

УДК 531.384

## БИФУРКАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ КОЛЕСНОГО ЭКИПАЖА

ВЕРБИЦКИЙ В. Г., ЛОБАС Л. Г.

Исследуется множество стационарных состояний модели колесного экипажа в рамках нелинейной аксиоматики [1] при плоскопараллельном движении. Существенными параметрами, определяющими топологическую структуру фазового пространства, являются скорость движения и угол поворота передних колес относительно корпуса. С точки зрения теории катастроф [2] они играют роль управляющих параметров. Характерным значением первого параметра, при превышении которого прямолинейное движение становится неустойчивым, является критическая скорость [3]. Показано, что при ее наличии бифуркации кругового движения связаны с катастрофой сборки, т. е. малые изменения второго управляющего параметра могут привести к конечным скачкам в многообразии стационарных режимов. Анализ устойчивости стационарных состояний проведен на основе понятия индекса особых точек. Приведены результаты численных экспериментов для характерного случая.

1. Уравнения движения экипажа с заданной скоростью  $v = \text{const}$  имеют вид

$$\dot{\omega} = P(\omega, u), \quad \dot{u} = Q(\omega, u) \quad (1.1)$$

$$P(\omega, u) = (l_1 Y_1 \cos \theta - l_2 Y_2) / I, \quad Q(\omega, u) = (Y_1 \cos \theta + Y_2) / m - v\omega$$

где  $m$  — масса,  $I$  — момент инерции экипажа относительно вертикали, проходящей через его центр масс  $D$ ,  $v$ ,  $u$  — продольная и поперечная скорости точки  $D$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  — расстояния от точки  $D$  до середин передней и соответственно задней осей,  $\omega$  — угловая скорость рысканья,  $\theta$  — угол поворота передних колес относительно корпуса.

Зависимости  $Y_i(\delta_i)$  боковых реакций от углов увода

$$\delta_1 = \theta - \text{arctg} [(u + l_1 \omega) / v], \quad \delta_2 = \text{arctg} [(-u + l_2 \omega) / v] \quad (1.2)$$

примем удовлетворяющими условиям [4]:

$$k_i(\delta_i) = d(Y_i/N_i)/d\delta_i > 0, \quad Y_i(0) = 0, \quad Y_i(-\delta_i) = -Y_i(\delta_i) \\ Y_i'(0) = a_i, \quad \lim_{\delta_i \rightarrow \pi/2} (Y_i/N_i) = c_i = \text{const} \quad (1.3)$$

В [5] принято, что поперечные скорости центров колес значительно меньше продольных:  $|u + l_1 \omega| \ll v$ ,  $|u - l_2 \omega| \ll v$ . Поэтому

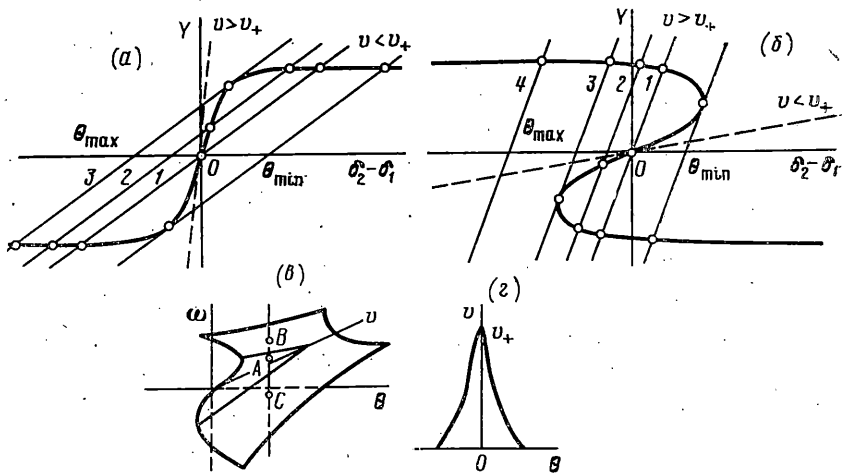
$$\delta_1 = \theta - (u + l_1 \omega) / v, \quad \delta_2 = (-u + l_2 \omega) / v \quad (1.4)$$

Если вместо (1.2) пользоваться (1.4), то в последнем условии (1.3) следует считать  $\delta_i \rightarrow +\infty$ .

