

УДК 531.8

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА С ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМИ ПРИВОДАМИ

АКУЛЕНКО Л. Д., МИХАЙЛОВ С. А.

При исследовании динамики манипуляционных роботов обычно применяется модель, в которой звенья и другие элементы манипулятора считаются абсолютно твердыми телами [1]. Однако в случае сравнительно большой длины звеньев и значительной массы перемещаемого груза упругая податливость конструкции манипулятора может оказывать существенное влияние на точность выполняемых операций. Поэтому упругость звеньев в ряде случаев необходимо учитывать при анализе динамики и разработке систем управления роботом. Для приложений также важен учет влияния таких возмущающих факторов, как упругая податливость редукторов приводов, соединительных фланцев, и других.

Динамика манипулятора с упругими звеньями рассматривалась, например, в [2-4]. В [5-7] исследовалась динамика нагруженного манипулятора антропоморфного типа с упругими невесомыми звеньями в приближении идеальных приводов. В данной работе проводится анализ уравнений движения упругого манипулятора с электромеханическими приводами, содержащими двигатели постоянного тока с независимым возбуждением и безынерционные упругие редукторы. Методами сингулярных возмущений оценивается влияние упругой податливости конструкции на динамику управляемых движений упругого манипулятора с учетом реальных характеристик электромеханических приводов. При различных предположениях относительно величин параметров, характеризующих указанные возмущения, получены упрощенные уравнения транспортных движений робота. Предложенный подход позволяет обосновано вычислить приближенные программные управляющие напряжения и строить их коррекцию по обратной связи (синтез). Решена программная задача о приближенном приведении манипулятора из начального состояния покоя в заданное.

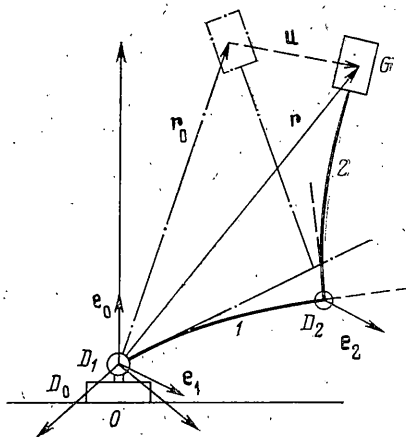
1. Рассматривается электромеханическая модель упругого двузвенного манипулятора и исследуются его управляемые пространственные движения. Механическая модель упругого манипулятора антропоморфного типа, используемая в работе, определяется следующими допущениями (фигура).

1. Манипулятор $OD_0D_1D_2G$ представляет собой двузвенник. Длина первого звена равна l_1 , а второго — l_2 ; предполагается, что длины звеньев одного порядка ($l_1 \sim l_2$), что характерно для манипуляторов указанного типа.

2. В неподвижной точке O совмещены два цилиндрических шарнира: ось e_0 первого шарнира неподвижна, а ось e_1 второго шарнира вращается и перпендикулярна e_0 . В точке D_2 находится третий (локтевой) цилиндрический шарнир, ось e_2 которого при отсутствии упругих деформаций стержня (D_1D_2) параллельна оси e_1 .

3. Груз считается материальной точкой массы m и находится на конце второго звена (в точке G).

4. Звенья манипулятора (D_0D_1 , D_1D_2) и (D_2G) представляют собой однородные прямолинейные упругие стержни кольцевого поперечного сечения, испытывающие деформации изгиба и кручения.



5. Упругие смещения груза и манипулятора в процессе движения считаются малыми по сравнению с длинами звеньев.

6. Масса манипулятора мала по сравнению с массой груза.

7. На манипулятор с грузом действуют моменты сил $M=(M_0, M_1, M_2)$, развиваемые в шарнирах D_0, D_1, D_2 ; действуют также сила F , приложенная к грузу, и реакция опоры в точке O .

Допущения 1–7 те же, что и в [5–7], где даны необходимые пояснения к ним.

Предполагается, что в шарнирах манипулятора D_0, D_1, D_2 установлены электродвигатели постоянного тока с независимым возбуждением. Динамика двигателей этого типа излагается, например, в [8]. Приведем дополнительные допущения, характеризующие динамические свойства электроприводов.

