МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1988

УДК 531.8

О СИНТЕЗЕ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ РОБОТА ПО ПРОГРАММНОЙ ТРАЕКТОРИИ

БУРДАКОВ С. Ф.

Высокое качество отработки программных траекторий способны обеспечить роботы, в системах управления которых используются программируемые вычислительные устройства типа микроЭВМ или микропроцессоров. В данной работе рассматриваются алгоритмы управления, в соответствии с которыми могут программироваться такие вычислительные устройства. Считается, что вычислительное устройство включено в замкнутый контур управления и выполняет функции регулятора, выдавая управляющие сигналы непосредственно на приводы робота [1].

1. Для ряда технологических процессов, например контурной сварки, характерными являются движения рабочего органа робота по достаточно протяженным траекториям с небольшим числом участков разгона и торможения. При этом происходит значительное изменение конфигурации манипулятора. Движения по степеням подвижности в большинстве случаев оказываются существенно взаимосвязанными. Вместе с тем влияние на движение робота ряда факторов, например упругой податливости элементов, силового взаимодействия с объектом, может оказаться несущественным. Синтез алгоритмов управления для таких технологических процессов будем осуществлять на основе динамической модели робота, представленной в виде векторно-матричных уравнений [1]

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{B}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})=\mathbf{Q}+\mathbf{Q}_w,\quad \tau\mathbf{Q}^{\cdot}+\mathbf{Q}=\varphi(\mathbf{u},\ \mathbf{q}^{\cdot}) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{q}$ — вектор обобщенных координат, характеризующий текущую конфигурацию манипулятора; $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ — матрица инерционных коэффициентов; $\mathbf{B}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})$ — векторная функция, составляющие которой включают в себя центробежные и кориолисовы силы и моменты сил инерции, силы и моменты сил тяжести, трения и так далее; $\mathbf{Q}$ — вектор обобщенных сил, составляющие которого есть приведенные к координатам $\mathbf{q}$ силы и моменты, развиваемые приводами; $\mathbf{Q}_w$ — вектор возмущающих сил и моментов; τ и $\varphi(\mathbf{u},\ \mathbf{q}^{\cdot})$ — диагональная матрица постоянных времени и векторная функция статических характеристик системы приводов робота; $\mathbf{u}$ — вектор управляющих воздействий.

Пусть в динамической модели (1.1) число n обобщенных координат q_i ($i=1,\ 2,\ldots,\ n$) равно числу управляемых степеней подвижности (считается, что по каждой степени подвижности имеется независимый привод). Будем пренебрегать постоянными времени приводов, считая их малыми по сравнению с постоянными времени, характеризующими процесс отработки траектории. Заметим, что для рассматриваемых ниже алгоритмов это предположение не является принципиальным [2, 3]. Кроме того, будем считать, что статические характеристики приводов линейны относительно управлений u_i ($i=1,\ 2,\ldots,\ n$).

С учетом сделанных предположений объединим уравнения (1.1)

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{B}^*(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})=\mathbf{d}\mathbf{u}+\mathbf{Q}_w \tag{1.2}$$

где $\mathbf{d}$ — неособая $n\times n$ матрица, элементы которой определяются через конструктивные параметры приводов; $\mathbf{B}^*(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})$ — новая векторная функция, в которую включены составляющие из правой части уравнения системы приводов, зависящие от $\mathbf{q}^{\cdot}$.

При наличии в системе управления робота вычислительного устройства вектор управляющих воздействий можно сформировать в соответствии с выражением $\mathbf{u}=\mathbf{d}^{-1}[\mathbf{B}^*(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})+\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{q}_p, \mathbf{q}_p^{\cdot}, \mathbf{q}_p^{\cdot\cdot})]$. Для этого требуется информация с датчиков обратных связей и из программного блока, где должны находиться заранее рассчитанные, например в процессе обучения робота, $\mathbf{q}_p(t)$, $\mathbf{q}_p^{\cdot}(t)$ и $\mathbf{q}_p^{\cdot\cdot}(t)$, соответствующие программной траектории. Предполагается, что по каждой из степеней подвижности робота производится измерение положения $q_i(t)$ и скорости $q_i^{\cdot}(t)$. Такой набор датчиков обратных связей является характерным для современных роботов. В результате при точных измерениях и отсутствии возмущений из уравнения (1.2) получим уравнение

$$\mathbf{q}^{\cdot\cdot}=\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{q}_p, \mathbf{q}_p^{\cdot}, \mathbf{q}_p^{\cdot\cdot}) \qquad (1.3)$$