Рассматриваемая здесь динамическая система отличается от [3, 4] тем, что в последних  $\theta = 0$ . Положив  $I = \gamma m l_1 l_2$  ( $0 < \gamma < 1$ ), исключив время из (1.1) и произведя замену  $\omega$ ,  $u \rightarrow \delta_1$ ,  $\delta_2$ , получаем

$$\frac{d\delta_2}{d\delta_1} = \frac{l_2(\gamma - 1) Y_1 N_1^{-1} \cos \theta + (\gamma l_1 + l_2) Y_2 / N_2 - \gamma g^{-1} v^2 (\theta + \delta_2 - \delta_1)}{(\gamma l_2 + l_1) Y_1 N_1^{-1} \cos \theta + l_1(\gamma - 1) Y_2 / N_2 - \gamma g^{-1} v^2 (\theta + \delta_2 - \delta_1)} \quad (1.5)$$

В [5] исследованы интегральные кривые уравнения (1.5) методом изоклин при  $\gamma = 1$ ,  $\cos \theta \approx 1$ . В общем случае нахождение особых точек сво-



Фиг. 1

дится к решению системы

$$mv\omega = Y_1 \cos \theta + Y_2, \quad Y_1 l_1 \cos \theta = Y_2 l_2 \quad (1.6)^a$$

а исследование устойчивости стационарного состояния  $\omega_*$ ,  $u_*$  — к анализу уравнения в вариациях

$$\omega'' + p\omega' + q\omega = 0$$

$$p = -[\text{div}(P, Q)]_{(\omega_*, u_*)}, \quad q = [D(P, Q)/D(\omega, u)]_{(\omega_*, u_*)}$$

В силу условия  $dY_i/d\delta_i > 0$  дивергенция векторного поля, заданного системой (1.1):

$$\text{div}(P, Q) = -\frac{1}{v} \left[ \left( \frac{l_1^2}{I} + \frac{1}{m} \right) \frac{dY_1}{d\delta_1} \cos \theta + \left( \frac{l_2^2}{I} + \frac{1}{m} \right) \frac{dY_2}{d\delta_2} \right]$$

отрицательна во всей плоскости  $\omega u$ , т. е. для любого стационарного режима всегда  $p > 0$ . Для определения знака  $q$  удобно использовать понятие индекса  $j$  особой точки. При непрерывном изменении параметра системы (1.1) знак  $j$  может измениться лишь при слиянии с другими особыми точками либо вследствие рождения в рассматриваемой точке новых особых точек. Это позволяет определять знак  $q$  (а следовательно, и устойчивость стационарных решений), используя информацию лишь об устойчивости особой точки в начале координат (прямолинейное движение), и при изменении параметра  $\theta$ , проследивая перемещение особой точки, первоначально находящейся при  $\theta = 0$  в начале координат. Заметим, что стационарным решениям системы (1.1) (особым точкам ее) соответствует круговое движение экипажа на неподвижной плоскости.

В обозначениях [3] система (1.6) равносильна следующей  $Y = -Y(\delta_2 - \delta_1)$ ,  $Y = v^2 g^{-1} l^{-1} (\theta + \delta_2 - \delta_1)$ , причем  $Y = Y_1 N_1^{-1} \cos \theta = Y_2 / N_2$ . Рассмотрим ситуации, когда в прямолинейном движении существует критическая скорость.

2. Исследуем сначала случай малых значений управляющего параметра  $\theta$  ( $\cos \theta \approx 1$ ).

