МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1988

УДК 539.376

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ЛОКАЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ТЕОРИИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

ТУРОВЦЕВ Г. В.

Известно, что предположение о существовании потенциала ползучести ограничивает возможности описания ползучести и не вытекает из какого-либо термодинамического принципа [1], но позволяет сформулировать для теории ползучести принципы экстремальности. Тем самым открываются возможности развития приближенных методов, пределы применимости которых ограничиваются ассоциированными законами.

Используя концепцию локального потенциала [2], в публикуемой работе предпринята попытка распространить классические вариационные принципы минимума дополнительного рассеяния и минимума полной мощности на неассоциированные законы теории установившейся ползучести. Применение локальных принципов иллюстрируется на примере среды, свойства которой при ползучести зависят от вида напряженного состояния (разносопротивляющаяся среда) и описываются неассоциированным законом. Приводится пример [3] численной реализации прямого метода, основанного на локальном принципе экстремальности. Обсуждается связь принципа локального потенциала с другими неклассическими вариационными методами.

1. Рассмотрим процесс установившейся ползучести, независящей от истории нагружения. Предположим, что среда изотропна, пластически несжимаема и тензоры напряжений и скоростей деформаций ползучести соосны. Тогда наиболее общая форма связи между ними имеет вид [4]:

$$\eta_{kl}=W\left(\frac{1}{\tau_i}\frac{\partial\tau_i}{\partial\sigma_{kl}}-\operatorname{tg}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{kl}}\right),\qquad W=\sigma_{kl}\eta_{kl} \tag{1.1}$$

где σ_{kl}, η_{kl} — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций; τ_i, γ_i — интенсивности касательных напряжений и скоростей деформаций сдвига; φ, ψ — углы вида напряженного и деформированного состояния; ω — фаза подобия девиаторов; W — диссипативная функция. Предполагается, что функции $W=W(\tau_i,\varphi)$, $\omega=\omega(\tau_i,\varphi)$ дифференцируемы по своим аргументам в некоторой области пространства инвариантов τ_i, φ.

Если существует $\Phi(\tau_i,\varphi)$, такая, что

$$\partial\Phi/\partial\tau_i=W/\tau_i,\qquad \partial\Phi/\partial\varphi=-W\operatorname{tg}\omega \tag{1.2}$$

то (1.1) принимает вид $\eta_{kl}=\partial\Phi/\partial\sigma_{kl}$, т. е. $\Phi(\tau_i,\varphi)$ является потенциалом скоростей деформаций ползучести. Если, следуя общепринятой схеме [1], считать W однородной функцией напряжений степени $n+1$, то в этом случае $\Phi=W/(n+1)$.

Хотя известные данные [1, 5] делают гипотезу существования потенциала ползучести вероятной, это предположение существенно ограничивает возможности описания ползучести и не вытекает из какого-либо общего термодинамического принципа. Однако принятие этого предположения позволяет сформулировать для ползучести вариационные принципы, которые можно положить в основу эффективных приближенных методов решения задач. Роль приближенных методов еще более возрастает для теории ползучести сложных сред, однако область применимости классических вариационных принципов ограничена ассоциированными законами.

Поставим задачу о вариационной формулировке для случая закона установившейся ползучести общего вида (1.1), основанной на концепции локального потенциала.

2. Пусть изучаемый процесс установившейся ползучести описывается неассоциированными законами течения общего вида (1.1). В этом случае не существует $\Phi(\tau_i, \varphi)$, удовлетворяющей (1.2). Введем $\Phi^0(\tau_i, \varphi, \tau_i^0, \varphi^0)$ — функцию варьируемых τ_i, φ и неварьируемых τ_i^0, φ^0 параметров, такую, что

$$\partial\Phi^0/\partial\tau_i \Big|_{\substack{\tau_i=\tau_i^0\\ \varphi=\varphi^0}} = W/\tau_i^0, \qquad \partial\Phi^0/\partial\varphi \Big|_{\substack{\tau_i=\tau_i^0\\ \varphi=\varphi^0}} = -W \operatorname{tg}\omega \tag{2.1}$$

Тогда Φ^0 может служить потенциалом ползучести для выбранного закона течения при дополнительных условиях $\tau_i=\tau_i^0$, $\varphi=\varphi^0$, которые в соответствии с принципом локального потенциала [2] используются после выполнения операции дифференцирования. Следуя [2], назовем Φ^0 локальным потенциалом.