Выбирая правую часть уравнения (1.3), будем выделять два основных режима движения робота: режим отслеживания программной траектории (режим малых рассогласований) и выхода на программную траекторию (режим больших рассогласований). Для режима малых рассогласований при

$$\mathbf{v}=\mathbf{q}_p^{\cdot\cdot}-\mathrm{diag}\,\{\alpha_{1i}\}(\mathbf{q}^{\cdot}-\mathbf{q}_p^{\cdot})-\mathrm{diag}\,\{\alpha_{2i}\}(\mathbf{q}-\mathbf{q}_p) \qquad (1.4)$$

уравнения (1.3) полностью распадаются. Выбором элементов α_{1i} и α_{2i} соответствующих диагональных матриц можно обеспечить желаемый закон изменения ошибки отслеживания программной траектории $\mathbf{e}=\mathbf{q}-\mathbf{q}_p$. Действительно, подставляя выражение (1.4) в уравнение (1.3), получим уравнение для ошибки

$$\mathbf{e}^{\cdot\cdot}+\mathrm{diag}\,\{\alpha_{1i}\}\mathbf{e}^{\cdot}+\mathrm{diag}\,\{\alpha_{2i}\}\mathbf{e}=0 \qquad (1.5)$$

При выборе элементов α_{1i} и α_{2i} необходимо учитывать, что движения по различным степеням подвижности происходят совместно. Кроме того, α_{1i} и α_{2i} должны быть согласованы с характеристиками приводов так, чтобы не нарушались ограничения

$$|u_i|\leqslant u_{i\,\max} \qquad (1.6)$$

и постоянные времени приводов τ_i оставались существенно меньше постоянных времени, характеризующих переходные процессы $e_i(t)$.

Для режима больших рассогласований элементы векторной функции $\mathbf{v}$ целесообразно выбирать из условия максимального быстродействия для каждого из уравнений системы (1.3). Согласно [4], в системе (1.3) этого можно достичь при релейном управлении

$$v_i=q_{ip}^{\cdot\cdot}-l_i\,\mathrm{sign}\,[q_i-q_{ip}+{}^1/_2(q_i^{\cdot}-q_{ip}^{\cdot})^2\,\mathrm{sign}(q_i^{\cdot}-q_{ip}^{\cdot})/l_i] \qquad (1.7)$$

Причем уровни l_i подбираются такими, чтобы не нарушалось ограничение (1.6). Переход с режима на режим происходит независимо по каждой степени подвижности. Моменты времени, в которые должны изменяться элементы векторной функции, находятся по выполнению или нарушению условий $|e_i|\leqslant e_{ig}$ и $|e_i^{\cdot}|\leqslant e_{ig}^{\cdot}$, где e_{ig} и $e_{ig}^{\cdot}$ определяют заранее установленные малые зоны вблизи состояний $e_i=0$ и $e_i^{\cdot}=0$. Возможны и другие варианты регуляторов для режима больших рассогласований. В простейшем случае это может быть звено, имеющее характеристику с насыщением [4].

Рассмотренный алгоритм предусматривает расчет управляющих воздействий, обеспечивающих компенсацию собственной динамики робота и придание развязанной по степеням подвижности системе желаемых динамических свойств. Несмотря на то что уравнения динамики достаточно хорошо описывают процессы в робототехнических системах [1], точная компенсация невозможна из-за целого ряда причин, в том числе причин случайного характера. Поэтому вместо уравнения (1.5) будем рассматривать уравнение

$$\mathbf{q}^{\cdot\cdot}=\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{q}_p, \mathbf{q}_p^{\cdot}, \mathbf{q}_p^{\cdot\cdot})+\mathbf{z} \qquad (1.8)$$

где $\mathbf{z}$ — вектор возмущений, отражающий неточность компенсации.