1°. Если  $k_1(0) > k_2(0)$ ,  $c_1 > c_2$ , то потеря устойчивости прямолинейного движения вызвана [4] слиянием в начале координат двух седловых точек при  $v = v_+$  ( $v_+$  — критическая скорость прямолинейного движения [3]). Кривая

$$Y = Y(\delta_2 - \delta_1) \quad (2.1)$$

имеет вид, показанный на фиг. 1, а. Двум прямым, проходящим через начало координат, соответствует движение с углом поворота передних колес  $\theta = 0$ : для прямой 1 — со скоростью  $v < v_+$ , а для штриховой — с  $v > v_+$ . Ин-

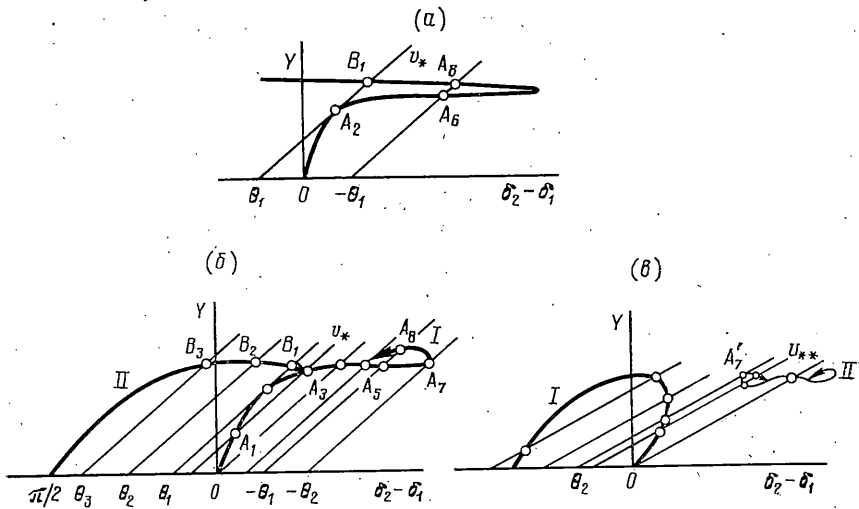
декс Пуанкаре начала координат при  $v < v_+$  равен 1, при  $v > v_+$  равен  $-1$ , причем в последнем случае других особых точек нет. Поэтому при  $v < v_+$  сумма индексов всех особых точек должна быть равной  $-1$ ; следовательно, две другие особые точки на прямой 1 — седла. Прямыми 2 и 3 соответствует движение со скоростью  $v < v_+$ , такой же, что и прямой 1, но для них  $\theta \neq 0$ . При непрерывном изменении параметра  $\theta$  индекс любой особой точки может измениться в данном случае лишь при слиянии с другими особыми точками, поэтому индексы особых точек на прямой 2 такие же, как и на прямой 1. У ближайшей к началу координат особой точки он равен 1, и эта точка в рассматриваемом случае асимптотически устойчива. Индексы двух других особых точек на прямой 2 равны  $-1$ . Прямой 3 соответствует потеря устойчивости стационарного состояния, поскольку при значении  $\theta = \theta_{\max}$  сливаются две особые точки с индексами  $j=1$  и  $j=-1$  (как и при  $\theta_{\min} = -\theta_{\max} < 0$ ). При  $\theta > \theta_{\max}$  имеется лишь одна особая точка — седло на нижней части кривой (2.1). При движении со скоростью  $v > v_+$  для любого значения угла поворота  $\theta$  имеется единственный неустойчивый стационарный режим (особая точка — седло), который практически никогда не наблюдается.

2°. Если  $k_1(0) > k_2(0)$ ,  $c_1 < c_2$ , то потеря устойчивости прямолинейного движения вызвана рождением в начале координат кратной особой точки при  $v = v_+$  [3, 4]. Из фиг. 1, б следует, что при  $v < v_+$  и любом  $\theta$  существует единственное асимптотически устойчивое стационарное состояние. При  $v > v_+$  и  $\theta = 0$  имеются три особые точки: седло в начале координат ( $j=-1$ ) и две асимптотически устойчивые особые точки ( $j=1$ ), которые могут быть фокусами или узлами. Прямыми 2—4 соответствует одна скорость  $v > v_+$ , но различные  $\theta$ . Особые точки на прямой 2 имеют такой же характер, что и на прямой 1. При  $\theta = \theta_{\max}$  в нижней части кривой (2.1) сливаются и исчезают седло и асимптотически устойчивая особая точка (прямая 3). При любом  $\theta > \theta_{\max}$  имеется единственная асимптотически устойчивая особая точка (прямая 4), т. е. при прохождении значения  $\theta = \theta_{\max}$  при  $v > v_+$  малому изменению параметра  $\theta$  может соответствовать конечный скачок от устойчивого стационарного режима на нижней части кривой (2.1) к устойчивому стационарному режиму на верхней части. В данном случае критическая скорость  $v_+$  прямолинейного движения не является определяющей с точки зрения условий устойчивости круговых движений.

