МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1988

УДК 534.1

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ

БАБИЦКИЙ В. И., КОВАЛЕВА А. С.

Широкое практическое использование виброударных систем требует все более полного учета их динамической специфики, связанной с влиянием привода, системы управления, несимметричности характеристик ограничительных упоров. В публикуемой работе для анализа указанной специфики используется метод периодических функций Грина [1, 2]. Развита процедура отыскания оптимальных законов управления приводом. Особое внимание уделяется исследованию резонансных колебаний. Приводится пример расчета системы, возбуждаемой электроприводом.

1. Уравнения периодического движения несимметричной виброударной системы. В промежутках между ударами уравнение движения системы с одной ударной парой может быть представлено в виде [2]:

$$D(p)x+f_1(t,\ x,\ px)=0 \tag{1.1}$$

где x — относительная координата элементов ударной пары (фиг. 1), $D(p)$ — оператор динамической жесткости системы в точке соударения, $p=d/dt$ — символ дифференцирования по времени; оператор $f_1(t,\ x,\ px)$ характеризует дополнительные нелинейные и неконсервативные силы; $f_1(t, x, px)=f_1(t+T, x, px)$.

Условия T-периодических соударений ударника об ограничители, расположенные несимметрично относительно его положения равновесия, имеют вид [2]:

$$t=\varphi_1+kT,\quad x=\Delta_1,\quad x_{1+}^{\boldsymbol\cdot}=-R_1x_{1-}^{\boldsymbol\cdot},\quad x_{1-}^{\boldsymbol\cdot}>0 \tag{1.2}$$
$$t=\varphi_2+kT,\quad x=-\Delta_2,\quad x_{2+}^{\boldsymbol\cdot}=-R_2x_{2-}^{\boldsymbol\cdot},\quad x_{2-}^{\boldsymbol\cdot}<0\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

где Δ_1 и Δ_2 — координаты ограничителей (фиг. 1), φ_1 и φ_2 — фазы соударений, T — период между соударениями, x_{j-} и x_{j+} — доударная и послеударная скорости при ударе о j-й ограничитель ($j=1,\ 2$), R_1 и R_2 — коэффициенты восстановления скорости при ударе о каждый из ограничителей.

Определим ударные импульсы J_1, J_2 соотношениями $J_j=m|x_{j-}-x_{j+}|>0$, т. е. в силу (1.2):

$$J_1=m(1+R_1)x_{1-}^{\boldsymbol\cdot},\quad J_2=-m(1+R_2)x_{2-}^{\boldsymbol\cdot} \tag{1.3}$$

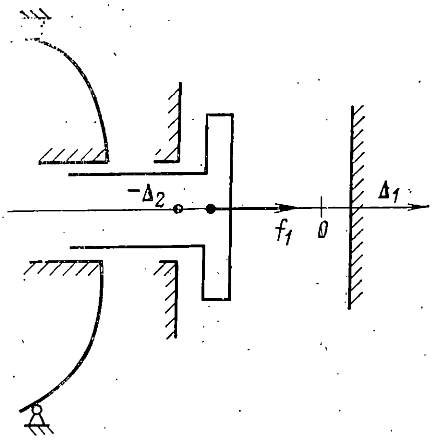
где m — приведенная масса ударного элемента. В дальнейшем положим $m=1$.

Следуя [2], внесем условия разрыва скорости в уравнения движения. С учетом свойств T-периодической δ-функции $\delta^T(t)$ [3] перепишем уравнение (1.1) в виде

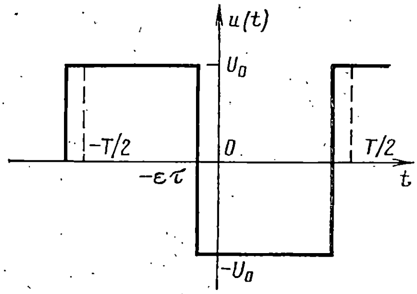
$$D(p)x+f_1(t,\ x,\ px)=-J_1\delta^T(t-\varphi_1)+J_2\delta^T(t-\varphi_2) \tag{1.4}$$