Уравнения для обобщенных координат q_i из (1.8) при любом выборе векторной функции $\mathbf{v}$ оказываются взаимосвязанными. Можно поставить задачу синтеза $\mathbf{v}$, при которой влияние возмущений на отработку программной траектории минимально. Относительно простая структура уравнения (1.8) позволяет использовать и более простые приемы теории управления [4, 5].

Численное моделирование для робота с двухзвенным шарнирным манипулятором (на примере робота ПУМА) показало, что установившаяся ошибка отработки траектории, обусловленная постоянной составляющей вектора возмущений $\mathbf{z}$ практически исключается введением в закон (1.4) интегральной составляющей $\operatorname{diag}\{\alpha_{3i}\}\int(\mathbf{q}-\mathbf{q}_p)\,dt$. Учет только постоянной составляющей вектора $\mathbf{z}$ эквивалентен введению в рассмотрение модели возмущения $\dot{\mathbf{z}}=0$. Оставаясь в рамках только линейных векторных функций $\mathbf{v}$, для произвольного вектора $\mathbf{z}$ можно ввести линейную дифференциальную модель общего вида. Объединение ее с уравнением (1.8) позволяет по измерениям $\mathbf{q}$ и $\dot{\mathbf{q}}$ находить оценку вектора $\mathbf{z}$ (при численном моделировании для нахождения оценки использовался редуцированный наблюдатель Люинбергера [5]) и вводить ее как адитивную составляющую в закон (1.4) с целью компенсации реального возмущения $\mathbf{z}$. Диагональная матрица коэффициентов $\operatorname{diag}\{\alpha_{3i}\}$ при интегральной составляющей, а также параметры модели возмущения подбираются в процессе настройки алгоритма.

Для численного моделирования были выбраны прямолинейные траектории с постоянной скоростью движения рабочего органа робота. Учитывались различные возмущающие факторы: начальные рассогласования по координатам и скоростям, случайные возмущающие моменты $\mathbf{Q}_w$ и ошибки измерения координат $\mathbf{q}$ и скоростей $\dot{\mathbf{q}}$, возмущающие моменты $\mathbf{Q}_w$ типа сухого трения, возмущения, обусловленные параметрической и структурной неадекватностью математической модели робота. Устойчивую работу алгоритма можно было обеспечить даже при очень больших (заведомо не достижимых) уровнях возмущений. Ошибки отработки траектории при снижении уровней возмущений убывали практически до нуля. Наибольшее влияние на точность отработки траектории оказывали ошибки измерения координат $\mathbf{q}$.

2. Для технологических процессов, в которых помимо отработки программной траектории требуется управлять силовым взаимодействием робота с объектом, например при обработке сварных швов, сборке и т. п., уравнения движения необходимо рассматривать совместно с уравнениями связей. Пусть на движение робота с n степенями подвижности наложено m ($m<n$) связей в общем случае неголономных, задаваемых векторно-матричным уравнением вида

$$\mathbf{S}(\mathbf{q},\ t)\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{h}(\mathbf{q},\ t)=0 \tag{2.1}$$

где $\mathbf{S}(\mathbf{q},\ t)$ — матрица размера $m\times n$; $\mathbf{h}(\mathbf{q},\ t)$ — векторная функция размера $m\times 1$.

Рассматриваемая система имеет $n-m$ степеней свободы и для управления движением, в принципе, могут быть использованы лишь $n-m$ приводов. Однако в этом случае в местах сопряжения робота с объектом могут возникнуть условия, при которых дальнейшее движение окажется невозможным. Кроме того, в соответствии с технологическим процессом может потребоваться вполне определенное (программное) силовое взаимодействие. Поэтому в общем случае необходимо управлять и остальными m приводами. Будем считать, что на роботе установлен силомоментный датчик (обычно он устанавливается в районе рабочего органа [1]). Силовое взаимодействие робота с объектом можно характеризовать главным вектором $\mathbf{F}$ и главным моментом $\mathbf{M}$, которые получаются приведением к месту установки датчика системы сил нормальных реакций и трения, возникающих в местах контактов. Шестикомпонентный силомоментный датчик позволяет получить полную информацию о силовом взаимодействии.