Существование конечных скачков в многообразии особых точек при малых изменениях параметра  $\theta$  указывает на наличие катастрофы сборки [2]. На фиг. 1, в двумерное многообразие катастрофы сборки для случая 1° изображено вложенным в пространство  $R^3 = R^1 \otimes R^2$ . Сепаратриса катастрофы сборки показана на фиг. 1, г; она ограничивает бифуркационное множество в плоскости параметров  $\theta, v$ , острие которого находится в точке  $(0, v_+)$ . Сепаратриса разделяет пространство управляющих параметров на две открытые области с одной и соответственно тремя особыми точками системы (1.1). Значениям параметров внутри бифуркационного множества соответствуют три простые особые точки, значениям на границе — одна простая и одна двукратная особая точка. Кратность особой точки в острие  $(0, v_+)$  равна трем. Оно соответствует бифуркации особой точки в начале координат плоскости  $\omega, i$ , т. е. потере устойчивости прямолинейного движения. Значениям параметров вне бифуркационного множества соответствует одна неустойчивая особая точка.

Параметрам из бифуркационного множества соответствуют устойчивые особые точки, лежащие на внутренней части сборки, и по две неустойчивые особые точки на ее внешних частях (точки A и соответственно B, C на фиг. 1, в). Если параметр  $\theta$  изменяется так, что при этом пересекается граница бифуркационного множества, то в соответствующей точке границы происходит слияние устойчивой и неустойчивой особых точек с последующим их исчезновением.

Учет множителя  $\cos \theta$  при  $Y_1$  в (1.1) существенно изменяет вид многообразия особых точек, однако в некоторой малой окрестности точки  $(0, v_+)$  плоскости  $\theta v$  управляющих параметров катастрофа сборки сохраняется.



Фиг. 2

3. Перейдем к исследованию многообразий особых точек в случае произвольных значений управляющего параметра  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Влияние множителя  $\cos \theta$  в уравнениях движения (1.1) на вид многообразия особых точек обуславливается изменением вида кривой (2.1) при различных значениях углов поворота передних колес экипажа. Последняя зависит от взаимного расположения кривых

$$Y_1 N_1^{-1} \cos \theta = f_1(\delta_1), \quad Y_2 N_2^{-1} = f_2(\delta_2) \quad (3.1)$$

на совмещенных координатных плоскостях. Рассмотрим все возможные случаи качественных изменений.

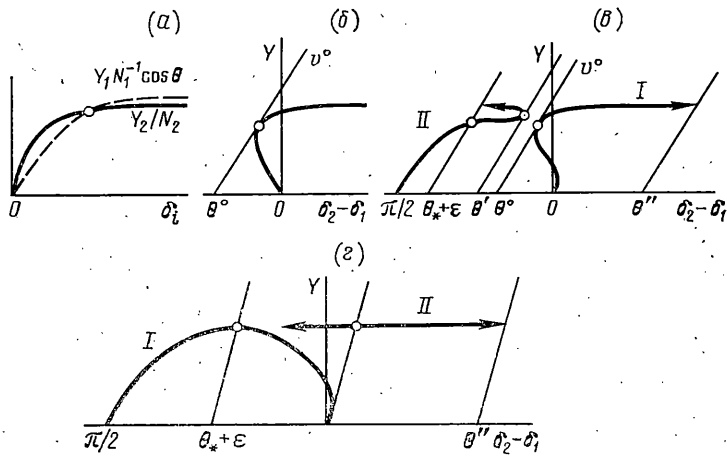
1°. Пусть функции  $Y_i(\delta_i)$  такие, что  $Y_1(\delta_1)N_1^{-1} > Y_2(\delta_2)N_2^{-1}$  при  $\delta_1 = \delta_2 > 0$ . Если не учитывать множитель  $\cos \theta$  в (3.1), то множество особых точек является при данном  $v$  и различных  $\theta$  кривой (2.1), состоящей из одной ветви (фиг. 1, а). Учет множителя  $\cos \theta$  приводит к новому качеству, порожденному тем, что  $\cos \theta$  при  $\theta \rightarrow \pi/2$  отклоняет первую кривую (3.1) к оси  $\delta_1$ . Поэтому при некотором значении  $\theta_0$  угла  $\theta$  появляется точка пересечения кривых (3.1), отличная от начала координат. Положение этой точки предопределяет вид зависимости (2.1) и, следовательно, вид многообразия особых точек. Интерес представляют два случая.

