МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1988

УДК 533.6.013.42

КОЛЕБАНИЯ ШЛАНГА С НЕРАВНОМЕРНО ТЕКУЩЕЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

ПОПОВ В. В.

Рассматривается задача о поперечных колебаниях неоднородного шланга при протекании по нему сжимаемой невязкой жидкости. Для случая стационарного течения жидкости приводится преобразование, сводящее задачу о колебаниях участка шланга к задаче о колебаниях участка неоднородной струны, масса которой зависит от скорости движения жидкости. В случае линейно зависящей от координаты плотности жидкости даны точное, а также более простое асимптотическое решения задачи о собственных колебаниях участка шланга с однородными граничными условиями.

1. Пусть имеется неоднородный переменного поперечного сечения площади S шланг, ось которого является прямой линией. По шлангу со скоростью v, постоянной в каждом сечении, течет жидкость плотности ρ. Будем считать, что характерные масштабы изменения всех переменных в продольном направлении велики по сравнению с диаметром шланга, так что возможно одномерное описание. Обозначим линейную плотность шланга r_1, линейную плотность жидкости r, давление в жидкости p, суммарное по сечению давление П, тогда $r=\rho S$, $\Pi=pS$. Примем, что плотность r_1 зависит только от координаты x, остальные переменные зависят также и от времени t.

Уравнения малых поперечных колебаний шланга получим из соотношений баланса поперечного импульса с учетом продольного движения жидкости. Изменение импульса за промежуток времени dt на отрезке $[x, x+dx]$ происходит в результате конвективного переноса через границы потоком жидкости, действия натяжения шланга T и давления в жидкости П, а также действия поперечной силы F:

$$[r_1u_t+r(u_t+vu_x)]\,|_t^{t+dt}\,dx=rv(u_t+vu_x)\,|_{x+dx}^{x}\,dt+u_x(T-\Pi)\,|_x^{x+dx}\,dt+F\,dx\,dt$$

где u — отклонение оси шланга от положения равновесия; нижние индексы t и x означают соответствующие частные производные. Отсюда следует уравнение

$$(r_1+r)u_{tt}+2rvu_{tx}+(\Pi+rv^2-T)u_{xx}+[r_t+(rv)_x](u_t+vu_x)+$$
$$+r(v_t+vv_x)u_x+(\Pi_x-T_x)u_x=F \qquad (1.1)$$

Это уравнение можно упростить, если воспользоваться уравнением неразрывности и уравнением продольного движения жидкости

$$r_t+(rv)_x=0 \qquad (1.2)$$

$$r(v_t+vv_x)\equiv(rv)_t+(rv^2)_x=-\Pi_x+pS_x+F_n \qquad (1.3)$$

где F_n — действующая на жидкость продольная сила, отнесенная к единице длины. С учетом (1.2) и (1.3) уравнение (1.1) примет вид

$$(r_1+r)u_{tt}+2rvu_{tx}-(T-\Pi-rv^2)u_{xx}+(-T_x+pS_x+F_n)u_x=F \qquad (1.4)$$

Будем считать поток стационарным. Тогда переменные r, v, p, П, S будут функциями только координаты x, то же будем предполагать и относительно T. При этом вместо (1.2) и (1.3) будем иметь соотношения

$$rv=Q=\text{const}, \quad (\Pi+rv^2)_x=pS_x+F_n \tag{1.5}$$

Отметим, что для стационарного течения последние два члена в уравнении (1.4) можно записать в виде $-[(T-\Pi-rv^2)u_x]_x$.

Рассмотрим задачу о колебаниях шланга на отрезке $[0, l]$ с граничными условиями

$$u(t, 0)=u(t, l)=0 \tag{1.6}$$

В случае однородного шланга и постоянной скорости течения линейной заменой независимых переменных задачу можно свести к задаче о колебаниях отрезка струны [1]. Для задачи (1.4), (1.6) также нетрудно найти преобразование, сводящее ее к задаче о колебаниях неподвижной неоднородной струны с теми же граничными условиями. Оно имеет вид

$$y=x, \quad \tau=t+\varphi(x), \quad \varphi(x)=Q\int_0^x \frac{dx}{T-\Pi-Qv} \tag{1.7}$$

Будем считать $T-\Pi-Qv\geqslant\varepsilon>0$.