Периодическое решение уравнения (1.4) может быть записано в виде [2]:

$$x=-J_1\chi(t-\varphi_1)+J_2\chi(t-\varphi_2)-\int_0^T\chi(t-s)f_1(s,x(s),px(s))\,ds \tag{1.5}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\chi(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} D^{-1}(ki\omega)\,e^{ki\omega t} \tag{1.6}$$

где $\chi(t)$ — периодическая функция Грина первого рода, соответствующая линейной части системы (1.1). Для определения неизвестных постоянных J_1, J_2, φ_1, φ_2 служат условия (1.2), (1.3).

Решение уравнений (1.2), (1.3), (1.5) может быть найдено с помощью различных приближенных методов, аналогичных развитым для систем с односторонними или двусторонними ограничителями [2].

Наибольший интерес представляет случай квазирезонансных колебаний, когда диссипативные и возмущающие силы в системе и при ударе малы и колебания близки к одноударному периодическому режиму консервативной системы.

Пусть $R_j=1-\varepsilon r_j$ $(j=1,\ 2)$, $\operatorname{Im} D(ki\omega)=0$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots)$, $f_1(t,\ x)=-\varepsilon f(t,\ x,\ px)$ — оператор, характеризующий нелинейные и неконсервативные силы в системе, ε — малый параметр. Записав интегральное уравнение периодического режима

$$x(t)=-J_1\chi(t-\varphi_1)+J_2\chi(t-\varphi_2)+\varepsilon\int_0^T \chi(t-s)f(s,x(s),px(s))\,ds \tag{1.7}$$

будем искать его решение в виде последовательных приближений

$$x^\circ(t)=-J_1^\circ\chi(t-\varphi_1^\circ)+J_2^\circ\chi(t-\varphi_2^\circ) \tag{1.8}$$

$$x^k(t)=-J_1^k\chi(t-\varphi_1^k)+J_2^k\chi(t-\varphi_2^k)+$$

$$+\varepsilon\int_0^T \chi(t-s)f(s,x^{k-1}(s),px^{k-1}(s))\,ds \qquad (k\geqslant1) \tag{1.9}$$

подчиняя каждую итерацию (при $k\geqslant1$) условиям соударения (1.2), а нулевое приближение (1.8) — условию абсолютно упругого удара $\dot{x}_{j+}^\circ=-\dot{x}_{j-}^\circ$.

Для порождающего приближения имеем

$$x^\circ(\varphi_1)=-J_1^\circ\chi(0)+J_2^\circ\chi(\varphi_1^\circ-\varphi_2^\circ)=\Delta_1 \tag{1.10}$$

$$x^\circ(\varphi_2)=-J_1^\circ\chi(\varphi_2^\circ-\varphi_1^\circ)+J_2^\circ\chi(0)=\Delta_2$$

$$J_1^\circ=2\dot{x}_{1-}^\circ(\varphi_1^\circ)=-2[J_1^\circ\dot{\chi}_-(0)-J_2^\circ\dot{\chi}(\varphi_1^\circ-\varphi_2^\circ)] \tag{1.11}$$

$$J_2^\circ=-2\dot{x}_{2-}^\circ(\varphi_2^\circ)=2[J_1^\circ\dot{\chi}(\varphi_1^\circ-\varphi_2^\circ)-J_2^\circ\dot{\chi}_-(0)]$$