Рассмотрим случай, когда точка пересечения кривых (3.1) появляется при больших значениях углов увода ( $\delta_i \rightarrow \pi/2$ ), т. е.

$$a_1 N_1^{-1} \cos \theta_0 > a_2 N_2^{-1}, \quad c_1 \cos \theta_0 = c_2 \quad (3.2)$$

Рассмотрим характерный набор значений  $\{0, \theta_0 - \varepsilon, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}$  угла  $\theta$  и соответствующие им зависимости (2.1). Здесь  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число и  $0 < \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \pi/2$ . Величина скорости продольного движения экипажа также существенно влияет на вид многообразия особых точек. В данном случае можно выделить два интервала скорости, для которых многообразия имеют различную структуру.

Определим скорость  $v_*$  следующим образом. Из точки на оси абсцисс с координатой  $\theta_1$  проведем касательную к кривой (2.1) в точке  $A_2$  (фиг. 2, а). Угловым коэффициентом  $k_* = v_*^2 g^{-1} l^{-1}$  касательной задает некоторую величину  $v_*$  скорости  $v$ . Тогда для скоростей  $v_* < v < v_+ - \varepsilon$  множество особых точек имеет вид, указанный на фиг. 2, б, и состоит из двух ветвей. Точками этого множества являются точки пересечения кривой (2.1) с прямой заданного наклона, являющейся через точку оси абсцисс с координатой  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Точкам  $A_i$  на фиг. 2, б соответствуют особые точ-



Фиг. 3

ки, принадлежащие основной ветви I, исходящей из начала координат, точкам  $B_i$  — особые точки, принадлежащие второй ветви.

Основная ветвь имеет мнимую точку самопересечения  $A_5$ . Мнимость вытекает из того, что если  $\omega_5, u_5$  — координаты точки  $A_5$  (лежащей на нижней части петли), а  $\omega, u$  — координаты особой точки на верхней части петли, то при  $\theta \rightarrow -\theta_0 - 0$  получим  $\omega \rightarrow \omega_5, |u| \rightarrow +\infty$ , т. е.  $u$  не стремится к  $u_5$ . Вторая ветвь имеет с основной ветвью также мнимую точку пересечения  $A_3$ , поскольку при  $\theta \rightarrow \theta_0 + 0$  имеем  $\omega \rightarrow \omega_3, u$  не стремится к  $u_3$ . ( $|u| \rightarrow +\infty$ ). Здесь  $\omega, u$  — координаты особой точки на ветви II,  $\omega_3, u_3$  — координаты особой точки на основной ветви при  $\theta = \theta_0$ .

При движении по основной ветви параметр  $\theta$  увеличивается от нуля в начале координат до  $\theta_1$  в точке  $A_2$ , от точки  $A_2$  до точки  $A_7$  он убывает ( $\theta_1 \geq \theta \geq -\theta_2$ ) и от точки  $A_7$  до точки  $A_5$  он возрастает ( $-\theta_2 \leq \theta < -\theta_0$ ). При движении по второй ветви параметр  $\theta$  изменяется монотонно от точки к точке ( $\theta_0 \leq \theta < \pi/2$ ).

Заметим, что по мере увеличения продольной скорости движения (при некотором значении  $v_0 = v_+ - \epsilon$ ) угол  $\theta_1$  становится меньше величины  $\theta_0$  (так как значение  $\theta_0$  не зависит от скорости продольного движения). Следовательно, при скоростях  $v$ , достаточно близких к критической скорости  $v_+$ , между основной ветвью и ветвью II образуется разрыв (для значений угла  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0$ ).