8. Кинетическая энергия редуктора и двигателя определяется быстрым вращением ротора (якоря двигателя); его момент инерции обозначается $J_i, i=0, 1, 2$ — номер двигателя.

9. Потенциальная энергия системы электроприводов сводится к потенциальной энергии упругих деформаций механизмов редукторов двигателей; коэффициент упругости редуктора i -го двигателя обозначается $k_i (i=0, 1, 2)$.

Принятые допущения 8, 9 основаны на том, что передаточные числа редукторов двигателей обычно весьма велики (порядка 10^3 – 10^4). Поэтому основной вклад в кинетическую энергию двигателя и шарнира вносит быстровращающийся ротор. Кинетическая энергия движения центра масс двигателя D_2 в инерциальном пространстве обычно является пренебрежимо малой по сравнению с кинетической энергией перемещаемого груза и быстровращающихся роторов двигателей. Далее, силовые нагрузки на выходе каждого редуктора на несколько порядков превышают силовые нагрузки на входе, поскольку передаточное число весьма велико. Поэтому потенциальная энергия будет определяться в основном упругими деформациями механизма редуктора. Энергией упругих деформаций роторов двигателей при этом можно пренебречь.

2. Для вывода уравнений движения манипулятора с грузом используется принцип Лагранжа [6]. В силу сделанных предположений кинетическая энергия системы равна

$$K = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 J_i \dot{\varphi}_i^2 \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор груза (точки G), φ_i — углы поворота роторов двигателей ($i=0, 1, 2$).

Потенциальная энергия системы записывается в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} (C(\alpha) \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 k_i (\varphi_i - n_i \alpha_i)^2 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\alpha) + \mathbf{u} \quad (\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

Здесь $\mathbf{u}$ — упругое смещение груза, обусловленное упругой податливостью конструкции (звеньев) манипулятора; n_i — коэффициенты редукции ($i=0, 1, 2$); матрица жесткости упругого двузвенника обозначена $C(\alpha)$, ее конкретные выражения даны в [6, 7]; совокупность углов $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ определяет манипулятор с абсолютно жесткими звеньями, т. е. радиус-вектор $\mathbf{r}_0(\alpha)$. Следует отметить, что матрица $C(\alpha)$ имеет особенность, связанную с потерей степени свободы системы при распрямленной ($\alpha_2=0$) или полностью сложенной ($\alpha_2=\pi$) конфигурации манипулятора.

Выражения для работы внешних сил на виртуальных перемещениях имеют вид

$$\delta A = (F, \delta \mathbf{r}), \quad \delta A_i = \mu_i \delta \varphi_i \quad (i=0, 1, 2) \quad (2.3)$$

Здесь $\mathbf{F}$ — вектор внешних сил, приложенных к грузу, μ_i — моменты электромагнитных сил, определяемые ниже. Считается, что функция $\mathbf{F}$ известна и удовлетворяет требуемым условиям гладкости и ограниченности.

Уравнения движения груза и якорей двигателей определяются стандартным образом на основе выражений (2.1) — (2.3). Учет кинематической связи (2.2) позволяет взять в качестве обобщенных координат переменные $\mathbf{r}$, α_i или $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}$, или α_i , $\mathbf{u}$ ($i=0, 1, 2$). Связь между бесконечно малыми приращениями этих переменных имеет вид

$$\delta \mathbf{r} = \sum_{i=0}^2 \frac{\partial \mathbf{r}_0(\alpha)}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i + \delta \mathbf{u} \quad (2.4)$$

В случае необходимости предполагается, что линейная система (2.4) однозначно разрешима относительно $\delta \alpha_i$ в рассматриваемой области изменения переменной α , т. е. матрица $(\partial \mathbf{r}_0 / \partial \alpha)$ невырождена. Далее для описания движения берутся переменные $\mathbf{r}$, α , Φ ; уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\begin{aligned} m \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F} - C(\alpha)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\alpha)) \quad (\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})) \\ (C(\alpha)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\alpha)), \partial \mathbf{r}_0(\alpha) / \partial \alpha_i) - 1/2 (\partial C(\alpha) / \partial \alpha_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\alpha)), (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\alpha))) - k_i n_i (\Phi_i - n_i \alpha_i) &= 0 \\ J_i \ddot{\Phi}_i + k_i (\Phi_i - n_i \alpha_i) &= \mu_i \quad (i=0, 1, 2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Первое векторное уравнение (2.5) описывает движение груза, три последующих — конечные уравнения равновесия упругих элементов; последние три уравнения описывают вращения якорей двигателей.

