекающее из несжимаемости материала (1.1) и граничных условий (1.4) (фиг. 2):

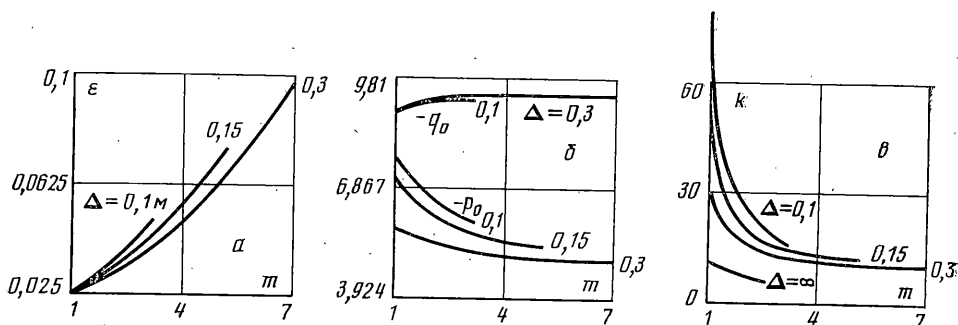
$$\int_0^1 q(x) dx = q_0(1 - \varepsilon) - Qs\varepsilon^{s-1} = P/2 < 0 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{1+\Delta/2} v(x) dx &= \delta + \int_0^\varepsilon u_0(r, \pi) dr + u_0(\Delta/2 - \varepsilon) = \\ &= u_0(\Delta/2 - \varepsilon) + \delta(1 + \varepsilon) + \frac{m+1}{m+2} g(m) Q^m \varepsilon^{(m+2)/(m+1)} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Система пяти уравнений (2.6)–(2.9) служит для нахождения пяти неизвестных констант: ε, Q, q_0, u_0 и либо δ , либо P , в зависимости от того, какая из традиционных постановок контактной задачи [7, 12, 16, 17] принята. Для определенности будем далее считать, что P задана, а δ — неизвестна.

Обозначим $A = -s(s-1)$, $D = g(m)(m+1)/(m+2)$. В частном случае линейной установившейся ползучести ($m = \mu = 1$) $A = -3/4$, $g(1) = 3/2$, $D = 1$.

m	$-\varphi''(\pi)$	$\varphi'''(\pi)$	m	$-\varphi''(\pi)$	$\varphi'''(\pi)$	m	$-\varphi''(\pi)$	$\varphi'''(\pi)$
3,5	0,376	0,732	6	0,501	0,432	10	0,585	0,259
4	0,410	0,653	7	0,526	0,387	11	0,598	0,227
4,5	0,438	0,586	8	0,549	0,334	12	0,608	0,221
5	0,461	0,534	9	0,567	0,301	13	0,618	0,198



Фиг. 3

При этом система (2.6) – (2.9) примет вид

$$\begin{aligned} q_0 &= -^3/4 Q/\sqrt{\varepsilon}, \quad q_0 = 2(\delta - u_0)/h, \quad q_0(1 - \varepsilon) - 3Q\sqrt{\varepsilon}/2 = P/2 \\ u_0 &= \delta + 3Q\sqrt{\varepsilon}/2, \quad u_0(\Delta/2 - \varepsilon) + \delta(1 + \varepsilon) + Q\varepsilon^{3/2} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon = h/4, \quad q_0 = 2P/(4+h), \quad Q = -^4/3 P\sqrt{h}/(4+h) \quad (2.11)$$

$$\delta = Ph(6\Delta - h)[3(4+h)(4+2\Delta)]^{-1}, \quad u_0 = -Ph(h+12)[3(4+h)(4+2\Delta)]^{-1}$$

В общем случае, когда $m \neq 1$, система (2.6) – (2.9) может быть сведена к одному алгебраическому уравнению относительно ε . Действительно, из первого соотношения (2.6) и из (2.8) имеем

$$Q = P[2(\varepsilon^{-1/(m+1)}A(1-\varepsilon) - s\varepsilon^{m/(m+1)})]^{-1} \quad (2.12)$$

Из (2.12), из второго соотношения (2.6) и из (2.9) найдем

$$\begin{aligned} \delta &= -K_0(m, \varepsilon, \Delta) |P|^m \\ K_0(m, \varepsilon, \Delta) &\equiv [g(m)\varepsilon^{1/(m+1)}(\Delta/2 - \varepsilon) + D\varepsilon^{(m+2)/(m+1)}] \times \\ &\times 2^{-m}(1 + \Delta/2)^{-1} [s\varepsilon^{m/(m+1)} - A(1 - \varepsilon)\varepsilon^{-1/(m+1)}]^{-m} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Формулы (2.12), (2.13) дают выражения Q и δ через ε и известные по условию величины. Подставляя (2.12), (2.13) в (2.6), получим аналогичные выражения для q_0 и u_0 . Трансцендентное уравнение для нахождения ε по известным параметрам задачи m, Δ, h, P получится подстановкой всех найденных выражений в (2.7). При отыскании его корня необходимо следить, чтобы выполнялись неравенства (2.4). Это обстоятельство ограничивает область применимости приближенного решения. В качестве начального значения ε при решении уравнения следует брать $\varepsilon = h/4$ ($m = 1$), после чего увеличивать m , находя каждый раз $\varepsilon(m)$ и считая это значение начальным для следующего шага.