В силу (2.1) на основе Φ^0 можно сформулировать локальный принцип минимума дополнительного рассеяния. Действительно, пусть σ_{kl}, η_{kl} — напряжения и скорости деформаций в истинном состоянии. Рассмотрим бесконечно близкое к нему статически возможное напряженное состояние $\sigma_{kl}+\delta\sigma_{kl}$, такое, что $\delta\sigma_{kl,l}=0$, $\delta\sigma_{kl}n_k=0$. Тогда уравнение равновесия в форме Лагранжа [1] можно записать

$$\int_V \eta_{kl}\delta\sigma_{kl}\, dV = \int_V (W/\tau_i\delta\tau_i - W \operatorname{tg}\omega\delta\varphi)\, dV = 0$$

Используя (2.1), получим

$$\int_V \eta_{kl}\delta\sigma_{kl}\, dV = \int_V \left(\frac{\partial\Phi^0}{\partial\tau_i}\delta\tau_i + \frac{\partial\Phi^0}{\partial\varphi}\delta\varphi\right)\Big|_{\substack{\tau_i=\tau_i^0\\ \varphi=\varphi^0}} dV = \delta\int_V \Phi^0\, dV \Big|_{\substack{\tau_i=\tau_i^0\\ \varphi=\varphi^0}} =$$
$$= \delta\Phi^{\smile 0}\Big|_{\substack{\tau_i=\tau_i^0\\ \varphi=\varphi^0}} = 0 \tag{2.2}$$

Таким образом, действительные напряжения в среде, свойства которой описываются законом течения

$$\eta_{kl} = \partial\Phi^0/\partial\sigma_{kl}\Big|_{\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^0} \tag{2.3}$$

должны быть такими, чтобы функционал $\Phi^{\smile 0}$ был стационарен при условии, что напряжения являются статически возможными.

Для того чтобы положить принцип стационарности (2.2) в основу вариационной техники, необходимо убедиться, что истинные напряжения в среде доставляют минимум функционалу в стационарной точке

$$\Delta\Phi^{\smile 0} = \Phi^{\smile 0}(\tau_i, \varphi, \tau_i^0, \varphi^0) - \Phi^{\smile 0}(\tau_i^0, \varphi^0, \tau_i^0, \varphi^0) > 0 \tag{2.4}$$

В этом случае (2.2) может служить обоснованием прямых методов решения задач ползучести, поставленных на основе закона (2.3). Таким образом, конкретный вид локального потенциала ползучести $\Phi^0(\tau_i, \varphi, \tau_i^0, \varphi^0)$ выбирается так, чтобы кроме условия первого порядка (2.2) выполнялось условие более высокого порядка (2.4) для абсолютного минимума. Необходимо отметить, что минимум $\Phi^{\smile 0}$ определяет стационарное состояние лишь при условии, что функции от τ_i^0, φ^0, входящие в выражение для Φ^0, вычисляются для стационарного состояния и не подвергаются варьированию вблизи этого состояния.

Как и в классической теории [1], из предположения о существовании локального потенциала скоростей ползучести немедленно следует существование локального потенциала напряжений. Действительно, введем $U^0 = W - \Phi^0$ — функцию локальных η_{kl}^0 и варьируемых η_{kl} переменных. Дифференцируя, получим $\partial U^0/\partial\eta_{kl} = \sigma_{kl} + \eta_{ij}\partial\sigma_{ij}/\partial\eta_{kl} - (\partial\Phi^0/\partial\sigma_{ij})(\partial\sigma_{ij}/\partial\eta_{kl})$, что с учетом (2.3) дает

$$\sigma_{kl} = \partial U^0/\partial\eta_{kl}\Big|_{\eta_{kl}=\eta_{kl}^0} \tag{2.5}$$

Будем называть $U^0(\eta_{kl}, \eta_{kl}^0)$ локальным потенциалом напряжений.