Уравнения электрических цепей для якорей двигателей и обмоток возбуждения определяют электромагнитные моменты μ_i [8]:

$$L_i \dot{I}_i + R_i I_i + \Phi_i \dot{\Phi}_i = U_i, \quad \mu_i = \Phi_i I_i \quad (i=0, 1, 2) \quad (2.6)$$

Здесь I_i — токи, U_i — напряжения, L_i — индуктивности, R_i — омические сопротивления, $\Phi_i = L_i^* I_i^*$ — магнитные потоки, создаваемые токами возбуждения I_i^* , L_i^* — коэффициенты взаимной индукции. Величины Φ_i считаются постоянными, т. е. влиянием токов I_i в обмотках якорей на токи возбуждения I_i^* пренебрегается и значения I_i^* считаются установившимися. Не учитываются механические потери при вращении осей и шарниров. Если коэффициенты уравнений (2.5), (2.6), а также функции $\mathbf{F}$, U_i и начальные условия для переменных $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}$, Φ , Φ заданы, то электромеханические движения системы полностью определены.

Моменты сил M_i на выходе шарниров равны

$$\begin{aligned} M_i &= \partial \Pi / \partial \alpha_i = - (C(\alpha)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\alpha)), \partial \mathbf{r}_0(\alpha) / \partial \alpha_i) + \\ &+ 1/2 (\partial C(\alpha) / \partial \alpha_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\alpha)), (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\alpha))) \quad (i=0, 1, 2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

На основе условий равновесия (2.5) и выражений (2.7) можно получить для величин M_i другие представления:

$$M_i = k_i n_i (\Phi_i - n_i \alpha_i) \quad (i=0, 1, 2) \quad (2.8)$$

При помощи физически очевидного соотношения (2.8) уравнения (2.5) для вращений якорей двигателей переписываются следующим образом:

$$J_i \ddot{\Phi}_i = \mu_i - M_i / n_i \quad (i=0, 1, 2) \quad (2.9)$$

Уравнения движения в виде (2.5) — (2.9) удобны для исследования различных предельных случаев, часто встречающихся на практике: абсолютно жесткого редуктора ($k_i \rightarrow \infty$), абсолютно жестких звеньев (условно $C(\alpha) \rightarrow \infty$), безынерционной электрической цепи ($L_i \rightarrow 0$) и других. Нужно отметить, что система дифференциальных уравнений для обобщенных координат $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}$ или α , $\mathbf{u}$ будет вырожденной, поскольку между $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}$, α имеются конечные (недифференциальные) связи (2.2), (2.5). Порядок ис-

следуемой системы (2.5)–(2.9), описывающей электромеханическую модель манипулятора антропоморфного типа с безынерционными звеньями и редукторами, равен 15; она содержит три управляющих воздействия — напряжения U_i , $U_i(t) \in U^*$. Нетрудно установить, что порядок системы дифференциальных уравнений для манипуляционного робота с жесткими элементами в более общем случае инерционных звеньев меньше и равен 9. Это обуславливается конечной связью между α и φ ($\varphi_i = n_i \alpha_i$), причем $u=0$ (см. далее).