Составим уравнение движения робота, используя принцип освобождаемости от связей [6]. В отличие от п. 1 дополнительно требуется записать выражение для виртуальной работы главного вектора $\mathbf{F}$ и главного момента $\mathbf{M}$ сил, действующих на робот со стороны отброшенных связей. Введем шестимерный вектор-столбец $\mathbf{V}$, составленный из компонент главного вектора $\mathbf{F}$ и главного момента $\mathbf{M}$. Тогда вместо уравнения (1.2) получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{B}^*(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})=\mathbf{d}\mathbf{u}+\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{V}+\mathbf{Q}_w \qquad (2.2)$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ — матрица Якоби манипулятора размера $6\times n$ [1].

Если считать, что заклинивания отсутствуют, а силы трения пропорциональны силам нормальных реакций (с заданными коэффициентами трения) и направлены против векторов относительных скоростей в точках приложения соответствующих сил нормальных реакций, то среди всех компонент шестимерного вектора $\mathbf{V}$ можно выделить m независимых. Объединим их в вектор $\mathbf{R}$ размера $m\times 1$ и перепишем уравнение (2.2) в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{B}^*(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot})+\mathbf{U}(\mathbf{q})\mathbf{R}=\mathbf{d}\mathbf{u}+\mathbf{Q}_w \qquad (2.3)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{q})$ — матрица размера $n\times m$.

Уравнение движения (2.3) необходимо рассматривать совместно с уравнениями связей (2.1). Продифференцируем уравнение связей (2.1) по времени (для голономных связей дважды) и запишем результат в следующем виде:

$$\mathbf{L}(\mathbf{q},\ t)\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{f}(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot},\ t)=0 \qquad (2.4)$$

Представим уравнения (2.3) и (2.4) в блочной форме, выделив векторы $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ размеров $(n-m)\times 1$ и $m\times 1$ соответственно

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1^{\cdot\cdot}\\ \mathbf{q}_2^{\cdot\cdot}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1^*\\ \mathbf{B}_2^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{U}_1\\ \mathbf{U}_2\end{bmatrix}\mathbf{R}=\mathbf{d}\mathbf{u}+\mathbf{Q}_w \qquad (2.5)$$

$$[\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2]\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1^{\cdot\cdot}\\ \mathbf{q}_2^{\cdot\cdot}\end{bmatrix}+\mathbf{f}=0$$

Исключая из уравнений (2.5) $\mathbf{q}_2^{\cdot\cdot}$ и $\mathbf{R}$, получим

$$\mathbf{G}_1(\mathbf{q},\ t)\mathbf{q}_1^{\cdot\cdot}+\mathbf{H}_1(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot},\ t)=\mathbf{K}_1(\mathbf{q},\ t)(\mathbf{d}\mathbf{u}+\mathbf{Q}_w)$$

$$\mathbf{G}_1=\mathbf{A}_{11}-\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1}\mathbf{A}_{21}-(\mathbf{A}_{12}-\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1}\mathbf{A}_{22})\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_1 \qquad (2.6)$$

$$\mathbf{H}_1=\mathbf{B}_1^*-\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1}\mathbf{B}_2^*-(\mathbf{A}_{12}-\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1}\mathbf{A}_{22})\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{f},\ \mathbf{K}_1=[\mathbf{E},\ -\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1}]$$