Ясно, что U^0 может служить основой для формулировки локального принципа минимума полной мощности. Действительно, пусть тело находится в состоянии установившейся ползучести под действием объемных сил и поверхностных сил F_i, T_i, заданных на части поверхности S_1, и пусть на оставшейся части поверхности S_2 заданы скорости перемещений точек поверхности $v_i^{\vee}$. Наряду с истинным полем скоростей v_i рассмотрим бесконечно близкое к нему поле $v_i+\delta v_i$, удовлетворяющее тем же кинематическим условиям. Тогда уравнение равновесия в форме Лагранжа имеет вид [1]:

$$\int\limits_V F_i\delta v_i\,dV+\int\limits_{S_1} T_i\delta v_i\,dS-\int\limits_V \sigma_{ij}\delta\eta_{ij}\,dV=0$$

В силу (2.5) получим

$$\delta\left\{\int\limits_V F_iv_i\,dV+\int\limits_S T_iv_i dS\right\}-\int\limits_V \frac{\partial U^0}{\partial\eta_{ij}}\bigg|_{\eta_{ij}=\eta_{ij}^0}\delta\eta_{ij}\,dV=\delta(A-U^{\vee 0})\Big|_{\eta_{ij}=\eta_{ij}^0}=0 \tag{2.6}$$

Действительные скорости перемещений в теле, свойства ползучести которого описываются законом (2.5), должны быть такими, чтобы функционал $A-U^{\vee 0}$ был стационарен при условии, что скорости перемещений удовлетворяют заданным кинематическим граничным условиям $v_i=v_i^{\vee}$ на S_2. Конкретный вид локального потенциала напряжений U^0 следует выбирать так, чтобы условие абсолютного минимума $\Delta(A-U^{\vee 0})>0$ выполнялось в стационарной точке.

Используя (2.6) в качестве основы прямых методов, следует считать, что при малых вариациях вблизи стационарного состояния η_{ij}^0 считаются постоянными и только после завершения процесса варьирования налагается дополнительное условие $\eta_{ij}=\eta_{ij}^0$.

Введенным локальным потенциалам Φ^0, U^0 можно придать некоторый физический смысл [2], однако независимо от их физической интерпретации построенные на их основе функционалы можно использовать в приложениях в качестве основы приближенных методов решения задач. Применим метод локального потенциала для исследования установившейся ползучести среды, свойства которой зависят от вида напряженного состояния (равносопротивляющейся среды).

3. Известно, что материалам сложной природы присуще свойство равносопротивляемости при растяжении и сжатии [4, 6]. Для описания таких свойств ползучести в определяющие уравнения необходимо ввести нечетные инварианты. В [4] показано, что если исходить из постулата устойчивости в малом, то предпочтение следует отдать углу вида напряженного состояния. Однако определяющие соотношения, основанные на этом выборе, будут тензорно-нелинейными. В [4] предложено использовать тензорно-линейную форму этих соотношений, положив $\omega=0$, а все особенности поведения материала описать выбрав аргументами диссипативной функции W инварианты τ_i, φ. Тогда из (1.1) имеем тензорно-линейную связь

$$\eta_{kl}=(W/\tau_i)(\partial\tau_i/\partial\sigma_{kl}) \tag{3.1}$$

Если считать W однородной функцией компонент напряжений степени $n+1$, то выбор $W=B(\varphi)\tau_i^{n+1}$ приводит к неассоциированному закону ползучести

$$\gamma_i=B(\varphi)\tau_i^n(\omega=0),\qquad \eta_{kl}=B(\varphi)\tau_i^n\partial\tau_i/\partial\sigma_{kl} \tag{3.2}$$

Причем зависимости (3.1), (3.2) оказываются более надежными как с физической, так и с математической точки зрения по сравнению с исходными тензорно-нелинейными [4].

Покажем, что, например, функцию

$$\Phi^0(\tau_i,\ \varphi,\ \tau_i^0,\ \varphi^0)={}^1/_2B(\varphi^0)(\tau_i^0)^{n-1}\tau_i^2 \tag{3.3}$$

в качестве локального потенциала можно положить в основу вариационных методов решения задач данной теории. Действительно, условие первого порядка (2.2) для данной функции выполнено, так как (3.3) удовлетворяет (2.1) и, следовательно

$$\delta\Phi^{\vee 0}=\int\limits_V B(\varphi^0)(\tau_i^0)^n\delta\tau_i\,dV=0 \tag{3.4}$$