Задача управления движением системы (2.5), (2.6), описывающей транспортные операции манипуляционного робота, ставится следующим образом: в момент времени $t=t_0$ заданы начальные значения переменных $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$, φ_i , $\dot{\varphi}_i$, I_i ($i=0, 1, 2$); требуется привести фазовую точку системы в момент времени $t=T$ на некоторое допустимое множество состояний и при этом оптимальным образом

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}^0, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}^0, \quad \varphi_i(t_0) = \varphi_i^0, \quad \dot{\varphi}_i(t_0) = \omega_i^0, \quad I_i(t_0) = I_i^0 \\ Q_j(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \varphi, \dot{\varphi}, I) |_{t=T} &= 0, \quad S[U] \rightarrow \min_{U \in U^*} \\ (i &= 0, 1, 2; \quad j = 0, 1, 2, \dots, j^* \leq 15) \\ \varphi &= (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2), \quad I = (I_0, I_1, I_2), \quad U = (U_0, U_1, U_2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь T — момент времени, фиксированный или определяемый в процессе решения задачи управления и оптимизации; S — функционал, характеризующий качество управления движением системы (2.5), (2.6). В частности, функции Q_j могут определять фиксированную точку, например точку покоя, а S — время быстрогодействия. Управляемая система может подвергаться фазовым ограничениям: геометрическим, тепловым, «по мощности» и другим.

Следует отметить, что система уравнений движения (2.5) существенно нелинейна, что обусловлено геометрической нелинейностью. Уравнение для $\mathbf{r}$ имеет смысл, аналогичный уравнениям для колебательных систем с управляемым положением равновесия $\mathbf{r}_0(\alpha)$, исследованным приближенно при помощи методов усреднения в [9]. При выполнении ряда упрощающих предположений к системе (2.5), (2.6) применимы развитые в [9] приемы асимптотического решения задач оптимального управления вида (2.10). В общем случае требуется привлечение численных методов оптимального управления.

3. Далее рассматриваются некоторые интересные в прикладном отношении предельные случаи системы (2.5), (2.6).

1°. Пусть редукторы приводов близки к абсолютно жестким, т. е. коэффициенты $k_i \rightarrow \infty$. Тогда в пределе между переменными φ_i и α_i имеет место простая конечная связь: $\varphi_i = n_i \alpha_i$ ($i=0, 1, 2$). Если k_i асимптотически велики, т. е. $1/k_i$ — малые параметры, то формально система (2.5) является сингулярно возмущенной [10]. Уравнения движения в первом приближении по параметрам $1/k_i$ при помощи (2.5)–(2.9) приводятся к виду

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F} - C(\alpha)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\alpha)), \quad \alpha = \beta \\ J_i n_i^2 \ddot{\beta}_i &= n_i \mu_i - M_i(\mathbf{r}, \alpha), \quad \varphi_i = n_i \beta_i \\ L_i I_i \dot{\beta}_i + R_i I_i + n_i \Phi_i \beta_i &= U_i \quad (i=0, 1, 2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь для переменных M_i берутся выражения (2.7) при $\alpha = \beta$. Следующий член асимптотических разложений получается из конечных уравнений (2.5):

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \beta_i + (k_i n_i)^{-1} [C(\beta)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\beta)), \partial \mathbf{r}_0(\beta) / \partial \beta_i] - \\ &- 1/2 (\partial^2 C(\beta) / \partial \beta_i^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\beta)), (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\beta))) + O(k_i^{-2} n_i^{-2}), \quad \beta_i = \varphi_i / n_i \end{aligned} \quad (3.2)$$

и подставляется в первое уравнение (3.1) и выражения (2.7). Таким образом, для системы (2.5) проводятся регулярные разложения; порядок системы (3.1) является максимальным и равен 15.

2°. Пусть теперь звенья манипулятора обладают высокой жесткостью; тогда в пределе для абсолютно жестких звеньев (условно при $C(\alpha) \rightarrow \infty$) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\alpha); \quad \alpha_i = h_i(\mathbf{r}) \quad (i=0, 1, 2) \\ C(\alpha)\mathbf{u} &= -((\partial \mathbf{r}_0(\alpha)/\partial \alpha^T)^{-1} \mathbf{M} = -(\dot{\mathbf{R}})^T \mathbf{M} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Уравнения движения (2.5), (2.6) в этом случае записываются в виде

$$m\mathbf{r}'' = \mathbf{F} + (\mathbf{R}^T)^{-1} \mathbf{M}, \quad \alpha_i = h_i(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

$$L_i \dot{I}_i + R_i I_i + \Phi_i \dot{\varphi}_i = U_i, \quad n_i k_i (\varphi_i - n_i \alpha_i) = M_i \quad (i=0, 1, 2)$$