Уравнение (2.6) содержит $n-m$ скалярных уравнений. Остальные m уравнений можно получить исключая из уравнений (2.3) и (2.4) вектор ускорений $\mathbf{q}^{\cdot\cdot}$

$$\mathbf{G}_2(\mathbf{q},\ t)\mathbf{R}+\mathbf{H}_2(\mathbf{q},\ \mathbf{q}^{\cdot},\ t)=\mathbf{K}_2(\mathbf{q},\ t)(\mathbf{d}\mathbf{u}+\mathbf{Q}_w)$$

$$\mathbf{G}_2=\mathbf{L}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U},\ \mathbf{H}_2=\mathbf{L}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^*-\mathbf{f},\ \mathbf{K}_2=\mathbf{L}\mathbf{A}^{-1} \qquad (2.7)$$

Уравнения (2.6) и (2.7) образуют замкнутую систему, на основе которой будем строить алгоритмы управления. Пусть датчики обратных связей позволяют измерить $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}^{\cdot}$ и $\mathbf{R}$. Определены программная траектория $\mathbf{q}_p(t)$ и программное силовое взаимодействие $\mathbf{R}_p$. Сформируем вектор управляющих воздействий в соответствии с выражением

$$\mathbf{u}=\mathbf{d}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{K}_1(\mathbf{q}, t)\\ \mathbf{K}_2(\mathbf{q}, t)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{H}_1(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, t)+\mathbf{G}_1(\mathbf{q}, t)\mathbf{v}_1\\ \mathbf{H}_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, t)+\mathbf{G}_2(\mathbf{q}, t)\mathbf{v}_2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_1(\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_1^{\cdot},\ \mathbf{q}_{1p},\ \mathbf{q}_{1p}^{\cdot},\ \mathbf{q}_{1p}^{\cdot\cdot}),\ \mathbf{v}_2=\mathbf{v}_2(\mathbf{R},\ \mathbf{R}_p)$$

При точной компенсации из системы уравнений (2.6) и (2.7) получим

$$\mathbf{q}_1^{\cdot\cdot}=\mathbf{v}_1(\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_1^{\cdot},\ \mathbf{q}_{1p},\ \mathbf{q}_{1p}^{\cdot},\ \mathbf{q}_{1p}^{\cdot\cdot}),\qquad \mathbf{R}=\mathbf{v}_2(\mathbf{R},\ \mathbf{R}_p)$$

Выберем векторные функции $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ следующим образом:

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{q}_{1p}^{\cdot\cdot}-\mathrm{diag}\,\{\alpha_{1j}\}(\mathbf{q}_1^{\cdot}-\mathbf{q}_{1p}^{\cdot})-\mathrm{diag}\,\{\alpha_{2j}\}(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_{1p})\quad (j=1, 2, \ldots, n-m)$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{R}_p-\mathrm{diag}\,\{\beta_k\}\int(\mathbf{R}-\mathbf{R}_p)dt\quad (k=1, 2, \ldots, m)$$

Тогда уравнения для ошибок $\mathbf{e}_1=\mathbf{q}_1-q_{1p}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{R}-\mathbf{R}_p$ в отработке программной траектории и программного силового взаимодействия будут иметь вид

$$\mathbf{e}_1^{\cdot\cdot}+\mathrm{diag}\,\{\alpha_{1j}\}\mathbf{e}_1^{\cdot}+\mathrm{diag}\,\{\alpha_{2j}\}\mathbf{e}_1=0,\quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\cdot}+\mathrm{diag}\,\{\beta_k\}\boldsymbol{\varepsilon}=0$$