Исследуем природу этого экстремума. Для этого вычислим $\Delta\Phi^{\vee 0}(\tau_i, \varphi, \tau_i^0, \varphi^0)$ вблизи стационарного состояния

$$\Delta\Phi^{\vee 0}=\int\limits_V \Phi^0(\tau_i^0+\delta\tau_i, \varphi^0+\delta\varphi, \tau_i^0, \varphi^0)\,dV- \tag{3.5}$$

$$-\int\limits_V \Phi^0(\tau_i^0, \varphi^0, \tau_i^0, \varphi^0)\,dV={}^1/_2\int\limits_V B(\varphi^0)(\tau_i^0)^{n-1}\{(\tau_i^0+\delta\tau_i)^2-(\tau_i^0)^2\}\,dV$$

Раскрывая скобки в правой части (3.5), видно, что линейный по $\delta\tau_i$ член равен нулю в силу (3.4). Следовательно, вблизи стационарного состояния $\Delta\Phi^{\vee 0}={}^1/_2\int B(\varphi^0)(\tau_i^0)^{n-1}(\delta\tau_i)^2dV\geqslant 0$ и экстремум $\Phi^{\vee 0}$ является абсолютным минимумом.

Локальный потенциал является функцией двух типов переменных: варьируемых τ_i, φ и неварьируемых τ_i^0, φ^0. Минимум $\Phi^{\vee 0}$ определяет стационарное состояние лишь при условии, что функция $B(\varphi^0)(\tau_i^0)^{n-1}$ вычисляется для стационарного состояния и не подвергается варьированию вблизи этого состояния, что определяет некоторые отличия в технике прямых методов, основанных на этом принципе. Основным методом решения задач, основанных на концепции локального потенциала, является метод самосогласованных приближений [2, 7].

4. Рассмотрим задачу об установившейся ползучести круглой пластины, изготовленной из материала, свойства которого при ползучести зависят от вида деформированного состояния и, по аналогии с изложенным в п. 3, описываются неассоциированным законом вида

$$\tau_i=B^*(\psi)\gamma_i^\mu \qquad (\omega=0) \tag{4.1}$$

Следуя [8], функцию $B^*(\psi)$ выберем в виде

$$B^*(\psi)=B^*(1+\alpha\eta+\beta\eta^2) \qquad (\eta=\cos 3\psi) \tag{4.2}$$

где B^*, α, β — константы, определяемые из экспериментальных данных на кручение, растяжение и сжатие по методике, изложенной в [8]. Такой выбор позволяет описать не только различие свойств при растяжении и сжатии, но и независимость свойств при кручении.

Пусть пластина нагружена осесимметричной нагрузкой интенсивности P и для нее справедливы допущения, принятые в соответствующей классической задаче [9]. Вычисляя необходимые инварианты согласно принятым допущениям, получим

$$\gamma_i=2|z|\frac{1}{b^2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}\right)^2+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)^2\right\}^{1/2}=2|z|\frac{K}{b^2}$$

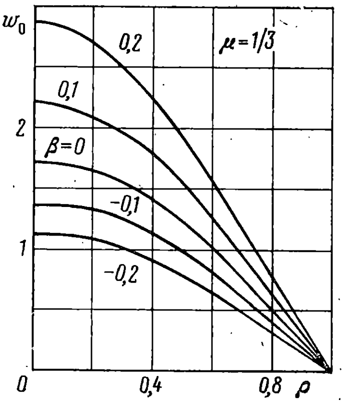
$$\eta=\frac{3\sqrt{3}}{2K^3}\,\mathrm{sign}\,z\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}\right) \tag{4.3}$$

где w — скорость прогиба, $\rho=r/b$ — безразмерная радиальная координата.

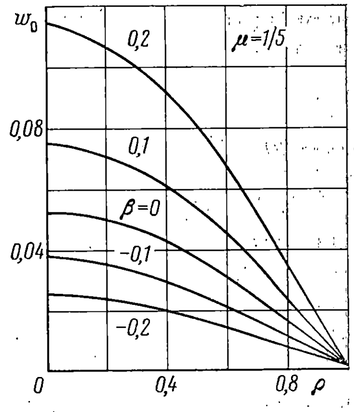
В соответствии с (3.3) определим локальный потенциал напряжений

$$U^0(\gamma_i, \psi, \gamma_i^0, \psi^0)={}^1/_2B^*(1+\alpha\eta^0+\beta(\eta^0)^2)(\gamma_i^0)^{\mu-1}\gamma_i^2 \tag{4.4}$$

По аналогии с изложенным в п. 3 (4.4) определяет закон ползучести (4.1) при дополнительных условиях $\psi=\psi^0$, $\gamma_i=\gamma_i^0$. В окрестности стационарного состояния функционал $U^{\vee 0}-A$, где A — мощность заданных внеш-



Фиг. 1



Фиг. 2

них сил, достигает глобального минимума. При принятых условиях нагружения [9] $A=2\pi b^2 \int Pw(\rho)\rho d\rho$ $(0\leqslant\rho\leqslant 1)$.

