

УДК 531.8

СПЕКТР ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ И КОЛЕБАНИЙ ЖЕСТКОСТИ  
В РОТОРНЫХ СИСТЕМАХ  
С НЕИДЕАЛЬНЫМИ ШАРИКОПОДШИПНИКАМИ

ПАВЛОВСКИЙ М. А., ПЕТРЕНКО В. Е.

Задача исследования влияния дефектов радиально-упорных шарикоподшипников (ШП) на динамику роторных систем (РС) в литературе рассматривалась неоднократно, при этом основное внимание уделялось анализу спектра возмущений для расчета вибрационной активности ШП [1]<sup>1</sup>, минимизации влияния вибрации на функционирование приборов [2] и т. п. Значительно меньшее внимание в литературе уделено исследованию зависимости жесткости ШП от их технологических дефектов, хотя интерес к этому явлению обусловлен как связью колебаний жесткости ШП с возникновением параметрических резонансов и эффектов параметрической регенерации в РС [3, 4], так и с возможностью использования указанных зависимостей для диагностики ШП. Сложность аналитического описания наблюдаемых изменений жесткости в общем случае определяется необходимостью одновременного учета нелинейности упругой характеристики и технологических дефектов ШП. В [3] для частного случая, когда выполняются условия гарантированного неполного контактирования, установлена связь гармоник колебаний жесткости частот мелькания шариков с преобладающими дефектами на кольцах. В [1] получен спектральный состав компонент матрицы жесткости одного ШП, основанный на учете только линейной зависимости колебаний жесткости от технологических дефектов. Более подробный анализ изменений осевой жесткости РС проведен в [5, 6].

В публикуемой статье дается обобщение результатов анализа спектра частот возмущающих сил и жесткости РС с неидеальными ШП и оценка степени влияния дефектов ШП на осевую жесткость и вибрацию.

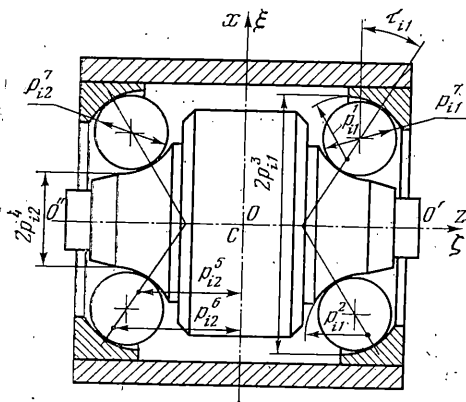
**1. Системы координат. Механическая модель.** Рассмотрим РС с неидеальными ШП, показанную на фиг. 1. Для описания ее движения введем две системы координат  $C\xi\eta\zeta$  и  $Oxyz$ , связанные соответственно с центральными осями инерции ротора и корпусом, в котором установлены неподвижные кольца ШП (наружные или внутренние). Для определенности ось  $Oz$  направим по геометрической оси  $O'O''$  посадочных поверхностей под наружные кольца. В случае если неподвижны внутренние кольца, то ось  $Oz$  целесообразно направлять по оси центров вала. В силу динамической симметрии ротора систему координат  $C\xi\eta\zeta$  выберем так, чтобы она не принимала участия в собственном вращении ротора. Положение ротора зададим тремя линейными  $x, y, z$  и двумя угловыми координатами  $\varepsilon$  и  $\delta$  (фиг. 2). Поверхности качения наружных и внутренних колец будем описывать в соответствующих системах координат, а шариков — в сферических координатах, отнесенных к центру шариков. Положение  $i$ -й контактной группы  $k$ -го ШП зададим углом  $\varphi_{ik}$ , отсчитываемым от оси  $x$  в направлении вращения ротора. Деформацию этой контактной группы запишем в форме

$$w_{ik} = (x_{ik}^2 + z_{ik}^2)^{1/2} - (m + \varepsilon, p_{ik}) \quad (1.1)$$

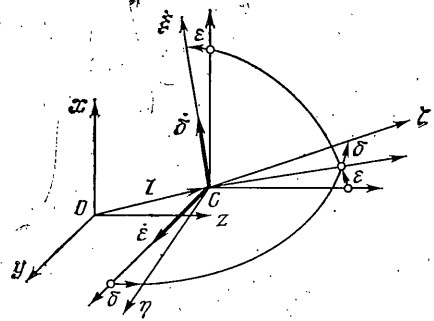
$$x_{ik} = (-1)^h (m, p_{ik}) + [x + (-1)^{h+1} p_{ik}^h \varepsilon] \cos \varphi_{ik} + [y - (-1)^{h+1} p_{ik}^h \delta] \sin \varphi_{ik}$$

$$z_{ik} = (-1)^{h+h+1} [(s, p_{ik}) + z_{0k}] + [z + (r^h, p_{ik}) (\delta \sin \varphi_{ik} - \varepsilon \cos \varphi_{ik})]$$

<sup>1</sup> Журавлев В. Ф. Теория вибрации гироскопов: Препринт № 22. М.: ИПМ АН СССР. 1972. 48 с.; Бальмонт В. Б., Сарычева Е. Н. Вибрация подшипников шпинделей станков. М.: НИИМаш. 1984. 64 с.



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^6 &= \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}^5 = \mathbf{r} - \mathbf{m}, \quad \mathbf{r} = \{0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0\} \\ \mathbf{m} &= \{1, 1, -1, 1, 0, 0, 0, 0\}, \quad \mathbf{s} = \{0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0\} \\ \mathbf{e} &= \{0, 0, 1, -1, 0, 0, -1, 0\} \end{aligned}$$

где  $h$  принимают значение 5 или 6 для РС с подвижными наружными или внутренними кольцами соответственно;  $(\mathbf{m}, \mathbf{p}_{ik})$  обозначает операцию скалярного произведения двух векторов. С учетом (1.1) потенциальная энергия примет вид:

$$\Pi = \frac{2}{5} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^2 p_{ik}^8 w_{ik}^{5/2} \quad (1.2)$$