Выбор элементов диагональных матриц следует проводить так, чтобы скорости убывания ошибок $\mathbf{e}_1$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ были согласованы. Коррекция алгоритма при неточной компенсации производится с помощью описанных выше приемов. Численное моделирование подтвердило эффективность алгоритма. Заметим, что представление (2.5) не является единственным. Оно зависит от того, как распределены компоненты вектора $\mathbf{q}$ между векторами $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$. Необходимо обеспечить невырожденность матриц $\mathbf{U}_2$ и $\mathbf{L}_2$. Дополнительные требования связываются со структурой матриц, входящих в уравнения (2.6) и (2.7). От нее зависит распределение сил и моментов, развиваемых приводами, по степеням подвижности робота. Это свойство алгоритма можно использовать для минимизации суммарных энергетических затрат на управление. Для изменения структуры матриц в (2.6) и (2.7) допустимо использование уравнений связей в виде (2.1), если из них получаются явные зависимости между обобщенными координатами и скоростями. Это позволяет получить более простые выражения для управляющих воздействий $\mathbf{u}$. В некоторых случаях можно добиться, чтобы все матрицы зависели лишь от векторов $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_1^{\cdot}$. Тогда в алгоритме управления вообще не используются показания датчиков обратных связей, измеряющих координаты $\mathbf{q}_2$ и скорости $\mathbf{q}_2^{\cdot}$. Естественно, что при таких преобразованиях желательно исключить показания наименее точных датчиков.

3. Пусть особенности технологического процесса, а также конструкции робота таковы, что в динамической модели необходимо учесть упругую податливость элементов робота, т. е. дополнительные колебательные степени свободы. Во многих случаях, имеющих практический интерес, робот можно рассматривать как систему с сосредоточенными параметрами, выделяя жесткие элементы, обладающие массой, и безынерционные податливые элементы. Массы и податливости остальных элементов приводятся к выделенным элементам. При таком рассмотрении, как и прежде, можно ориентироваться на модель типа (1.1), в которой среди всех обобщенных координат n основных, q_i (по числу приводов) и s дополнительных φ_i (по числу учитываемых колебательных степеней свободы). Однако при учете упругой податливости элементов робота необходим другой подход при формировании вектора управляющих сигналов.

Робот как объект управления является полностью управляемой системой [5], поэтому имеется принципиальная возможность (при наличии измерений или оценок вектора состояния) отработки программного движения с наперед заданными (с учетом ограничения (1.6)) показателями качества переходного процесса, в том числе и с подавлением упругих колебаний. Покажем это на примере электромеханического робота с плоским шарнирным манипулятором с n степенями подвижности, по каждой из которых учитывается сосредоточенная в шарнире упругая податливость элементов привода. Выберем в качестве обобщенных координаты $\mathbf{q}$, характеризующие перемещения звеньев манипулятора друг относительно друга и координаты $\boldsymbol{\varphi}$, характеризующие упругие перемещения звеньев относительно роторов соответствующих двигателей. Движение роторов двигателей относительно статоров характеризуется в этом случае координатами $\boldsymbol{\psi}=\mathbf{q}-\boldsymbol{\varphi}$ (координаты $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ приведены к звеньям манипулятора). Пусть двигатель, осуществляющий движение i-го звена, расположен на $(i-1)$-м звене. Тогда приведенная угловая скорость i-го ротора $\omega_i=\eta_i^{-1}\Sigma q_\nu^{\cdot}+q_i^{\cdot}-\varphi_i^{\cdot}$, где η_i — передаточное отношение i-го редуктора; суммирование по ν от 1 до $i-1$. Полагая $\omega_i\approx q_i^{\cdot}-\varphi_i^{\cdot}$, запишем общие выражения для кинетической и потенциальной энергии системы и виртуальной работы $T={}^1/_2\mathbf{q}^{\cdot T}\mathbf{A}^*(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot}+{}^1/_2(\mathbf{q}^{\cdot}-\boldsymbol{\varphi}^{\cdot})^T\mathbf{J}(\mathbf{q}^{\cdot}-\boldsymbol{\varphi}^{\cdot})$, $U={}^1/_2\boldsymbol{\varphi}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}$, $\delta\mathbf{W}=\mathbf{Q}^T(\delta\mathbf{q}-\delta\boldsymbol{\varphi})$, где $\mathbf{A}^*(\mathbf{q})$ — матрица инерционных коэффициентов манипулятора; $\mathbf{J}$ и $\mathbf{C}$ — диагональные матрицы приведенных к звеньям манипулятора моментов инерции подвижных частей приводов, расположенных до выделенных упругих элементов, и жесткостей упругих элементов.