Рассмотрим случай высокой, но конечной жесткости звеньев манипулятора: $C(\alpha) = \varepsilon^{-2} H(\alpha)$; где $\varepsilon \ll 1$, $\|H\| \sim 1$ ($k_i \sim 1$). Предполагается далее, что $M_i \sim 1$; тогда из соотношения (3.3) получаем $\mathbf{u} = \varepsilon^2 \mathbf{v}$, $|\mathbf{v}| \sim 1$. Подставим полученные представления для матрицы C и вектора $\mathbf{u}$ в уравнения движения (2.5):

$$m\mathbf{r}'' = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}') - H(\alpha) \mathbf{v} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{M} + \mathbf{R}^T(\alpha) H(\alpha) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial (H(\alpha) \mathbf{v}, \mathbf{v}) / \partial \alpha \quad (3.6)$$

Выпишем также кинематическое соотношение, вытекающее из выражений (2.2), (3.3):

$$\alpha = h(\mathbf{r} - \varepsilon^2 \mathbf{v}) \quad (3.7)$$

Чтобы получить замкнутую систему уравнений для переменных $\mathbf{r}$, φ , I , исключим из системы (3.5) векторы $\mathbf{v}$, α при помощи соотношений (3.6), (3.7). Разрешая уравнение (3.6) относительно $\mathbf{v}$, в первом приближении по ε^2 получим

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + O(\varepsilon^2), \quad \mathbf{v}_0 = -[\mathbf{R}^T(\alpha) H(\alpha)]^{-1} \mathbf{M} = \mathbf{v}_0(\alpha, \mathbf{M}) \\ \mathbf{M} &= (M_0, M_1, M_2), \quad M_i = n_i k_i (\varphi_i - n_i \alpha_i) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставим вектор $\mathbf{v}_0$ из (3.8) в правую часть (3.6); получим в следующем приближении по ε^2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \varepsilon^2 \mathbf{v}_1 + O(\varepsilon^4), \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0(\alpha, \mathbf{M}) \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_1(\alpha, \mathbf{M}) = \frac{1}{2} [\mathbf{R}^T H]^{-1} \partial (H \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0) / \partial \alpha \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя соотношения (3.8), (3.9) в (3.5), (3.7) и ограничиваясь членами $O(\varepsilon^2)$ включительно, можно получить искомые приближенные уравнения с погрешностью $O(\varepsilon^4)$:

$$m\mathbf{r}'' = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}') - H(\alpha) (\mathbf{v}_0 + \varepsilon^2 \mathbf{v}_1) \quad (3.10)$$

$$\alpha = h(\mathbf{r} - \varepsilon^2 \mathbf{v}_0(\alpha, \mathbf{M})) \quad (3.11)$$

Соотношение (3.11), в котором вектор $\mathbf{v}_0$ определен равенством (3.8), представляет собой векторное уравнение для определения шарнирных углов $\alpha(\mathbf{r}, \varphi)$ в каждый момент времени t . Решение этого уравнения можно получить методом последовательных приближений по схеме ($n=1, 2, \dots$):

$$\alpha^{(0)} = h(\mathbf{r}), \quad \alpha^{(n)} = h(\mathbf{r} - \varepsilon^2 \mathbf{v}_0(\alpha^{(n-1)}, \mathbf{M})) \quad (3.12)$$

Здесь верхний индекс указывает номер итерации. Производная по α правой части уравнения (3.12) есть величина $O(\varepsilon^2)$. Следовательно, итерации (3.12) быстро сходятся к единственному решению $\alpha = \alpha^*(\mathbf{r}, \varphi, \varepsilon^2)$ уравнения (3.8), причем $|\alpha^* - \alpha^{(n)}| = O(\varepsilon^{2n+2})$. Поэтому для получения α с искомой погрешностью $O(\varepsilon^4)$ достаточно выполнить одну итерацию

$$\alpha = h(\mathbf{r} - \varepsilon^2 \mathbf{v}_0(h(\mathbf{r}), \mathbf{M})) + O(\varepsilon^4) \quad (3.13)$$

Таким образом, в случае большой жесткости звеньев манипулятора для системы (2.5) вновь проводятся регулярные разложения; порядок системы (3.4), (3.5) также является максимальным и равен 15.

