МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1988

УДК 531.55

К ТЕОРИИ ПЛОСКОГО РАЗВОРОТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА СИСТЕМОЙ ДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ

АГАФОНОВ С. А., АЛЕКСЕЕВ К. Б., НИКОЛАЕВ Н. В.

Изменение ориентации твердого тела в пространстве может быть выполнено одним плоским разворотом [1]. Вопросы управления таким разворотом, названным экстенсивным (направленным) [2], посредством газореактивных двигателей и двигателей-маховиков, нашли достаточно полное отражение в ряде публикаций [3]. Однако применительно к системам ориентации с двигателями-маховиками известные результаты исследований справедливы при совмещении осей подвесов маховиков с осями связанной системы координат. В публикуемой работе рассматривается решение задачи пространственной переориентации тела одним плоским поворотом для случая, когда число двигателей-маховиков может быть произвольным. Полученный алгоритм решения данной задачи определяет программу изменения управляющих напряжений на входе двигателей-маховиков из условия минимизации энергетических затрат с учетом естественных ограничений.

1. Постановка задачи. Основные соотношения. Введем две системы координат с общим началом в центре масс аппарата: инерциальную $0X_1X_2X_3$ и систему $0x_1x_2x_3$, жестко связанную с аппаратом, оси которой направлены по главным осям инерции системы. Взаимное расположение этих систем в процессе разворота аппарата определяется матрицей направляющих косинусов $A(t)=\|a_{js}\|$ $(j, s=1, 2, 3)$, где $a_{js}=\mathbf{i}_j\cdot\mathbf{e}_s$, $t\in[0, T]$ и $\mathbf{i}_j$, $\mathbf{e}_s$ — орты осей $0x_j$ и $0X_s$ соответственно. Положение оси плоского разворота задается в системе $0x_1x_2x_3$ направляющими косинусами ν_s $(s=1, 2, 3)$. Динамическая модель аппарата представляет собой механическую систему, состоящую из твердого тела корпуса и n двигателей-маховиков. Для вращения аппарата вокруг оси плоского разворота необходимо приложить к нему со стороны двигателей-маховиков кинетический момент. Будем считать осевые моменты инерции маховиков одинаковыми, а их угловые скорости Ω_j $(j=1, \ldots, n)$ ограниченными: $|\Omega_j|\leqslant\Omega_m$, Ω_m — допустимая угловая скорость. В качестве приводов маховиков используются двигатели постоянного тока, имеющие идентичные характеристики. Управление разворотом осуществляется соответствующим изменением напряжения u_j в цепи якоря приводного двигателя маховика. Обозначим ν_{1k}, ν_{2k}, ν_{3k} $(k=1, \ldots, n)$ направляющие косинусы оси подвеса k-го маховика в осях $0x_1x_2x_3$. Предположим, что в начальный $(t=0)$ и конечный $(t=T)$ моменты времени аппарат неподвижен относительно инерциальной системы $0X_1X_2X_3$ и маховики не вращаются. Для любого момента времени $0\leqslant t\leqslant T$ в силу сохранения кинетического момента системы выполняются соотношения:

$$\sum_{j=1}^{n} J\nu_{ij}\Omega_j=-I_i\nu_i\omega \qquad (i=1, 2, 3) \tag{1.1}$$

где J — момент инерции маховиков, представляющих собой симметричные роторы относительно оси вращения, I_i $(i=1, 2, 3)$ — моменты инерции аппарата относительно осей $0x_1$, $0x_2$, $0x_3$ соответственно, ω — угловая скорость аппарата вокруг оси плоского разворота.

Выберем угловые скорости маховиков Ω_j $(j=1, \ldots, n)$ таким образом, чтобы их суммарная кинетическая энергия $T_1={}^1/_2J\Sigma\Omega_j^2$ $(j=1, \ldots, n)$ была минимальной. Тогда систему уравнений (1.1) можно рассматривать как уравнения связей для Ω_j. Исключая из рассмотрения тривиальное решение $\Omega_j=\omega=0$, имеем задачу на условный экстремум, которая введением множителей Лагранжа приводится к задаче на безусловный экстремум функции:

$$F=T_1-\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\left(\omega I_i\nu_i+J\sum_{j=1}^{n}\nu_{ij}\Omega_j\right) \tag{1.2}$$

Из системы уравнений $\partial F/\partial\Omega_j=0$ $(j=1,\ldots,n)$ найдем значения угловых скоростей маховиков:

$$\Omega_j=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\nu_{ij} \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{1.3}$$