С учетом выражения для потенциальной энергии (1.2) реакцию ШП подвеса ротора в направлении каждой из координат запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} F_x &= - \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^n \zeta_{ik} x_{ik} \cos \varphi_{ik} \\ F_y &= - \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^n \zeta_{ik} x_{ik} \sin \varphi_{ik}, \quad F_z = - \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^n \zeta_{ik} z_{ik} \\ F_e &= - \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^n \zeta_{ik} [(-1)^{k+1} p_{ik} x_{ik} - (\mathbf{r}^h, \mathbf{p}_{ik}) z_{ik}] \cos \varphi_{ik} \\ F_\delta &= - \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^n \zeta_{ik} [(-1)^k p_{ik}^h x_{ik} + (\mathbf{r}^h, \mathbf{p}_{ik}) z_{ik}] \sin \varphi_{ik} \\ \zeta_{ik} &= p_{ik}^8 w_{ik}^{3/2} \mu(w_{ik}) (x_{ik}^2 + z_{ik}^2)^{-7/2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\varphi_{ik} = \omega_{Ak} t + (i-1)\gamma + \varphi_{0k}$$

$$\mu(w_{ik}) = 1 \quad (w_{ik} > 0), \quad \mu(w_{ik}) = 0 \quad (w_{ik} \leq 0)$$

Введем обозначения  $\Delta p_{ik}^9 = x \cos \varphi_{ik} + y \sin \varphi_{ik}$ ,  $\Delta p_{ik}^{10} = z$ ,  $\Delta p_{ik}^{11} = \delta \sin \varphi_{ik} - \varepsilon \cos \varphi_{ik}$  и учтем  $p_{0k}^9 = p_{0k}^{10} = p_{0k}^{11} = 0$ . Предположим, что сближение колец под усилием осевого натяга больше деформаций, вызываемых внешними нагрузками и дефектами ШП. В этом случае для аналитических исследо-

ваний целесообразно разложить функции (1.3) в ряд Тейлора

$$-F_q = \frac{1}{m!} \sum_{h=1}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} a_{qih s_1 \dots s_m} \Delta p_{ih}^{s_1} \dots \Delta p_{ih}^{s_m} \quad (1.4)$$

$$a_{qih s_1 \dots s_m} = A_{s_1 \dots s_m}^{(2-x)h} \cos(\chi \varphi_{ih}^{-1} / 2 \mu \tau) \quad (1.5)$$

$$A_s^{1h} = (-1)^h \{ (a_5^h - a_7^h), (a_5^h - a_7^h), -a_5^h, a_5^h, -a_2^h, a_2^h, a_7^h, a_6^h, \\ (-1)^h a_5^h, (-1)^{h+1+h} a_2^h, (-1)^{h+1+h} (r_k a_2^h - a_5^h p_k^h) \}$$

$$A_s^{2h} = (-1)^{h+h+1} \{ (a_2^h - a_4^h), (a_2^h - a_4^h), -a_2^h, a_2^h, -a_1^h, a_1^h, \\ a_4^h, a_3^h, (-1)^h a_2^h, (-1)^{h+h+1} a_1^h, (-1)^{h+h+1} (r_k a_1^h - p_k a_2^h) \}$$

$$A_s^{3h} = (-1)^h p_k A_s^{1h} + r_k A_s^{2h}, p_k = p_{0k}^h, r_k = (r^h, p_{0k}^h)$$

$$\chi = \mu = 1 \quad (q=x, y), \chi = \mu = 0 \quad (q=z)$$

$$\chi = \mu = -1 \quad (q=\delta), \chi = -1, \mu = 2 \quad (q=\varepsilon)$$

$$\Delta p_{ih}^{sm} = p_{ih}^{sm} - p_{0k}^{sm}, s_m = 1 \dots 11$$

Здесь  $A_{s_1 s_2}^{2h}, A_{s_1 s_2}^{-1h}, A_{10 s_1 s_2}^{2h} \dots$  — симметричные квадраты матрицы, компоненты которых вычисляются по следующим формулам:

$$A_{33}^{2h} = A_{44}^{2h} = -A_{34}^{2h} = (-1)^{h+1} A_{39}^{2h} = (-1)^h A_{49}^{2h} = \\ = -A_{99}^{2h} = (-1)^{h+h+1} b_5^h$$

$$A_{35}^{2h} = A_{46}^{2h} = -A_{36}^{2h} = -A_{45}^{2h} = (-1)^{h+h} A_{310}^{2h} = (-1)^{h+h+1} A_{410}^{2h} =$$

$$= (-1)^{h+1} A_{59}^{2h} = (-1)^h A_{69}^{2h} = (-1)^{h+1} A_{910}^{2h} = (-1)^{h+h+1} b_2^h$$

$$A_{37}^{2h} = -A_{47}^{2h} = (-1)^{h+1} A_{79}^{2h} = (-1)^{h+h} b_7^h$$

$$A_{55}^{2h} = A_{66}^{2h} = -A_{56}^{2h} = (-1)^{h+h} A_{510}^{2h} = (-1)^{h+h+1} A_{610}^{2h} = A_{1010}^{2h} = (-1)^{h+h+1} b_1^h$$

$$A_{57}^{2h} = -A_{67}^{2h} = (-1)^{h+h} A_{710}^{2h} = (-1)^{h+h} b_4^h$$

$$A_{11s}^{2h} = (-1)^h p_h A_{9s}^{2h} - r_h A_{10s}^{2h}$$

Матрицу чувствительности  $A_{10 s_1 s_2}^{2k}$  легко получить из  $A_{s_1 s_2}^{2k}$  заменой  $b_v^h$  на  $c_v^h$  и умножением каждого элемента  $(-1)^{h+h+1}$ . Отметим, что выражения  $a_v^h, b_v^h$  и  $c_v^h$  получены с учетом изменения угла контакта в процессе деформирования III и имеют вид

$$a_1^h = a^h \sin^2 \tau_k (1 + 2/3 \nu_k \operatorname{ctg}^2 \tau_k)$$

$$a_2^h = a^h \sin \tau_k \cos \tau_k (1 - 2/3 \nu_k)$$

$$a_5^h = b^h \cos^2 \tau_k (1 + 2/3 \nu_k \operatorname{tg}^2 \tau_k), a_7^h = a_k \cos \tau_k$$