В результате преобразования (следует учесть, что для не зависящих от времени величин, например T, справедливо соотношение $T_x=T_y$) вместо (1.4) получим уравнение

$$R(y)u_{\tau\tau}-[\theta(y)u_y]_y=F \tag{1.8}$$

$$R=r_1+r+Q^2/\theta, \quad \theta=T-\Pi-Qv \tag{1.9}$$

Кроме центробежной силы Qv движение жидкости ведет к появлению зависящего от скорости члена в выражении для плотности струны R, который можно назвать динамической плотностью струны.

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях для уравнения (1.8). Представляя функцию u в виде $u=U(y)\exp(i\omega\tau)$, получим краевую задачу

$$\frac{d}{dy}\left[\theta(y)\frac{dU}{dy}\right]+\lambda R(y)U=0, \quad U(0)=U(l)=0 \tag{1.10}$$

где $\lambda=\omega^2$, причем $R(y)$, $\theta(y)>0$ на отрезке $[0, l]$. Свойства решений задачи (1.10) хорошо известны [2, 3]. Существует бесконечное множество положительных однократных собственных значений λ_k $(k=1, 2, \ldots)$, причем $\lambda_k\to\infty$ при $k\to\infty$. Соответствующие им собственные функции U_k образуют полную систему и ортогональны с весом R на $[0, l]$; k-я собственная функция имеет $(k-1)$ нулей внутри этого промежутка. В переменных t, x имеем

$$u_k(t, x)=U_k(x)[C_1\cos\omega_k(t+\varphi(x))+C_2\sin\omega_k(t+\varphi(x))]$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Свойства решений задачи (1.10) определяют соответствующие свойства собственных колебаний шланга. Например, k-е собственное колебаний имеет $(k-1)$ узлов внутри $[0, l]$.

Приведем также асимптотические формулы для λ_k и U_k на отрезке $[a, b]$, справедливые для больших k:

$$\lambda_k=k^2\pi^2\left[\int_a^b\left(\frac{R}{\theta}\right)^{1/2}dy\right]^{-2} \tag{1.11}$$

$$U_k=\left(\frac{2}{l}\right)^{1/2}(\theta R)^{-1/4}\sin\left[\frac{k\pi}{l}\int_a^y\left(\frac{R}{\theta}\right)^{1/2}dy\right] \tag{1.12}$$

2. Приведем пример, когда задача о собственных колебаниях имеет точное решение. Пусть по однородному шлангу (r_1, S, T постоянны) течет сжимаемая жидкость (газ) из сосуда с большим давлением в сосуд с меньшим, так что плотность жидкости зависит от координаты линейно: $r=r_0-\alpha x$. В этом случае из (1.5) следует, что полный импульс жидкости

постоянен: $rv^2+\Pi=\text{const}$, отсюда также $\theta=T-rv^2-\Pi=\text{const}$. Запишем плотность струны (1.9) в виде $R=r_2-\alpha x$, $r_2=r_1+r_0+Q^2/\theta$. Уравнение (1.10) принимает вид

$$U''+\lambda_k\theta^{-1}(r_2-\alpha x)U=0 \tag{2.1}$$

Заменой $z=[\theta/(\lambda_k\alpha)]^{1/3}y+r_2/\alpha$ оно сводится к уравнению Эйри $U''-zU=0$, причем $z\in[-\lambda_k^{1/3}\eta_2,\ -\lambda_k^{1/3}\eta_1]$, где $\eta_1=(\alpha/\theta)^{1/3}(r_2/\alpha-l)$, $\eta_2=(\alpha/\theta)^{1/3}r_2/\alpha$.

Собственные значения λ_k определяются из уравнения

$$\mathrm{Ai}(-\lambda_k^{1/3}\eta_1)\,\mathrm{Bi}(-\lambda_k^{1/3}\eta_2)-\mathrm{Ai}(-\lambda_k^{1/3}\eta_2)\,\mathrm{Bi}(-\lambda_k^{1/3}\eta_2)=0 \tag{2.2}$$

где Ai, Bi — первая и вторая функция Эйри. Собственные функции имеют вид (C — нормировочная постоянная):

$$U_k=C[\mathrm{Ai}(z)\,\mathrm{Bi}(-\lambda_k^{1/3}\eta_1)-\mathrm{Ai}(-\lambda_k^{1/3}\eta_1)\,\mathrm{Bi}(z)]$$

или

$$U_k=C[\mathrm{Ai}\,\{(\lambda_k\alpha/\theta)^{1/3}(x-r_2/\alpha)\}\,\mathrm{Bi}\,\{(\lambda_k\alpha/\theta)^{1/3}(l-r_2/\alpha)\}-$$
$$-\mathrm{Ai}\,\{(\lambda_k\alpha/\theta)^{1/3}(l-r_2/\alpha)\}\,\mathrm{Bi}\,\{(\lambda_k\alpha/\theta)^{1/3}(x-r_2/\alpha)\}] \tag{2.3}$$