3°. Система (2.5) оказывается по существу сингулярно возмущенной, если величины $\|C\|$, k_i асимптотически велики. В пределе получается система более низкого 9-го порядка вида [11]:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}}_0(\alpha) &= \mathbf{F}(t, \mathbf{r}_0(\alpha), \dot{\mathbf{r}}_0(\alpha)) + (R^T(\alpha))^{-1}M, \quad t \in \Theta \subset [t_0, T] \\ \Phi_i &= n_i \dot{\alpha}_i, \quad M_i = n_i \mu_i - J_i n_i^2 \ddot{\alpha}_i, \quad \mu_i = \Phi_i I_i \\ L_i \dot{I}_i + R_i \dot{I}_i + n_i \Phi_i \dot{\alpha}_i &= U_i \quad (i=0, 1, 2) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Более точные разложения требуют учета погранслоев в начале и конце процесса управления, а также в точках релейного изменения управлений $U_i(t)$ [10].

4°. Кроме того, система (2.5), (2.6) может быть сингулярно возмущенной по параметрам L_i в уравнениях для переменных I_i . В пределе при $L_i=0$ ее порядок уменьшается на три [11]. Выражения для моментов сил μ_i тогда принимают вид

$$\mu_i = R_i^{-1} \Phi_i (U_i - \Phi_i \dot{\Phi}_i), \quad U(t) \in U^* \quad (i=0, 1, 2) \quad (3.15)$$

и подставляются в уравнения (2.5), (2.9). При таком подходе начальные условия для токов I_i не учитываются, поскольку на практике переходные процессы в электрических цепях якорей двигателей происходят весьма быстро. Поэтому приближение (3.15) часто используется при исследовании движений манипуляционных роботов с электромеханическими приводами [1, 3, 11].

4. Рассматривается задача перемещения груза из начального в заданное положения покоя. Процесс управления системой (2.5), (2.6) можно разбить на два этапа: 1) движение в малую окрестность заданного состояния покоя и 2) коррекция положения груза в указанной малой окрестности требуемого положения. Начальное и конечное состояния покоя согласно (2.10) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}|_{0,T} &= \mathbf{r}^{0,T}, \quad \dot{\mathbf{r}}|_{0,T} = 0, \quad \Phi_i|_{0,T} = \Phi_i^{0,T}, \quad \dot{\Phi}_i|_{0,T} = 0 \\ I_i|_{0,T} &= 0 \quad (i=0, 1, 2, t \in [0, T]) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Предполагается дополнительно, что внешние силы отсутствуют ($\mathbf{F}=0$), а управление таково, что движение груза G является квазистационарным, приводящим к малым упругим смещениям $\mathbf{u}$. Это допущение будет выполняться, если управления U_i достаточно малы, т. е. $U_i = \varepsilon V_i$, где ε — малый параметр, $V_i(t) \sim 1$, причем V_i — кусочно-гладкие функции. Время T процесса управления будет при этом асимптотически большим: $T \sim \varepsilon^{-1}$. С точностью до $\mathbf{u}^2 \sim \varepsilon^2$ система (2.5) с учетом (3.15) переписывается в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= (R^T(\alpha))^{-1}M, \quad M_i = k_i n_i (\Phi_i - n_i \dot{\alpha}_i) \quad (i=0, 1, 2) \\ -k_i n_i (\Phi_i - n_i \dot{\alpha}_i) &= (C(\alpha)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\alpha)), \partial \mathbf{r}_0(\alpha) / \partial \alpha_i) \\ J_i \ddot{\Phi}_i + k_i (\Phi_i - n_i \dot{\alpha}_i) &= \mu_i, \quad \mu_i = R_i^{-1} \Phi_i (\varepsilon V_i - \Phi_i \dot{\Phi}_i) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Поскольку в реальных условиях звенья манипулятора и редукторы обладают достаточно высокой жесткостью, то малые и плавные (кусочно-гладкие) управляющие воздействия приведут к малым того же порядка упругим отклонениям груза от траектории, описываемой упрощенной системой (3.14), (3.15). При сделанных допущениях движение системы (4.1), (4.2) в первом приближении описывается следующими уравнениями и условиями:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^2 m (\partial \mathbf{r}_0 / \partial \alpha_j)^T (\partial \mathbf{r}_0 / \partial \alpha_j) \ddot{\alpha}_j + J_i n_i^2 \ddot{\alpha}_i &= n_i R_i^{-1} \Phi_i (\varepsilon V_i - n_i \Phi_i \dot{\alpha}_i), \quad t \in [0, T] \\ \alpha_i|_{0,T} &= \alpha_i^{0,T}, \quad \dot{\alpha}_i|_{0,T} = 0, \quad |V_i(t)| \leq V_i^0 \quad (i=0, 1, 2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Приближенное по ε решение задачи управления (4.3), близкое к оптимальному быстродействию, можно получить полагая постоянными управ-