$$b_1^h = b^h \sin^3 \tau_k (1 + 6 \nu_k \operatorname{ctg}^2 \tau_k)$$

$$b_2^h = b^h \sin^2 \tau_k \cos \tau_k [1 - 2 \nu_k (2 - \operatorname{ctg}^2 \tau_k)]$$

$$b_4^h = b^h \sin^2 \tau_k (1 + 2 \nu_k \operatorname{ctg}^2 \tau_k)$$

$$b_5^h = a^h \sin \tau_k \cos^2 \tau_k [1 - 2 \nu_k (2 - \operatorname{tg}^2 \tau_k)]$$

$$b_7^h = \sin \tau_k \cos \tau_k (1 - 2 \nu_k)$$

$$c_1^h = c^h \sin^4 \tau_k (1 - 12 \nu_k \operatorname{ctg}^2 \tau_k)$$

$$c_2^h = c^h \sin^4 \tau_k \cos \tau_k [1 - 6 \nu_k (\operatorname{ctg}^2 \tau_k - 1)]$$

$$c_4^h = c^h \sin^3 \tau_k (1 - 6 \nu_k \operatorname{ctg}^2 \tau_k)$$

$$\begin{aligned}
 c_5^h &= c^h \sin^2 \tau_h \cos^2 \tau_h [1 - 2\nu_h (\operatorname{tg}^2 \tau_h + \operatorname{ctg}^2 \tau_h - 4)] \\
 c_7^h &= c^h \sin^2 \tau_h \cos \tau_h [1 + 2\nu_h (2 - \operatorname{ctg}^2 \tau_h)] \\
 a^h &= {}^3/2 p_{0h}^8 w_h^{1/2}, \quad b^h = {}^1/2 a^h w_h^{-1} \\
 c^h &= {}^{-1}/2 b^h w_h^{-1}, \quad \nu_h = w_h S_h^{-1}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

где  $S_h$  и  $\tau_h$  — расстояние между центрами кривизны и угол контакта в идеальном ШП после выставки усилия осевого натяга.

Из выражений (1.5) и (1.6) видно, что при расчете компонент матрицы жесткости переход от модели РС с неподвижными наружными кольцами ( $h=6$ ) к модели с неподвижными внутренними кольцами ( $h=5$ ) реализуется подстановкой соответствующих значений  $r_h$  и  $p_h$ . Для возмущающих сил необходимо к тому же изменить знак коэффициентов — чувствительный на обратный. Переход от схем с внутренним полюсом (полюса ШП лежат между опорами) к схемам с наружным полюсом осуществляется изменением в конечных выражениях знака угла контакта.

**2. Анализ частотного спектра возмущающих сил и компонент матрицы жесткости неидеального ШП.** Введем для обозначения параметров, соответствующих невращающемуся и вращающемуся кольцам  $A$  и  $B$ , которые принимают значения 1 для наружных и 2 для внутренних колец. Для обозначения параметров шариков применим индекс  $C$ . Учитывая, что изменение коэффициента Герца  $p_{ik}^s$  в основном зависит от неоднородности материала невращающихся  $\Delta p_{ik}^{sA}$ , вращающихся  $\Delta p_{ik}^{sB}$  колец и шарика  $\Delta p_{ik}^{sC}$ , опишем его с помощью ряда Тейлора

$$\begin{aligned}
 \Delta p_{ik}^s &= (\partial p_{ik}^s / \partial p_{ik}^{sA})_0 \Delta p_{ik}^{sA} + (\partial p_{ik}^s / \partial p_{ik}^{sB})_0 \Delta p_{ik}^{sB} + \\
 &+ (\partial p_{ik}^s / \partial p_{ik}^{sC})_0 \Delta p_{ik}^{sC} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для дальнейших исследований представим дефекты, возникающие из-за отклонения геометрических форм деталей ШП от идеальных и вследствие неоднородности материала, в виде разложения в ряд Фурье

$$\begin{aligned}
 \Delta p_{ik}^{sA} &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \Delta_{\alpha k}^{sA} \cos \{ \alpha [ \omega_{Ah} t + (i-1) \gamma + \varphi_{0k} + \theta_{\alpha k} ] \} \\
 \Delta p_{ik}^{sB} &= \sum_{\beta=1}^{\infty} \Delta_{\beta k}^{sB} \cos \{ \beta [ -\omega_{Bh} t + (i-1) \gamma + \varphi_{0k} + \theta_{\beta k} ] \} \\
 \Delta p_{ik}^{sC} &= \sum_{e=1}^{\infty} \Delta_{eik}^{sC} \cos [ 2e (\omega_{Ch} t + \theta_{eik} ) ] \\
 s_A; s_B &= 1, \dots, 6, 8A, B, s_C = 7, 8C
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где  $\omega_{Ah}$ ,  $\omega_{Bh}$  и  $\omega_{Ch}$  — соответственно угловые скорости вращения сепаратора относительно невращающихся, вращающихся колец и шариков относительно сепаратора. Используя обозначения (1.5), вибрационное возмущение и изменение компонент матрицы жесткости, вызываемые дефектами ШП, запишем в виде

$$\begin{aligned}
 -F_q &= \frac{1}{m!} \sum_{h=1}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^N A_{s_1 \dots s_m}^{(2-\chi)k} \Delta p_{ik}^{s_1} \dots \Delta p_{ik}^{s_m} \cos \left( \chi \varphi_{ik} - \mu \frac{\pi}{2} \right) \\
 k_{q_1 q_2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{m!} \sum_{h=1}^2 \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^N A_{(\chi_1 - \chi_2) s_1 \dots s_m}^{(2-\chi_1)k} \Delta p_{ik}^{s_1} \dots \\
 &\dots \Delta p_{ik}^{s_m} \cos [ (\chi_1 + \chi_2') \varphi_{ik} - (\mu_1 + \mu_2') \frac{\pi}{2} ]
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

где  $\chi_2 = \pm\chi_2$ ,  $\mu_2 = \pm\mu_2$ , причем знаки меняются одновременно. Принимая во внимание идентичность структуры возмущающих сил и компонент матрицы жесткости, механизм образования гармонических составляющих поясним на примере взаимодействия дефектов на кольцах одного из ШП. Рассмотрим следующее произведение косинусов, встречающееся в выражениях (2.3):