Уравнения движения робота имеют вид

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{J}(\mathbf{q}^{\cdot\cdot}-\boldsymbol{\varphi}^{\cdot\cdot})+\mathbf{B}(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot})=\mathbf{Q},\qquad \mathbf{J}(\mathbf{q}^{\cdot\cdot}-\boldsymbol{\varphi}^{\cdot\cdot})-\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{Q} \tag{3.1}$$

где в вектор **B** включены все составляющие, зависящие от $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}^{\cdot}$, которые получаются при выполнении действий с первым слагаемым T в соответствии со структурой уравнений Лагранжа второго рода

Исключая из системы уравнений (3.1) $\boldsymbol{\varphi}^{\cdot\cdot}$, получим уравнение $\mathbf{A}^*(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{B}(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot})=-\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}$, продифференцировав которое дважды по времени и подставив результат в первое уравнение (3.1), получим

$$\begin{gathered}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^*d^4\mathbf{q}/dt^4+\mathbf{P}(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot},\mathbf{q}^{\cdot\cdot},\mathbf{q}^{\cdot\cdot\cdot})=\mathbf{Q}\\ \mathbf{P}=\mathbf{A}^*\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{J}\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}(2\mathbf{A}^{*\cdot\cdot}\mathbf{q}^{\cdot\cdot\cdot}+\mathbf{A}^*\mathbf{q}^{\cdot\cdot}+\mathbf{B}^{\cdot\cdot})+\mathbf{B}\end{gathered} \tag{3.2}$$

Считая, что электромагнитные процессы в двигателях протекают значительно быстрее процессов движения, описываемых уравнениями (3.1), примем для системы приводов модель вида

$$\mathbf{Q}=\mathbf{d}\mathbf{u}-\mathbf{h}\boldsymbol{\psi}^{\cdot} \tag{3.3}$$

где $\mathbf{d}$ и $\mathbf{h}$ — диагональные $n\times n$ матрицы коэффициентов.

Сформируем вектор управляющих воздействий $\mathbf{u}$ в соответствии с уравнениями (3.2) и (3.3): $\mathbf{u}=\mathbf{d}^{-1}[\mathbf{h}\boldsymbol{\psi}^{\cdot}+\mathbf{P}(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot},\mathbf{q}^{\cdot\cdot},\mathbf{q}^{\cdot\cdot\cdot})+\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^*(\mathbf{q})\mathbf{v}]$ и выберем $\mathbf{v}$ для режима малых рассогласований в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{v}=d^4\mathbf{q}_p/dt^4&-\mathrm{diag}\,\{\alpha_{1i}\}(\mathbf{q}^{\cdot\cdot\cdot}-\mathbf{q}_p^{\cdot\cdot\cdot})-\mathrm{diag}\,\{\alpha_{2i}\}(\mathbf{q}^{\cdot\cdot}-\mathbf{q}_p^{\cdot\cdot})-\\&-\mathrm{diag}\,\{\alpha_{3i}\}(\mathbf{q}^{\cdot}-\mathbf{q}_p^{\cdot})-\mathrm{diag}\,\{\alpha_{4i}\}(\mathbf{q}-\mathbf{q}_p)\end{aligned}$$

В этом случае получается следующее уравнение для ошибки отслеживания программной траектории:

$$d^4\mathbf{e}/dt^4+\mathrm{diag}\,\{\alpha_{1i}\}\mathbf{e}^{\cdot\cdot\cdot}+\mathrm{diag}\,\{\alpha_{2i}\}\mathbf{e}^{\cdot\cdot}+\mathrm{diag}\,\{\alpha_{3i}\}\mathbf{e}^{\cdot}+\mathrm{diag}\,\{\alpha_{4i}\}\mathbf{e}=0$$