Для достаточно малых скоростей  $v$  множество особых точек составляет две ветви, показанные на фиг. 2, в. Этот второй интервал скоростей продольного движения  $v < v_{**}$  определим аналогично первому. Скорость  $v_{**}$  находится по угловому коэффициенту  $k_{**}$  прямой, проходящей, например, через точку на оси абсцисс с координатой  $\theta_2$  и касательной к кривой (2.1) (построенной при  $\theta = \theta_2$ ) к точке  $A_7'$ . Ветвь II имеет две мнимые точки самопересечения при  $\theta \rightarrow \pm \theta_0$ .

Рассмотрим случай, когда точка пересечения кривых (3.1) появляется при малых значениях углов увода ( $\delta_i \rightarrow 0$ ), т. е.  $a_1 N_1^{-1} \cos \theta_0 = a_2 N_2^{-1} c_1 \cos \theta_0 > c_2$ . Пусть при некотором значении  $\theta^\circ$  угла  $\theta$  зависимость (2.1) имеет вид, указанный на фиг. 3, б. Если при этом возможно провести прямую из точки оси абсцисс с координатой  $\theta^\circ$ , касательную к кривой (2.1) (построенной для  $\theta = \theta^\circ$ ), то существует некоторая окрестность скорости продольного движения  $v > v^\circ$ , такая, что для скорости  $v$  из этой окрестности многообразие особых точек имеет вид, показанный на фиг. 3, в. При  $\theta \rightarrow \theta_* - 0$  (т. е.  $\theta_* - \theta = \epsilon > 0, \epsilon \rightarrow 0$ ) имеем  $\omega \rightarrow \omega_*, u \rightarrow u_*$  ( $|u_*| \rightarrow +\infty$ ), где  $\omega, u$  — координаты точек верхней части петли,  $\theta_*$  — точная верхняя граница множества значений  $\theta$ , при которых еще существует точка пересечения кривых (3.1). Если же для любого значения  $\theta \in [0, \theta_*]$  соответствующая прямая пересекает кривую (2.1), то многообразие особых точек имеет вид, указанный на фиг. 3, г.

В последующих двух случаях многообразие особых точек состоит только из одной ветви, вид которой меняется. Если  $k_1(0) > k_2(0)$ ,  $c_1 < c_2$ , то многообразие особых точек имеет вид ветви I на фиг. 3, з. Если  $k_1(0) < k_2(0)$ ,  $c_1 < c_2$ , то многообразие особых точек имеет вид ветви I на фиг. 3, з, однако вся ветвь расположена левее оси ординат.

4. Исследование устойчивости особых точек основывается на графическом анализе их индекса Пуанкаре. Проведем его применительно к случаю (3.2).

Пусть  $v < v_+$ . При  $\theta = 0$  существуют три особые точки (фиг. 2, б): начало координат — асимптотически устойчивая особая точка ( $j=1$ ), две другие симметрично расположенные особые точки — седловые. Устойчивость особой точки в начале координат следует из теории линейного приближения; индекс каждой из двух других точек  $j=-1$ , так как при увеличении скорости продольного движения до критической скорости  $v_+$  эти подвижные (зависящие от скорости) особые точки сливаются в начале координат и при  $v > v_+$  имеется лишь одна седловая особая точка в начале координат.

При  $\theta = \theta_0 - \varepsilon$  имеются по-прежнему три особые точки с теми же индексами, так как при изменении параметра  $\theta$  от 0 до  $\theta_0 - \varepsilon$  особые точки не сливаются. При  $\theta = \theta_0 + \varepsilon$  появляются две «новые» особые точки, одна из них при  $\theta = \theta_1$  имеет положение  $B_1$ . Индекс этих точек равен единице, так как при уменьшении скорости  $v$  они сливаются с седловыми точками и исчезают на конце «клюва» зависимости (2.1), построенной при  $\theta = \theta_1$ . Следовательно, вдоль ветви I (фиг. 2, б) особые точки от начала координат до положения  $A_2$  асимптотически устойчивые, от положения  $A_2$  до  $A_7$  — неустойчивые (седловые особые точки), от  $A_7$  до  $A_5$  на верхней части петли — асимптотически устойчивые. Особые точки вдоль ветви II асимптотически устойчивые.