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n \cos\{\alpha[\omega_A t + (i-1)\gamma + \varphi_0 + \theta_\alpha]\} \cos\{\beta[-\omega_B t + (i-1)\gamma + \theta_\beta + \varphi_0]\} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n \cos\{(\alpha\omega_A - \beta'\omega_B)t + (\alpha + \beta')[(i-1)\gamma + \varphi_0] + \beta'\theta_\beta + \alpha\theta_\alpha\} = \\ & = \frac{n}{2} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \cos[(\alpha\omega_A - \beta'\omega_B)t + (\alpha'n\varphi_0 + \beta'\theta_\beta + \alpha\theta_\alpha)], \quad \beta' = \pm\beta \quad (2.4) \end{aligned}$$

Отметим, что последнее преобразование выражения (2.4) можно осуществить только при условии  $\alpha + \beta' = \lambda'n$ , так как в противном случае рассматриваемая сумма равна нулю. Из выражения (2.4) видно, что в случае  $\alpha = 0$  (первое приближение) гармоника дефекта подвижного кольца учитывается в спектре дважды. Для того чтобы исключить повторы в выражении, объединяющем частотные спектры первого и второго приближений, необходимо ввести функцию  $\mu(\Omega)$ , где  $\Omega = \alpha'\omega_A - \beta'\omega_B$ , принимающую значение 1 при  $\Omega \geq 0$  и 0 при  $\Omega < 0$ , и заменить в выражении (2.4)  $\alpha$  на  $\alpha'$ . Тогда, учитывая условие  $\alpha' + \beta' = \lambda'n$ , последнее выражение (2.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{n}{2} \mu(\Omega) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \cos[(\alpha'\omega_A - \beta'\omega_B)t + \theta] = \\ & = \frac{n}{2} \mu(\Omega) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \cos\{[\alpha'\omega_A - (\lambda'n - \alpha')\omega_B]t + \theta\} = \\ & = \frac{n}{2} \mu(\Omega) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \cos[(\alpha'\omega - \lambda'n\omega_B)t + \theta] = \\ & = \frac{n}{2} \mu(\Omega) \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \cos[(\lambda'n\omega_A + \beta'\omega)t + \theta] \\ & \theta = \lambda'n\varphi_0 + \alpha'\theta_\alpha + \beta'\theta_\beta \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$\kappa = \sum_{j=0}^a \alpha_j + \sum_{r=a+1}^b \beta_r$$

Если комбинация номеров гармоник дефектов колец удовлетворяет условию  $\kappa = \lambda'n$ , а погрешности шариков отсутствуют ( $b = N$ ), то зависимости (2.5) допускают следующее обобщение на  $N$ -е приближение:

$$\prod_{m=1}^N \sum_{i=1}^n \Delta p_i^{s_m} \cos\left(\chi\varphi_{ik} - \frac{\pi}{2}\mu\right) = \frac{1}{2^N} \left( \prod_{j=0}^a \prod_{r=a+1}^N \Delta_{\alpha_j}^{s_A} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \Delta_{\beta_r}^{sB} \mu(\Omega) \sum_{i=1}^n \cos \left\{ \alpha_j [\omega_A t + (i-1)\gamma + \varphi_0 + \theta_{\alpha_j}] + \right. \\
& \left. + \sum_{r=a+1}^N \beta_r' [-\omega_B t + (i-1)\gamma + \varphi_0 + \theta_{\beta_r}] + \chi' [\omega_A t + (i-1)\gamma] - \frac{\pi}{2} \mu \right\} = \\
& = \frac{1}{2^N} \left( \prod_{j=0}^a \prod_{r=a+1}^N \Delta_{\alpha_j}^{sA} \Delta_{\beta_r}^{sB} \right) n \mu(\Omega) \cos(\Omega t + \theta)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\Omega = \left( \sum_{j=0}^a \alpha_j' + \chi' \right) \omega_A - \sum_{r=a+1}^N \beta_r' \omega_B = \lambda' n \omega_A -$$

$$- \sum_{r=a+1}^N \beta_r' \omega = \sum_{j=0}^a (\alpha_j' + \chi') \omega - \lambda' n \omega_B$$

$$\theta = \lambda' n \varphi_0 + \sum_{j=0}^a \alpha_j' \theta_{\alpha_j} + \sum_{r=a+1}^N \beta_r' \theta_{\beta_r} - \frac{\pi}{2} \mu$$

$$\alpha_0 = 0, \Delta_{\alpha_0}^{sA} = 1, \chi = 0 \quad (q, q_1 = z)$$

$$\chi = 1 \quad (q, q_1 \neq z, q_2 = z), \chi = 2 \quad (q_1 \neq q_2 \neq z)$$

$$\chi = 0, \chi = 2 \quad (q_1 = q_2 \neq z)$$

Проведя аналогичные рассуждения для случая, когда несовершенны не только кольца, но и шарики, получаем

$$\begin{aligned}
& \prod_{m=1}^N \sum_{i=1}^n \Delta p_i^{s_m} \cos \left( \chi \varphi_i - \frac{\pi}{2} \mu \right) = \frac{1}{2^N} \sum_{i=1}^n \times \\
& \times \left( \prod_{j=0}^a \Delta_{\alpha_j}^{sA} \prod_{r=a+1}^b \Delta_{\beta_r}^{sB} \prod_{v=b+1}^N \Delta_{e_v}^{sC} \right) \mu(\Omega) \cos \left\{ \sum_{j=0}^a \alpha_j' [\omega_A t + (i-1)\gamma + \varphi_0 + \theta_{\alpha_j}] + \right. \\
& \left. + \sum_{r=a+1}^b \beta_r' [-\omega_B t + (i-1)\gamma + \varphi_0 + \theta_{\beta_r}] + \sum_{v=b+1}^N 2e_v' (\omega_C t + \theta_{e_v}) + \right. \\
& \left. + \chi' [\omega_A t + (i-1)\gamma + \varphi_0] - \frac{\pi}{2} \mu \right\} = \frac{1}{2^N} \prod_{j=0}^a \prod_{r=a+1}^b \Delta_{\beta_r}^{sB} \Delta_e^{sC} \mu(\Omega) \cos \times \\
& \times \left\{ \left[ \sum_{j=0}^a (\alpha_j' + \chi') \omega_A - \sum_{r=a+1}^b \beta_r' \omega_B + 2 \sum_{v=b+1}^N e_v' \omega_C \right] t + \theta^C + \theta_e \right\} \\
& \theta^C = \chi \varphi_0 + \sum_{j=0}^a \alpha_j' \theta_{\alpha_j} + \sum_{r=a+1}^b \beta_r' \theta_{\beta_r} - \frac{\pi}{2} \mu, \Delta_e^{sC} = (\Delta_{1e}^2 + \Delta_{2e}^2)^{1/2}, \\
& \theta_e = \arctg \Delta_{1e} \Delta_{2e}^{-1}, \Delta_{1e} = \sum_{i=1}^n \prod_{v=b+1}^N \Delta_{e_{vi}}^{sC} \sin \left[ \chi (i-1)\gamma + 2 \sum_{v=b+1}^N e_v' \theta_{e_i} \right] \\
& \Delta_{2e} = \sum_{i=1}^n \prod_{v=b+1}^N \Delta_{e_{vi}}^{sC} \cos \left[ \chi (i-1)\gamma + 2 \sum_{v=b+1}^N e_v' \theta_{e_i} \right]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Таким образом, если в комбинацию входят дефекты шариков, не требуется наложения никаких условий на соотношение между номерами