Подставив выражения (1.3) в (1.1), получим систему алгебраических уравнений для определения множителей Лагранжа λ_1, λ_2, λ_3, которая после преобразований приводится к виду

$$P\boldsymbol{\lambda}=-\omega\mathbf{Q} \tag{1.4}$$

$$P=\|p_{im}\|, \qquad p_{im}=\sum_{j=1}^{n}\nu_{ij}\nu_{mj} \qquad (i,m=1,2,3)$$

$$\boldsymbol{\lambda}=\|\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\|^T, \quad Q=\|I_1\nu_1/J,\ I_2\nu_2/J,\ I_3\nu_3/J\|^T$$

Здесь T — знак транспонирования. Предположим, что $\det P\neq0$, тогда решение уравнения (1.4) имеет вид

$$\lambda_i=-\omega c_i \qquad (i=1,2,3) \tag{1.5}$$

где c_i — элементы матрицы-столбца $P^{-1}\mathbf{Q}$. Подставляя выражения для λ_i в (1.3), получим.

$$\Omega_j=-\omega\sum_{i=1}^{3}c_i\nu_{ij} \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{1.6}$$

2. Определение управления маховиками. Уравнения движения маховиков имеют вид

$$\varphi_j^{\bullet}=\Omega_j+\sum_{i=1}^{3}\omega_i\nu_{ij}, \quad J\frac{d}{dt}\left(\Omega_j+\sum_{i=1}^{3}\omega_i\nu_{ij}\right)=u_j \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{2.1}$$

Здесь φ_j — угол поворота j-го маховика вокруг оси симметрии, ω_i — проекции угловой скорости аппарата на оси $0x_i$, u_j — управление, подаваемое на j-й маховик со стороны двигателя, удовлетворяющее ограничению $|u_j|\leqslant u_0$; $u_0=\text{const}$. Ограничение на управление накладывается существом задачи в силу ограниченности мощности двигателя. Учитывая соотношения (1.6) и $\omega_i=\omega\nu_i$, систему (2.1) можно записать в виде

$$\varphi_j^{\bullet}=\varepsilon_j\Omega_j, \quad \Omega_j^{\bullet}=u_j/(J\varepsilon_j) \quad (j=1,\ldots,n) \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_j=1-\sum_{i=1}^{3}\nu_{ij}\nu_i\Big/\left(\sum_{i=1}^{3}c_i\nu_{ij}\right)$$

Из чисел $|z_j|$, где $z_j=\varepsilon_j(c_1\nu_{1j}+c_2\nu_{2j}+c_3\nu_{3j})$ $(j=1,\ldots,n)$, выберем наибольшее. Пусть это будет число, отвечающее $j=k$. Рассмотрим уравнения движения k-го маховика

$$\varphi_k^{\bullet}=\varepsilon_k\Omega_k, \quad \Omega_k^{\bullet}=u_k/(J\varepsilon_k) \tag{2.3}$$

с граничными условиями

$$\Omega_k(0)=\Omega_k(T)=0, \quad \varphi_k(0)=0, \quad \varphi_k(T)=-z_k\Phi_0 \tag{2.4}$$

где Φ_0 — заданный угол поворота аппарата, T — время маневра.

Рассмотрим задачу о нахождении управления u_k, переводящего систему (2.3) в состояние, определяемое граничными условиями (2.4), так, чтобы функционал

$$L=\int \Omega_k u_k\,dt, \qquad t\in[0,T] \tag{2.5}$$

на оптимальной траектории принимал минимальное значение. Для решения задачи применим принцип максимума Понтрягина. Гамильтониан, сопряженная система и условия трансверсальности имеют вид [4]:

$$\begin{gathered} H=\psi_0\Omega_k u_k+\varepsilon_k\psi_1\Omega_k+\psi_2 u_k/(\varepsilon_k J) \\ \dot\psi_1=0, \quad \dot\psi_2=-\psi_0 u_k-\varepsilon_k\psi_1, \quad \psi_0\leqslant 0 \\ \psi_i(T)=\vartheta_i, \quad \vartheta_i=\mathrm{const} \quad (i=1,2) \end{gathered} \tag{2.6}$$

Оптимальное управление определяется из условия максимума H по u_k и имеет вид $u_k(t)=u_0\,\mathrm{sign}(\psi_2/(\varepsilon_k J)+\psi_0\Omega_k)$.