Максимальное число особых точек равно пяти и реализуется, например, при  $\theta = \theta_1 - \varepsilon$ . В этом случае структура разбиения фазовой плоскости траекториями системы (1.1) представлена на фиг. 4, а, Сепаратрисы, входящие в седловые особые точки  $S_1$  и  $S_2$ , разделяют области притяжения асимптотически устойчивых особых точек. В данном случае эти области неограниченны [4], так как дивергенция векторного поля скоростей, задаваемого системой (1.1), во всей фазовой плоскости отрицательна.

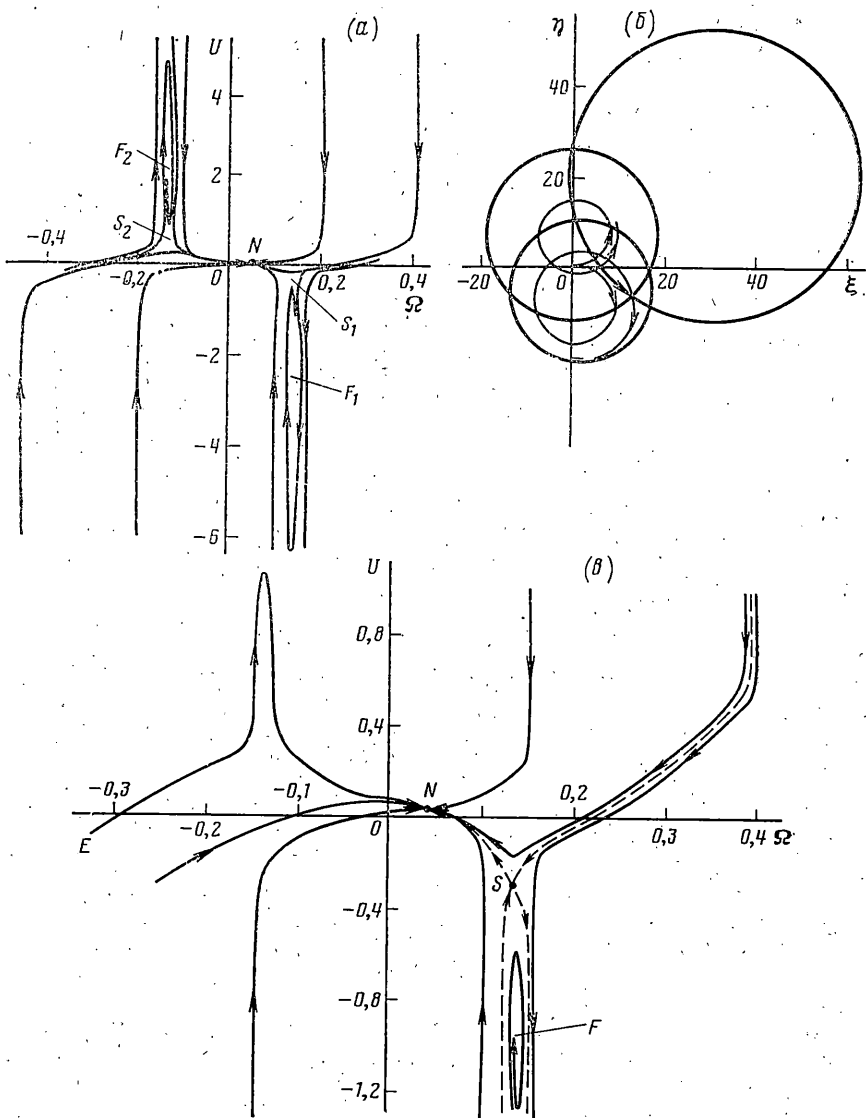
Фазовый портрет построен для следующих значений параметров экипажа:  $m = 2717$  кг,  $I = 4956$  кг·м<sup>2</sup>,  $l_1 = 1,14$  м,  $l_2 = 1,6$  м,  $a_1 = 305091$  Н/рад,  $a_2 = 103496$  Н/рад,  $c_1 = c_2 = 0,8$ ,  $v = 8$  м/с,  $\theta = 0,0643$  рад, причем  $\Omega = \omega l_1 / v$ ,  $U = u / v$ . Узлу  $N$  и фокусам  $F_1$ ,  $F_2$  отвечают окружности радиусов 32,22; 19,04 и 16,67 соответственно на плоскости переменных  $\xi = x/l_1$ ,  $\eta = y/l_1$  (фиг. 4, б), где