гармоник дефектов колец. Отметим, что согласно (2.7) при взаимодействии дефектов на кольцах, удовлетворяющих условию  $\kappa = \lambda' n$ , и разноразмерности шариков амплитуды возникающих гармоник оказываются в силу соотношения  $\Delta_0^{\lambda' n} = \sum \Delta_{0i} = 0$  ( $i=1, \dots, n$ ) равными нулю.

Полученные зависимости позволяют оценить эффективность создания ШП с детерминированным спектром. Ранее<sup>2</sup> на основании анализа структуры спектра вибрационного возмущения, генерируемого дефективными кольцами, и вибрации, создаваемой дефектами на шариках (согласно первому приближению), показана возможность сведения частот возмущающих сил к ряду  $\lambda \omega \pm \omega_A$ . При этом не учитывается большая группа гармоник, порождаемых комбинациями дефектов на шариках и кольцах. Влияние этих комбинаций тем меньше, чем больше деформация контактной группы от усилия осевого натяга и число шариков в комплексе. Таким образом, в общем случае выбор геометрии ШП хотя и сужает количество гармоник возмущения, однако не исключает возможности возникновения резонансных колебаний за счет неучтенных составляющих, например из-за гармоник, кратных частотам вращения сепараторов относительно колец.

В общем случае условия детерминированного спектра возмущений можно сформулировать следующим образом:

$$\omega_A = L_A \omega_m, \quad \omega_B = L_B \omega_m, \quad 2\omega_C = L_C \omega_m \quad (2.8)$$

где  $\omega_m$  — дискретность спектра;  $L_A, L_B, L_C = 1, 2, \dots$ . Учитывая, что  $\omega_m = \omega (L_A + L_B)^{-1}$ , зависимости (2.8) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \omega_A &= L_A \omega / (L_A + L_B), \quad \omega_B = L_B \omega / (L_A + L_B), \\ 2\omega_C &= L_C \omega / (L_A + L_B) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Используя известные кинематические и геометрические соотношения, получим следующие зависимости для углов контакта и заполнения:

$$\cos \tau = L_C (L_B - L_A) / (4L_A L_B) \quad (2.10)$$

$$\Phi = 2(n-1) \arcsin \{ 4L_A L_B / [L_C (L_A + L_B)] \}$$

Из результатов расчета, приведенных в таблице, следует, что дискретность общего спектра (колонка 1), равную  $1/3$  угловой скорости вращения ротора, которая при этом оказывается равной угловой скорости вращения сепаратора, можно обеспечить только при количестве шариков  $n=6$  и  $n=7$ . Для  $n=6$  в силу выполнения условия  $(L_A + L_B)v = n$  ( $v=1, 2, \dots$ ) спектр от дефектов колец (колонка 2) имеет разряжение равное частоте вращения ротора. В случае выбора для  $n=6$  угла контакта  $\tau = 41,4^\circ$  с такой же дискретностью  $\omega$  располагаются гармонические составляющие, порождаемые дефектами формы шариков. Для ШП с количеством шариков от 5 до 14 можно реализовать дискретность  $\omega_m/\omega = 1/5$ , обеспечив при этом достаточно широкий перечень рекомендованных углов контакта. Дальнейшее увеличение суммы  $L_A + L_B$  приводит к уменьшению дискретности спектра, поэтому при  $L_A + L_B > 5$  целесообразно разряжать только гармоники, порождаемые дефектами колец.

Отметим, что для снижения вибрационной активности РС необходимо увязывать возможные изменения собственных частот конструкции с шагом детерминированного спектра. Применение ШП с детерминированным спектром для снижения вибрации целесообразно прежде всего для высокоскоростных РС. При этом для гироскопов сведение вибрационного возмущения, генерируемого ШП к ряду частот, кратных  $\omega$ , может оказаться не всегда удачным. Например, для динамически настраиваемых гироскопов увеличение вибрации ШП на частотах  $\omega$  и  $2\omega$  нежелательно. Отметим, что в ШП с детерминированным спектром комбинации дефектов, образующие при идеальном выполнении требований по комплектации ШП постоянные смещения ротора, вследствие естественных отклонений параметров ШП от номинальных будут вызывать низкочастотные колебания, влияющие на показания гироскопов. Создание детерминированного спектра вибрационных возмущений автоматически приводит к упорядочению частот гармонических составляющих компонент матрицы жесткости. Таким образом, исключается появление новых гармоник вибрации за счет комбинаций частот возмущения и изменения жесткости РС.

Полученные зависимости (2.6) и (2.7) позволяют не только указать возможный набор частот гармоник возмущающих сил, но и связывать эти гармоники так же, как и гармоники колебаний жесткости с конкретными дефектами, что дает возможность использовать упомянутые зависимости при диагностике ШП. Для того чтобы получить полный спектральный состав перечисленных выше параметров, достаточно рассмотреть первые три приближения (по числу элементов, образующих контакт-

<sup>2</sup> См. указ. публ. Бальмонт В. Б., Сарычев Е. Н. с 64.