ляющие функции V_i . С погрешностью $O(\varepsilon)$ по траектории и $O(\ln \varepsilon^{-1})$ по функционалу — времени T , $T=O(\varepsilon^{-1})$ — управления V_i можно взять в следующем простом виде:

$$\begin{aligned} V_i(t) &= V_i^* = \text{const}, \quad |V_i^*| \leq V_i^0, \quad t \in [0, T], \quad T = \max_i T_i \\ T_i &= \varepsilon^{-1} |\alpha_i^T - \alpha_i^0| (n_i \Phi_i / V_i^0), \quad V_i^* = n_i \Phi_i (\alpha_i^T - \alpha_i^0) / (\varepsilon T) \\ V_i(t) &= 0, \quad t \in [0, T] \quad (i=0, 1, 2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

За время $T \sim 1/\varepsilon$ фазовая точка системы (4.3) придет в ε -окрестность заданного значения. При этом фазовая точка исходной системы (2.5), (2.6) также окажется в ε -окрестности заданной согласно (4.1) конечной точки.

Дальнейшая коррекция фазового состояния системы может проводиться на основе регулярной методики аналитического конструирования регуляторов [12]. При таком подходе оптимальный регулятор может строиться для фиксированной конечной конфигурации манипулятора, т. е. при $\alpha = \alpha^T$ ($r_0(\alpha) = r_0(\alpha^T)$).

Детальное исследование поставленной задачи управления должно проводиться с применением методов математического моделирования. Изложенные выше подходы могут применяться для оценок и построения начальных приближений. Можно использовать также подход, основанный на раздельном управлении различными приводами при фиксированных значениях углов в остальных шарнирах.

Авторы благодарят Ф. Л. Черноусько за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. А. Манипуляционные роботы: Динамика и алгоритмы. М.: Наука. 1978. 398 с.
2. Book W. J. Analysis of massless elastic chains with servo controlled joints // Trans. ASME. J. Dynamic Syst. Measur. and Control. 1979. V. 101. No. 3. P. 187–192.
3. Дорогов В. В., Кулешов В. С., Лагода Н. А. и др. Моделирование манипулятора с упругими звеньями // Управление робототехническими системами и их очувствление. М.: Наука. 1983. С. 22–30.
4. Черноусько Ф. Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1981. № 5. С. 142–152.
5. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 3. С. 118–124.
6. Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Исследование динамики манипулятора с упругими звеньями // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 51–58.
7. Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Динамика упругого манипулятора при заданных управляющих моментах или движениях перемещаемого груза // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 19–25.
8. Чиликин М. Г., Ключев В. И., Сандлер А. С. Теория автоматизированного электропривода. М.: Энергия, 1979. 616 с.
9. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука. 1980. 383 с.
10. Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНТИ. 1982. Т. 20. С. 3–78.
11. Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 21–29.
12. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука. 1975. 495 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.VII.1986