Из сопряженного уравнения для ψ_2 и (2.3) следует, что функция $\psi_2/(\varepsilon_k J)+\psi_0\Omega_k$ является кусочно-линейной, поэтому на отрезке $[0, T]$ она имеет конечное число нулей и, следовательно, число переключений управления $u_k(t)$ конечно. Так как время разворота аппарата на заданный угол фиксировано, то управление маховика состоит из трех этапов: разгона ($u_k=u_0$), движения по инерции ($u_k=0$) и торможения ($u_k=-u_0$). Время переключения управления находится из граничных условий (2.4). Из системы (2.3) получим

$$\begin{gathered} \Omega_k(t)=u_0 t/(J\varepsilon_k) \quad (0\leqslant t\leqslant t_1) \\ \Omega_k(t)=u_0 t_1/(J\varepsilon_k) \quad (t_1\leqslant t\leqslant T-t_1) \\ \Omega_k(t)=u_0(T-t)/(J\varepsilon_k) \quad (T-t_1\leqslant t\leqslant T) \end{gathered}$$

где время переключения управления t_1 находится по формуле $t_1=$ $=T/2-(T^2/4-J\varepsilon_k\Phi_0|\Sigma c_i\nu_{ik}|/u_0)^{1/2}$ ($i=1, 2, 3$). Подставляя $\Omega_k(t)$ в k-е уравнение системы (1.6), получим выражение для угловой скорости аппарата:

$$\omega(t)=-\Omega_k(t)\left(\sum_{i=1}^{3} c_i\nu_{ik}\right)^{-1}$$

Тогда из (2.1) определяем выражения для управлений маховиками:

$$\begin{gathered} u_j(t)=u_0 D_j\varepsilon_j/(D_k\varepsilon_k), \quad 0\leqslant t\leqslant t_1 \\ u_j(t)=0, \quad t_1\leqslant t\leqslant T-t_1 \\ u_j(t)=-u_0 D_j\varepsilon_j/(D_k\varepsilon_k), \quad T-t_1\leqslant t\leqslant T \\ D_j=\sum_{i=1}^{3} c_i\nu_{ij} \qquad (j=1,\ldots,n) \end{gathered} \tag{2.7}$$

Отметим, что если $t_1=T/2$, то управление состоит из двух этапов: на участке $0\leqslant t\leqslant T/2$ осуществляется разгон маховиков, а при $T/2\leqslant t\leqslant T$ — торможение.

3. Численный пример. Рассмотрим случай четырех маховиков с направляющими косинусами: $\nu_{11}=\nu_{22}=\nu_{33}=1$, $\nu_{21}=\nu_{31}=\nu_{12}=\nu_{32}=\nu_{13}=\nu_{23}=0$, $\nu_{14}=\nu_{24}=\nu_{34}=1/\sqrt{3}\simeq 0{,}577$. Ось плоского разворота имеет направляющие косинусы $\nu_1=0{,}8$, $\nu_2=0{,}34$, $\nu_3=0{,}48$. Моменты инерции аппарата и маховиков имеют следующие значения: $I_1=100$ кг·м^2, $I_2=120$ кг·м^2, $I_3=160$ кг·м^2, $J=1{,}6$ кг·м^2. Матрицы P, Q и P^{-1} имеют вид

$$P=\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{Vmatrix}, \quad Q=\begin{Vmatrix} 50 \\ 25{,}5 \\ 48 \end{Vmatrix}, \quad P^{-1}=\begin{Vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$$

Тогда $c_1=29{,}4$, $c_2=4{,}9$, $c_3=27{,}4$, $\varepsilon_1=0{,}97$, $\varepsilon_2=0{,}93$, $\varepsilon_3=0{,}98$, $\varepsilon_4=0{,}97$. Другие константы задачи имеют следующие значения: $z_1=28{,}5$, $z_2=4{,}5$, $z_3=26{,}8$, $z_4=34{,}7$.

Таким образом, на четвертый маховик подается во время разгона максимальное управление u_0. Управления остальными маховиками находятся по формуле (2.7) и имеют вид

$$u_1(t)=(0{,}82u_0,\ 0\leqslant t\leqslant t_1;\ 0,\ t_1\leqslant t\leqslant T-t_1;\ -0{,}82u_0,\ T-t_1\leqslant t\leqslant T)$$

$$u_2(t)=(0{,}13u_0,\ 0\leqslant t\leqslant t_1;\ 0,\ t_1\leqslant t\leqslant T-t_1;\ -0{,}13u_0,\ T-t_1\leqslant t\leqslant T)$$

$$u_3(t)=(0{,}77u_0,\ 0\leqslant t\leqslant t_1;\ 0,\ t_1\leqslant t\leqslant T-t_1;\ -0{,}77u_0,\ T-t_1\leqslant t\leqslant T).$$

Применение избыточного числа двигателей-маховиков для реализации принципа экстенсивного управления ориентацией твердого тела диктуется необходимостью сохранения эффективности данного принципа в смысле потребления энергии для произвольного положения оси плоского разворота в связанной системе координат. В работе показано, каким образом требование минимизации энергетических затрат связано с выбором управления для каждого двигателя-маховика.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз. 1961. 824 с.
2. *Петров Б. Н., Боднер В. А., Алексеев К. Б.* Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1970. Т. 192. № 6. С. 1235–1238.
3. *Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука. 1974. 598 с.
4. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука. 1971. 424 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.XI.1986