$L_A$	$L_B$	$n$	$L_C$	1	2	$\tau^\circ$	$\Phi^\circ$
1	2	6	7	1	$1/3$	29,0	224
1	2	6	6	1	$1/3$	41,4	264
1	2	7	7	$1/3$	$1/3$	29,0	268
2	3	5	21	1	$1/5$	29,0	105
2	3	6	22	$1/5$	$1/5$	23,5	151
2	3	6	21	$1/5$	$1/5$	29,0	158
2	3	7	23	$1/5$	$1/5$	16,6	144
2	3	7	22	$1/5$	$1/5$	23,5	151
2	3	7	21	$1/5$	$1/5$	29,0	158
2	3	8	23	$1/5$	$1/5$	16,6	192
2	3	8	22	$1/5$	$1/5$	23,5	201
2	3	8	21	$1/5$	$1/5$	29,0	211
2	3	9	23	$1/5$	$1/5$	16,6	217
2	3	9	22	$1/5$	$1/5$	23,5	226
2	3	9	21	$1/5$	$1/5$	29,0	237
2	3	10	23	1	$1/5$	16,6	226
2	3	10	22	1	$1/5$	23,5	237
2	3	10	21	1	$1/5$	29,0	244
2	3	14	23	$1/5$	$1/5$	16,6	313

ную группу: два кольца и шарик). При этом спектр частот, формируемый дефектами одного из этих элементов, однозначно получается уже из первого приближения, взаимодействием дефектов двух элементов контактной группы — из второго приближения, взаимодействием всех трех элементов — из третьего приближения. Учет последующих приближений спектра частот не меняет, а приводит только к изменению амплитуд гармоник за счет увеличения количества комбинаций дефектов, участвующих в их формировании.

Следовательно, задача диагностики радиально-упорных ШП может быть решена только при некоторых допущениях, основанных на априорной информации о геометрии ШП, соотношении между амплитудами дефектов и предварительным сближением колец и т. п. Для ШП, предварительное сближение колец которых обеспечивает режим полного контактирования, вклад высших приближений заметно убывает с увеличением номера приближения, поэтому при исследовании амплитуд спектральных составляющих необходимо прежде всего ориентироваться на дефекты, вызывающие их появление согласно приближению с минимальным номером. Учитывать влияние последующих приближений целесообразно только для преобладающих дефектов, к которым, как правило, относятся овальность и трехгранность колец. Если согласно первому приближению все дефекты форм шариков отражаются в спектрах всех рассматриваемых параметров, то разноразмерность шариков в комплекте не влияет на осевую вибрацию и колебания осевой жесткости, а среди гармоник дефектов колец колебания упомянутых параметров вызывают дефекты, номера которых удовлетворяют условию  $e = |\lambda' n + \chi|$ , причем обычно первые гармоники дефектов ( $\lambda = 0$ ) можно определить только для вращающегося кольца: перекос кольца ( $e = 1$ ) по радиальной (угловой) вибрации или перекрестным жесткостям  $k_{zq}$  ( $q = x, y, e, \delta$ ), овальность дорожки качения на кольцах ( $e = 2$ ) по радиальной (угловой) жесткости. Во втором и третьем приближениях только гармоники осевого возмущения и жесткости однозначно связаны с комбинациями дефектов, принадлежащим двум и трем элементам контактной группы соответственно; для радиальной (угловой) вибрации и перекрестных жесткостей  $k_{zq}$  каждой гармонике соответствуют две комбинации таких дефектов, а для радиальной (угловой) жесткости — три. Таким образом, очевидно преимущество использования первых двух параметров  $F_z$  и  $k_{zz}$  для диагностики дефектов ШП. Спектры этих двух параметров полностью совпадают, однако в силу переменности компонент матрицы жесткости зависимость амплитуд осевой вибрации от дефектов может оказаться сложнее, чем осевого возмущения.

**3. Исследование зависимости амплитуд изменений осевой жесткости от дефектов.** Расчет частотного спектра возмущающих сил и компонент матрицы жесткости является первым этапом исследования РС. Гораздо сложнее провести анализ амплитуд возникающих гармоник. Оценим степень влияния на амплитуды гармоник колебаний осевой жесткости РС с двумя неодинаковыми ШП их дефектов и постоянных внешних сил и моментов, действующих на ротор. Используя решения уравнений равновесия ротора на неидеальных ШП, изменение осевой жесткости, описываемое первым и вторым приближениями, представим соответственно в виде (при записи выражений второго приближения опущены слагаемые, описывающие взаимодействие дефектов на шариках, и постоянные изменения жесткости, вызываемые силами и моментами)



$$k_{zz1} = \sum_{k=1}^2 \left\{ n W_s^k \sum_{\lambda=1}^{\infty} \Delta_{\lambda n k}^s \cos \lambda n [(-1)^{v+A} \omega_{v k} t + \varphi_{0k} + \theta_{\lambda n k}] + \right. \\ \left. + W_{sC} \sum_{e=0}^{\infty} \Delta_{ek} \cos (2e \omega_{Ck} t + \theta_{ek}) \right\} \quad (3.4)$$