3. На фиг. 2 схематически представлены эпюры контактного давления и графики скорости поверхности слоя, получающиеся в результате приближенного решения задачи изложенным методом.

Остановимся подробнее на случае линейной установившейся ползучести $m=1$. Явный вид решения (2.11) позволяет отметить следующие его свойства. Решение применимо при $\Delta > h/2$, иначе (2.4) не выполняется. Выражения для ε, q_0, Q не содержат Δ и в точности соответствуют решению для одного штампа [11]. При $\Delta \rightarrow \infty$ $\delta \rightarrow hP/(4+h), u_0 \rightarrow 0, p_0 \rightarrow 0$, как и получалось для одного штампа.

Рассмотрим пример. Для стали при температуре 922,15 К в диапазоне нагрузок 2,943–17,658 МПа положим $m=1,7, 1/K^m=2,7 \cdot 10^{-18}$ Па $^{-m}$ /с [18]. Возьмем, как и в [11], $h=0,1$ м, $a=0,25$ м, $^{-1}/2P/a=9,81$ МПа, $t_0=3600$ с. Будем изменять m в диапазоне $1 \leq m \leq 7$, а Δ – от 0,1 до 0,3 м. Минимально возможное Δ получается в линейном случае $m=1$ и равно $\Delta=h/2=0,05$ м. При больших значениях Δ перестает быть справедливым предположение $u_0 = \text{const}$. Результаты расчетов для данного примера приведены на фиг. 3.

На фиг. 3, а изображены зависимости $\varepsilon(m)$ [м] при различных Δ [м] для нашего примера. Радиус пограничного увеличивается с ростом m при фиксированном Δ и уменьшается с ростом Δ при фиксированном m .

На фиг. 3, б приведены графики зависимостей $q_0(m)$ и $p_0(m)$ [МПа] при различных Δ [м]. Напряжения $\sigma_y=q_0$ всегда выше напряжений $\sigma_x=p_0$, с ростом m это различие увеличивается. Изменение расстояния между штампами значительно сильнее сказывается на p_0 , чем на q_0 .

На фиг. 3, в изображена зависимость от m коэффициента жесткости k , связанного с коэффициентом податливости K_0 из формулы (2.13) соотношением $K_0=1/k^m$, при различных Δ [м]. С ростом Δ при фиксированном m жесткость уменьшается. С ростом m при фиксированном Δ жесткость уменьшается. Нижняя кривая ($\Delta=\infty$) взята из [11] и соответствует случаю одного штампа. Фиг. 3, в показывает, что наличие близкорасположенных соседних штампов существенно влияет на характеристики податливости деформируемого слоя. Так, при $m=1$ присутствие другого штампа на расстоянии Δ , равном толщине слоя h , в рассмотренном примере приводит к семикратному увеличению коэффициента жесткости.

Кривые фиг. 3 для $\Delta=0,1$ и $0,15$ м обрываются соответственно при $m\approx 3,2$ и $\approx 5,2$, так как ϵ при таких m достигает значения $\Delta/2$.

В заключение отметим, что в силу известной аналогии [6] изложенное может быть применено к задачам пластичности со степенным упрочнением или упругости для материалов, подчиняющихся закону Бернулли [19].

Автор благодарит В. М. Александрова, В. Д. Ключникова, Р. И. Мазинга и А. В. Манжирова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука. 1966. 752 с.
2. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз. 1960. 456 с.
3. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение. 1975. 398 с.
4. Малинин Н. Н. Ползучесть в обработке металлов. М.: Машиностроение. 1986. 221 с.
5. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир. 1986. 360 с.
6. Ильюшин А. А., Ленский В. С. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз. 1959. 371 с.
7. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 901–924.
8. Арутюнян Н. Х., Манукян Н. Н. Кручение тела вращения в условиях установившейся нелинейной ползучести // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1961. Т. 14. № 4. С. 103–114.
9. Александров Н. М., Сумбатьян М. А. Об одном решении контактной задачи нелинейной установившейся ползучести для полуплоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 107–113.
10. Александров В. М., Гришин С. А., Коваленко Е. В. Контактное взаимодействие толстой плиты с упругим слоем большой толщины // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 64–69.
11. Гришин С. А., Манжиров А. В. Контактные задачи для тонкого слоя в условиях нелинейной установившейся ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 119–125.
12. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука. 1986. 334 с.
13. Сумбатьян М. А. Плоская задача для тонкого слоя в условиях нелинейной установившейся ползучести // Изв. АН АрмССР. Механика. 1980. Т. 33. № 1. С. 35–42.
14. Манжиров А. В. Плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой // ПМТФ. 1983. № 5. С. 153–158.
15. Hutchinson J. W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material / J. Mech. and Phys. Solids. 1968. V. 16. No. 1. P. 13–32.
16. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука. 1980. 304 с.
17. Александров В. М., Ромалис Б. Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение. 1986. 174 с.
18. Беллев Н. М. Сопротивление материалов. М.: Наука. 1965. 856 с.
19. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. I. М.: Наука. 1984. 596 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.XII.1986