Подставляя (4.2), (4.3) в (4.4) и интегрируя по толщине пластины, найдем

$$U^{\sim 0}=\frac{\pi D}{b^{2\mu}}\int_0^1 (1+\beta(\eta^0)^2)(K^0)^{\mu-1}K^2\rho\, d\rho, \qquad D=\frac{B^*}{2+\mu}(2h)^{2+\mu}$$

Таким образом, в рамках допущений классической теории ползучести осесимметричных пластин учет разносопротивляемости растяжению и сжатию сводится к обобщению константы материала B^*, в то время как учет независимости свойств при кручении приводит к качественным различиям.

Согласно сформулированному в п. 3 вариационному принципу, решение задачи об изгибе пластины из материала, свойства которого описываются законом (4.1), эквивалентно минимизации функционала $U^{\sim 0}-A$ при дополнительном условии $w=w^0$.

Положим $w=\Sigma c_i w_i$, $w^0=\Sigma c_i^0 w_i$, где w_i удовлетворяют заданным граничным условиям. Параметры c_i^0 должны быть определены так, чтобы $\partial(U^{\sim 0}-A)/\partial c_i=0$. После выполнения такого дифференцирования необходимо положить $c_i=c_i^0$, что эквивалентно учету дополнительного условия. Такое приближение называют самосогласованным [2].

Численный анализ проводился для шестипараметрического приближения, базисные функции которого удовлетворяли лишь существенным граничным условиям для свободно оперной пластины $w_i=T_i^*-1$, где T_i^* — смещенные полиномы Чебышева. Результирующая система нелинейных алгебраических уравнений решалась с помощью метода Стефенсона. Исследовалось влияние разносопротивляемости материала на распределение скоростей безразмерных прогибов $w_0=10^3(w/b^2)(D/(\pi b^2))^{1/\mu}$ для различных значений степени $\mu={}^1/_3$, ${}^1/_5$ (фиг. 1, 2).

Основные недостатки предложенных ранее вариационных формулировок резюмированы в [10]. Как показывает проведенный анализ, принцип локального потенциала в применении к задачам теории ползучести свободен, по крайней мере, от части этих недостатков. Использование этой концепции не требует дополнительных усилий для формулировки вариационного принципа, так как требуемый функционал может быть построен без упоминания об основном уравнении задачи. Кроме того, концепцию локального потенциала легко распространить на задачи с начальными данными и задачи на собственные значения [2, 7], для которых другие обобщенные вариационные формулировки мало пригодны [10].

В [2, 7] показано, что самосогласованный метод при численной реализации сводится к методу Галеркина. Таким образом, этот вариационный принцип сохраняет положительные черты классических вариационных формулировок, такие, как компактность выражений, простота учета граничных условий и возможность использования прямых методов. Это позволяет рекомендовать принцип локального потенциала как эффективный прием исследования сложных задач теории ползучести.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука. 1966. 752 с.
2. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир. 1973. 280 с.
3. *Туровцев Г. В.* Принцип локального потенциала в теории установившейся ползучести сложных сред // Вторая Всесоюз. конф. «Ползучесть в конструкциях»: Тез. докл. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1984. С. 84.
4. *Цвелодуб И. Ю.* О построении определяющих уравнений установившейся ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 3. С. 104—110.
5. *Соснин О. В.* К вопросу о существовании потенциала ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 5. С. 85—89.
6. *Никитенко А. Ф., Соснин О. В., Торшенов Н. Г.* О разрушении вследствие ползучести // ПМТФ. 1973. № 6. С. 140—143.
7. *Шехтер Р. С.* Вариационный метод в инженерных расчетах. М.: Мир. 1971. 291 с.
8. *Цвелодуб И. Ю.* О некоторых подходах к описанию установившейся ползучести в сложных средах // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-е ин-та гидродинамики СО АН СССР. 1976. Вып. 25. С. 113—121.
9. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз. 1960. 455 с.
10. *Митчел Э., Уэйт Т.* Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир. 1981. 216 с.

Запорожье

Поступила в редакцию
31.X.1986