$$k_{zz2} = \frac{n}{4} \sum_{k_1=1}^2 \sum_{k_2=1}^2 \left( G_{ss^0}^{k_1 k_2} \sum_{e_1=1}^{\infty} \sum_{e_2=1}^{\infty} \mu_{e_2}^{|\lambda' n - e_1|} \right) M. \\ \Delta_{e_1 k_1} \Delta_{e_2 k_2}^s \cos \{ [(-1)^{v_1+A} e_1 \omega_{v_1 k_1} + (-1)^{v_2+A} (\lambda' n - e_1) \omega_{v_2 k_2}] t + (\lambda' n - e_1) (\varphi_{0k_2} + \\ + \theta_{e_2 k_2}) + e_1 (\varphi_{0k_1} + \theta_{e_1 k_1}) - \Xi \} + \frac{2}{n} G_{ssC}^{k_1 k_2} \sum_{e_1=1}^{\infty} \sum_{e=0}^{\infty} M \Delta_{e_1 k_1}^s \cos \{ [(-1)^{v+A} e_1' \omega_{v k_1} + \\ + 2e \omega_{Ck_2}] t + e_1' (\varphi_{0k_1} + \theta_{e_1 k_1}) + \theta_{e k_2} - \Xi \} + \\ + \sum_{k=1}^2 \left\{ (U_{P_s^k} P_{q_1} - U_{M_{sC}^k} M_{q_2}) \sum_{e_1=1}^{\infty} \mu_{e_1}^{|\lambda' n - 1|} \Delta_{e_1 k}^s \cos [(-1)^{v+A} (\lambda' n - 1) \omega_{v k} + \omega_{A k}] t + \right. \\ \left. + \lambda' n \varphi_{0k} + (\lambda' n - 1) \theta_{e_1 k} - \mu \frac{\pi}{2} \right] + V_{P_s^k} P_z \sum_{\lambda=1}^{\infty} \Delta_{\lambda n k}^s \times \\ \times \cos \lambda n [(-1)^{v+A} \omega_{v k} t + \theta_{\lambda n k}] + n^{-1} (U_{P_{sC}} P_{q_1} - \\ - U_{M_{sC}^k} M_{q_2}) \sum_{e=0}^{\infty} \Delta_{e k}^s \cos \left[ (2e' \omega_{Ck} + \omega_{A k}) t + \varphi_{0k} + \theta_{e k} - \mu \frac{\pi}{2} \right] + \\ \left. + n^{-1} V_{P_{sC}} P_z \sum_{e=0}^{\infty} \Delta_{e k} \cos (2e \omega_{Ck} t + \theta_{e k}) \right\} \quad (3.2)$$

$$\mu=0 \quad (q_1=x, q_2=\varepsilon), \quad \mu=1 \quad (q_1=y, q_2=\delta)$$

$$\Xi = \chi_1' [(\omega_{A k_1} - \omega_{A k_2}) t + \varphi_{0k_1} - \varphi_{0k_2}]$$

$$\mu = \mu_{r_1}^{k_2} + (1 - \mu_{k_1}^{k_2}) \mu_e^{|\lambda' n + \chi_1|}$$

$$\chi_j = 0, 1, e_j = \alpha, \beta \quad (j=1, 2)$$

$$G_{ss^*}^{k_1 k_2} = U_{ss^*}^{k_1 k_2} \quad (e_1 = |\lambda' n + 1|)$$

$$G_{ss^*}^{k_1 k_2} = V_{ss^*}^{k_1 k_2} \quad (e_1 = \lambda n)$$

$$G_{ss^*}^{k_1 k_2} = W_{ss^*}^{k_1 k_2} \quad (e_1 \neq |\lambda' n + \chi_1|)$$

$$W_{s^*}^k = A_{10s^*}^{2k} - a A_{ss^*}^{2k}, \quad W_{ss^*}^{k_1} = A_{10ss^*}^{2k_1} - a A_{ss^*}^{2k_1}$$

$$U_{ss^*}^{k_1 k_2} = \mu_{k_1}^{k_2} W_{ss^*}^{k_1 k_2} - a_{s^*}^{k_2} (A_{109s}^{2k_1} - a A_{9s}^{2k_1}) - a_s^{2k_1} (A_{109s^*}^{2k_1} - a A_{9s^*}^{2k_1}) + b_{s^*}^{k_2} (A_{1011s}^{2k_1} -$$

$$- a A_{11s}^{2k_1}) + b_s^{k_1} (A_{1011s^*}^{2k_2} - a_{11s^*}^{2k_2}) + a_s^{k_1} a_{s^*}^{k_2} \left( \sum_{k=1}^2 A_{1099}^{2k} - a \sum_{k=1}^2 A_{99}^{2k} \right) -$$

$$- (a_s^{k_1} b_{s^*}^{k_2} + a_{s^*}^{k_2} b_s^{k_1}) \left( \sum_{k=1}^2 A_{10911}^{2k} - a \sum_{k=1}^2 A_{911}^{2k} \right) + b_s^{k_1} b_{s^*}^{k_2} \left( \sum_{k=1}^2 A_{101111}^{2k} - \right. \\ \left. - a \sum_{k=1}^2 A_{1111}^{2k} \right)$$

$$V_{ss^*}^{h_1 h_2} = \mu_{h_1}^{h_2} W_{ss^*}^{h_1} - \left( \sum_{h=1}^2 A_{10}^{2h} \right)^{-1} \left[ A_{s^*}^{2h_2} (A_{1010s}^{2h_1} - a A_{10s}^{2h_1}) - \right. \\ \left. - A_s^{2h_1} (A_{1010s^*}^{2h_2} - a A_{10s^*}^{2h_2}) + A_s^{2h_1} A_{s^*}^{2h_2} \left( \sum_{h=1}^2 A_{101010}^{2h} - a \sum_{h=1}^2 A_{1010}^{2h} \right) \left( \sum_{h=1}^2 A_{10}^{2h} \right)^{-2} \times \right. \\ \left. \times \left( \sum_{h=1}^2 A_{101010}^{2h} - a \sum_{h=1}^2 A_{1010}^{2h} \right) \right]$$

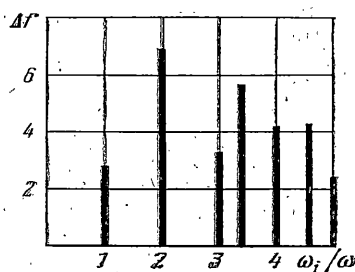
где  $\mu_{h_1}^{h_2}, \mu_{e_1}^{|\lambda' n + z_1|}, \dots$  — символы Кронекера,  $\lambda'$  — любое целое число.

Структура полученных коэффициентов полностью отражает пути их формирования. Первые слагаемые в приведенных выражениях получены без учета перемещений ротора, вызванных дефектами. Перемещение ротора вдоль оси, описываемые тем же приближением, что и изучаемое изменение жесткости, отражено во всех коэффициентах слагаемыми с множителями  $a$ . Множитель  $a$  обращается в нуль для РС с номинально одинаковыми ШП и достигает максимального значения для РС с мягким упругим компенсатором, а также для отдельного ШП. В дальнейшем будем называть такие РС несимметричными. Для несимметричных РС в силу чередования знаков в разложении зависимости Герца в ряд Тейлора происходит компенсация (с точностью до слагаемых, содержащих параметр  $\nu_h$ ) коэффициентов первого приближения и удвоение коэффициентов последующих приближений (последнее замечание справедливо, если внутри слагаемых с множителем  $a$  и без него не происходит компенсации до величин порядка  $\nu_h$ ).