$$x^* = v \cos \vartheta - u \sin \vartheta, \quad y^* = v \sin \vartheta + u \cos \vartheta, \quad \dot{\vartheta} = \omega$$

Радиус  $r = (v^2 + u^2)^{1/2} \omega^{-1}$  окружности, описываемой центром масс  $D$  экипажа, однозначно определяется координатами устойчивой особой точки на плоскости  $\omega i$ . Длительность переходного процесса, а также координаты центра окружности (а вместе с ними и положение окружности на плоскости  $xy$ ) существенно зависят от начальных значений переменных  $\omega$ ,  $u$  (при одних и тех же начальных значениях переменных  $\vartheta$ ,  $x$ ,  $y$ ; на фиг. 4, б последние взяты нулевыми).

Структура фазового портрета, представленного на фиг. 4, а, сохраняется при изменении параметра  $\theta$  в интервале  $0 < \theta < 0,0762$ . Особые точки  $F_1$ ,  $F_2$  рождаются при  $\theta = \varepsilon$  на бесконечности ( $u \rightarrow \pm \infty$ ,  $\omega$  не стремится к  $\infty$ ). При увеличении параметра  $\theta$  до значения  $\theta_1 = 0,0762$  точка  $F_2$  (устойчивый фокус) превращается в устойчивый узел (при некотором значении  $\theta_1^* < \theta_1$ ) и при  $\theta = \theta_1$  сливается с седлом  $S_2$ . При  $0,0762 < \theta < 0,118$  имеются три особые точки. Структура разбиения фазовой плоскости траекториями в этом случае представлена на фиг. 4, в (фазовый портрет построен для  $\theta = 0,0854$ ). Отличие от фазового портрета на фиг. 4, а состоит в том, что на фиг. 4, в отсутствуют особые точки  $F_2$ ,  $S_2$  (они слились и исчезли). Носителями информации об этих топологических изменениях продолжают быть фазовые траектории. Этим объясняется всплеск фазовой кривой  $EN$ . При увеличении параметра  $\theta$  до значения  $\theta_2 = 0,118$  особая точка  $F$  (устойчивый фокус) превращается в устойчивый узел (при некотором значении  $\theta_2^* < \theta_2$ ) и при  $\theta = \theta_2$  сливается с седлом  $S$ . Поэтому при  $\theta > 0,118$  есть лишь одна устойчивая особая точка.

Бифуркации особых точек при значениях параметра  $\theta$ , равных  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , происходят при любых значениях продольной скорости  $v$  (при этом величины  $\theta_1(v)$ ,  $\theta_2(v)$  изменяются не существенно) и связаны с катастрофой складки в отличие от бифуркации прямолинейного движения, связанной с катастрофой сборки.



Фиг. 4

Пусть  $v > v_+$ . Особые точки на фиг. 2, б от  $O$  до  $A_7$  неустойчивые (седла), от  $A_7$  до  $A_5$  на верхней части петли асимптотически устойчивые. Особые точки на ветви II асимптотически устойчивые.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рокар И. Неустойчивость в механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
2. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1. М.: Мир, 1984. 350 с.
3. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Метод определения особых точек и их характера в задаче о плоском движении колесного экипажа // ПММ. 1981. Т. 45, вып. 5. С. 944–948.
4. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Области притяжения в задаче о плоском движении систем с качением // ПММ. 1984. Т. 48, вып. 3. С. 498–503.
5. Расейка Н. В. Tyre factors and vehicle handling. [Paper]. Delft University of Technology, 1978, No. 108. 31 p.

Киев

Поступила в редакцию  
15.X.1985