Выбором элементов диагональных матриц обеспечивается желаемый закон изменения ошибки $\mathbf{e}=\mathbf{q}-\mathbf{q}_p$ отработки программной траектории. При этом, так же как для абсолютно жесткой системы, необходимо учитывать реальные возможности системы, в том числе и ограничение (1.6). Описание алгоритма велось в предположении, что известен весь вектор состояния $[\mathbf{q}^T,\mathbf{q}^{\cdot T},\mathbf{q}^{\cdot\cdot T},\mathbf{q}^{\cdot\cdot\cdot T}]^T$. Реально же могут быть измерены координаты $\mathbf{q}$ с помощью датчиков положения и скорости $\boldsymbol{\psi}^{\cdot}$ с помощью датчиков скорости (датчики скорости связаны, как правило, с роторами двигателей.). Поэтому алгоритм управления должен быть дополнен вычислением оценок $\mathbf{q}^{\cdot}$, $\mathbf{q}^{\cdot\cdot}$ и $\mathbf{q}^{\cdot\cdot\cdot}$. Принципиально это возможно, так как при измерениях координат $\mathbf{q}$ робот как объект управления является полностью наблюдаемой системой [5].

Можно дать следующую физическую интерпретацию процессов в системе. Алгоритм управления предусматривает приведение к программному движению координат $\mathbf{q}$, характеризующих взаимное расположение звеньев манипулятора. Колебания, возникающие в системе, по возможности переводятся на роторы двигателей, что приводит к увеличению их демпфирующих свойств [7]. Как показало численное моделирование, это достигается более простым путем, если упругие колебания характеризуются существенно большими частотами, чем основное движение. При наличии измерений или оценок координат $\boldsymbol{\varphi}$ и скоростей $\boldsymbol{\varphi}^{\cdot}$ можно ввести коррекцию в основной алгоритм, построенный в предположении абсолютной жесткости всех элементов робота

$$\mathbf{u}=\mathbf{d}^{-1}[\mathbf{h}\boldsymbol{\psi}^{\cdot}+\mathbf{B}(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot})+\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{v}]+\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}^{\cdot}+\mathbf{H}\boldsymbol{\varphi},\qquad \mathbf{A}(\mathbf{q})=\mathbf{A}^*(\mathbf{q})+\mathbf{J}$$

Коррекция алгоритма, как правило, требуется при резком изменении скорости или направления движения (при разгоне и торможении, в угловых точках траектории и т. п.), когда интенсивность упругих колебаний наибольшая. Поэтому выбор элементов матриц **D** и **H** можно осуществлять по линеаризованным уравнениям, составленным относительно характерных точек траектории.

Объем вычислений, которые должны проводиться в реальном масштабе времени для роботов с пятью-шестью степенями подвижности, даже без учета упругой податливости элементов, получается весьма большим. Однако для существующих конструкций роботов практически всегда удается осуществить декомпозицию полной динамической модели, записывая отдельно уравнения движения для переносных и ориентирующих степеней подвижности. Алгоритмы управления, основанные на компенсации, требуется строить лишь для переносных степеней подвижности, которых не более трех, так как для них динамические эффекты проявляются в наибольшей степени. Кроме того, в уравнениях движения, записанных с учетом только переносных степеней подвижности, часто удается выделить несущественные составляющие, которые можно исключить при формировании вектора управляющих воздействий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вукобратович М., Стокич Д.* Управление манипуляционными роботами. М.: Наука. 1985. 383 с.
2. *Freund E., Hoyer H.* Das Prinzip nichtlinearer System-entkopplung mit der Anwendung auf Industrieroboter // Regelungstechnik. 1980. Bd. 28. No. 3. S. 80—87; Bd. 28, No. 4. S. 116—126.
3. *Крутько П. Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М.: Наука, 1987. 304 с.
4. Основы автоматического управления / Под ред. В. С. Пугачева. М.: Наука. 1974. 719 с.
5. *Рей У.* Методы управления технологическими процессами. М.: Мир. 1983. 368 с.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз. 1961. 824 с.
7. *Бурдаков С. Ф.* Синтез управлений для роботов с упругими элементами // Роботы и робототехнические системы. Иркутск: Изд-е Иркутск. политехн. ин-та. 1981. С. 41—52.

Ленинград

Поступила в редакцию
9.VII.1986