Остальные слагаемые в коэффициентах  $U_{ss^*}^{h_1 h_2}$  и  $V_{ss^*}^{h_1 h_2}$  учитывают вклад движения ротора соответственно по радиальным (угловым) и осевой координатам, согласно первому приближению.

Если движение ротора в первом приближении можно рассматривать как сумму перемещений независимо от дефектов каждого из шарикоподшипников, то во втором приближении коэффициенты влияния дефектов, вызывающие это движение, обращаются в нуль. Следовательно, упомянутые коэффициенты обращаются в нуль для одного ШП. Из анализа соотношений  $a_{s^*}^k$  и  $b_{s^*}^k$  видно, что если не учитывать изменений угла контакта при деформации ШП ( $\nu_h$ ), то движение ротора по радиальным (угловым) координатам, вызываемое гармониками дефектов колец  $e_j = |\lambda' n + 1|$  и погрешностями шариков, описываемых функциями  $\Delta_e^{\lambda' n + 1}$ , формируется независимо дефектами каждого из ШП. В результате коэффициенты влияния произведений указанных дефектов, принадлежащих одному ШП, на осевую жесткость, равно как и на осевые перемещения ротора, оказываются пропорциональными малому множителю  $\nu_h$ .

В силу того что перемещение ротора вдоль оси ограничивает суммарная жесткость опоры, полная компенсация (с точностью до  $\nu_h$ ) в коэффициентах влияния комбинаций дефектов, содержащих гармоники некруглости колец, номера которых удовлетворяют условию  $e_j = \lambda n$ , возможна, если осевой жесткостью второй опоры можно пренебречь. Это условие реализуется в несимметричных РС с упругим компенсатором. В остальных случаях коэффициенты влияния перечисленных выше дефектов уменьшаются, однако полной компенсации не происходит. Аналогичные выводы следуют из рассмотрения слагаемых в коэффициентах с множителем  $a$ , следовательно, условия компенсации коэффициентов влияния дефектов на осевую статическую вибрацию совпадают с полученными для осевой жесткости, за тем исключением, что во втором приближении компенсация влияния комбинации дефектов, содержащих гармоники  $e_j = \lambda n$ , происходит наряду с несимметричными РС также и в случае РС с двумя номинально одинаковыми ШП. Из выражения (3.2) видно, что во втором приближении гармоники дефектов разных ШП, вызывающие перемещение ротора согласно первому приближению, образуют как дополнительные спектральные составляющие осевой жесткости и вибрации, так и изменяют амплитуды гармоник, формируемых дефектами одного ШП.



Фиг. 3

Однако чувствительность осевой жесткости и вибрации к взаимодействию дефектов разных ШП оказывается малой, поскольку зависит от разности близких коэффициентов, описывающих нелинейность упругих свойств ШП.

Таким образом, во втором приближении прежде всего необходимо учитывать влияние произведенных дефектов одного ШП, несодержащих гармоники дефектов колец  $e_j = |\lambda' n + \chi_1|$ . Среди гармоник дефектов колец  $e_j = |\lambda' n + 1|$  следует удерживать только первые гармоники дефектов на кольцах ( $e=1$ ), амплитуды которых существенно больше амплитуд остальных дефектов. Этим же номерам дефектов на неподвижных кольцах эквивалентно действие постоянных сил и моментов, приложенных к ротору в радиальной плоскости. При ориентации внешней нагрузки вдоль оси частотный спектр не изменяется.

На фиг. 3 приведены результаты спектрального анализа изменений собственной частоты осевых колебаний РС с ШП СФ-84. Обработывался массив данных из 300 точек, полученных за 5 оборотов ротора. Полученные результаты подтверждают необходимость учета второго приближения для описания наблюдаемых изменений, поскольку предсказанные согласно выражению (3.2) гармоники, формируемые дефектами на кольцах, включая перекосы колец ( $e=1$ ), превышают или соизмеримы с амплитудами гармоник  $8\omega_1 \approx 3,4\omega$  и  $8\omega_2 \approx 4,6\omega$ , ожидаемыми из первого приближения. Гармоники колебаний жесткости, связанные с взаимодействием погрешностей шариков и колец, не превысили выбранного в данном эксперименте порогового значения в 2 Гц. Это объясняется как тем, что их коэффициенты чувствительности в  $1/2n \cos t$  меньше, чем у гармоник, образованных только дефектами на кольцах, так и тем, что в испытательной РС не нарушены обычные соотношения между дефектами колец и шариков.

Таким образом, полученные результаты позволяют не только рассчитать и оптимизировать спектр частот возмущающих сил и изменений жесткости, но и связывать амплитуды гармоник с конкретными дефектами ШП, что дает возможность строить системы диагностики ШП.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вибрации подшипников/Рагульский К. М. и др. Вильнюс: Изд-во «МИНТИС». 1974. 392 с.
2. Петренко В. Е., Захаренко С. А. Выбор параметров упругодемпфирующих элементов гиросприбора // Механика гироскопических систем. 1985. Вып. 4. С. 59–63.
3. Явленский К. Н., Явленский А. К. Вибродиагностика и прогнозирование качества механических систем. Л.: Машиностроение. 1983. 240 с.
4. Павловский М. А., Петренко В. Е. Эффект параметрической регенерации при нелинейных пространственных колебаниях // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. № 8. С. 48–52.
5. Петренко В. Е., Батов А. И. Исследование осевой жесткости роторной системы с неидеальными подшипниками // Механика гироскопических систем. 1983. Вып. 2. С. 82–89.
6. Особенности описания и использования для диагностики состояния шарикоподшипников изменений осевой жесткости роторной системы/Петренко В. Е., Беляков А. Н., Левчук Е. Г., Батов А. И. // Механика гироскопических систем. 1986. Вып. 5. С. 39–50.

Киев

Поступила в редакцию  
14.IV.1986