Для отрицательных значений аргумента функции Эйри имеют асимптотику при $z\to-\infty$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ai}(z)&=\pi^{-1/2}|z|^{-1/4}\cos({}^2/_3|z|^{3/2}-\pi/4)\\ \mathrm{Bi}(z)&=\pi^{-1/2}|z|^{-1/4}\cos({}^2/_3|z|^{3/2}+\pi/4)\end{aligned} \tag{2.4}$$

Если воспользоваться соотношениями (2.4), то (2.2) переходит в уравнение $\sin\,[{}^2/_3\lambda_k^{1/2}(\eta_2^{3/2}-\eta_1^{3/2})]=0$ и для ω_k получаем формулу

$$\omega_k=\lambda_k^{1/2}={}^3/_2k\pi\alpha\theta^{1/2}[r_2^{3/2}-(r_2-\alpha l)^{3/2}]^{-1} \tag{2.5}$$

а вместо (2.3) имеем

$$U_k=C(r_2-\alpha x)^{-1/4}\sin\{k\pi[r_2^{3/2}-(r_2-\alpha x)^{3/2}][r_2^{3/2}-(r_2-\alpha l)^{3/2}]^{-1}\} \tag{2.6}$$

Те же выражения можно получить, если применить формулы (1.11) и (1.12) к решениям уравнения (2.1), однако полученные на основе выражений (2.4) они справедливы и для малых k, если минимальное значение $|z|$, равное

$$|z_1|=\lambda_k^{1/3}\eta_1=({}^3/_2\pi k)^{2/3}(r-\alpha l)[r_2^{3/2}-(r_2-\alpha l)^{3/2}]^{-2/3}$$

не будет «слишком мало». (Если изменение плотности струны (1.9) на отрезке $[0,\ l]$, равное $\alpha l/r_2$, не превосходит $^1/_3$, то $|z_1|\approx 3$ и значения функций Эйри, вычисленные по формулам (2.4), отличаются от табличных в третьих значащих цифрах, что гарантирует точность в два знака приближений (2.5), (2.6) уже для $k=1$.)

Возвращаясь к общему случаю, запишем уравнение (1.8) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}\left[1+\frac{(r_1+r)(T-\Pi-Qv)}{Q^2}\right]-\frac{T-\Pi-Qv}{Q}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{T-\Pi-Qv}{Q}\frac{\partial u}{\partial y}\right]=F \tag{2.7}$$

Если вместо y ввести переменную $\zeta=\varphi(y)$, где φ дается формулой (1.7), то уравнение (2.7) примет вид

$$u_{\tau\tau}[1+\beta(\zeta)]-u_{\zeta\zeta}=f(\tau,\ \zeta) \tag{2.8}$$

Для достаточно интенсивных течений, когда динамическая плотность шланга с жидкостью значительно больше статической, функция $\beta(\zeta)\ll1$ и к уравнению (2.8) можно применить теорию возмущений. Если ограничиться первым приближением, положив $\beta(\zeta)=0$, то для собственных частот и собственных функций получим

$$\omega_k=k\pi/\varphi(l),\qquad U_k=\sin\,[k\pi\varphi(y)/\varphi(l)] \tag{2.9}$$

Рассмотрим в качестве примера колебания каната, движущегося вертикально вверх с учетом влияния силы тяжести. Модель каната получается из модели шланга при $r_1=0$, $\Pi=0$, $T=T_0+rgx$. При этом

$$\varphi(x)=rv\int_0^x\frac{dx}{T_0-rv^2+rgx}=\frac{v}{g}\ln\left(1+\frac{rgx}{T_0-rv^2}\right)$$

и формулы (2.9) дают

$$\omega_k=\frac{k\pi g}{v\ln[1+rgl/(T_0-rv^2)]}$$

$$U_k=\sin\left\{k\pi\frac{\ln[1+rgx/(T_0-rv^2)]}{\ln[1+rgl/(T_0-rv^2)]}\right\}$$

Если канат движется вертикально вниз, в предыдущих формулах нужно заменить g на $-g$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горошко О. А., Титова Л. Д.* О свойствах вынужденных колебаний шланга с протекающей жидкостью // Гидромеханика. Вып. 19. Киев: Наук. думка. 1971. С. 53–56.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4. М.: Гостехиздат. 1958. 812 с.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз. 1961. 703 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 17.XII.1984