Учитывая, что для консервативной системы справедливы соотношения [3]:

$$D(ki\omega)=\operatorname{Re}D(ki\omega),\qquad \chi(t)=\frac{1}{T}+\frac{2}{T}\sum_{k=1}^{\infty}D^{-1}(ki\omega)\cos k\omega t$$

$$\chi_-^{\cdot}(0)=-{}^1/_2,\qquad \chi^{\cdot}(\pm T/2)=0$$

из (1.11) получим $\varphi_2{}^\circ-\varphi_1{}^\circ=T/2$. Тогда в силу (1.10) будем иметь

$$J_1{}^\circ=-{}^1/_2[(\Delta_2+\Delta_1)\chi_2{}^{-1}(0)-(\Delta_2-\Delta_1)\chi_3{}^{-1}(0)] \tag{1.12}$$

$$J_2{}^\circ=-{}^1/_2[(\Delta_2+\Delta_1)\chi_2{}^{-1}(0)-(\Delta_2-\Delta_1)\chi_3{}^{-1}(0)]$$

$$\chi_2(t)=\chi(t)-\chi\left(t+\frac{T}{2}\right)=\frac{2}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}D^{-1}[(2k+1)i\omega]\exp[(2k+1)i\omega t]$$

$$\chi_3(t)=\chi(t)+\chi\left(t+\frac{T}{2}\right)=\frac{2}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}D^{-1}(2ki\omega)\exp(2ki\omega t)$$

где $\chi_2(t)$ — периодическая функция Грина второго рода [3], а функцию $\chi_3(t)$ можно трактовать как периодическую функцию Грина первого рода, имеющую период $T/2$. Первое слагаемое в (1.12) соответствует ударному импульсу в консервативной системе с ограничителями, расположенными симметрично, при $x=\pm{}^1/_2(\Delta_1+\Delta_2)$; второе слагаемое характеризует изменение импульса, вызванное несимметрией системы.

Консервативное приближение (1.9) определяется с точностью до постоянной фазы $\varphi_1{}^\circ$. Для вычисления фазы удара и поправок к импульсу служат уравнения первого приближения. Внося (1.9) (при $k=1$) в (1.2), учитывая, что $\varphi_j{}^1=\varphi_j{}^\circ+O(\varepsilon)$, $J_j{}^1=J_j{}^\circ+O(\varepsilon)$ $(j=1,\ 2)$, $\varphi_2{}^1-\varphi_1{}^1=T/2+O(\varepsilon)$, и удерживая при преобразованиях только члены соответствующих порядков, получим

$$-J_1{}^1\chi(0)+J_2{}^1\chi(T/2)=\Delta_1-\varepsilon\theta^\circ(\varphi_1{}^\circ) \tag{1.13}$$

$$-J_1{}^1\chi(T/2)+J_2{}^1\chi(0)=-\Delta_2-\varepsilon\theta^\circ(\varphi_2{}^\circ)$$

$$[\chi_-^{\cdot}(0)+(1+R_1)^{-1}]J_1{}^\circ-\chi^{\cdot}(\varphi_1{}^1-\varphi_2{}^1)J_2{}^\circ=\varepsilon\theta^{\circ\cdot}(\varphi_1{}^\circ)$$

$$\chi^{\cdot}(\varphi_2{}^1-\varphi_1{}^1)J_1{}^\circ-[\chi_-^{\cdot}(0)+(1+R_2)^{-1}]J_2{}^\circ=\varepsilon\theta^{\circ\cdot}(\varphi_2{}^\circ)$$

$$\theta^\circ(t)=\int_0^T\chi(t-s)f(s,x^\circ(s),px^\circ(s))\,ds \tag{1.14}$$

Уравнения (1.14) преобразуются к виду

$$^1/_4[r_1(J_1{}^\circ)^2+r_2(J_2{}^\circ)^2]=J_1{}^\circ\theta^{\circ\cdot}(\varphi_1{}^\circ)-J_2{}^\circ\theta^{\circ\cdot}(\varphi_2{}^\circ) \tag{1.15}$$

$$\varepsilon/4[r_1(J_1{}^\circ)^2-r_2(J_2{}^\circ)^2]+2J_1{}^\circ J_2{}^\circ\chi^{\cdot}(\varphi_2{}^1-\varphi_1{}^1)= \tag{1.16}$$

$$=\varepsilon[J_1{}^\circ\theta^{\circ\cdot}(\varphi_1{}^\circ)+J_2{}^\circ\theta^{\circ\cdot}(\varphi_2{}^\circ)]$$

Таким образом, уравнение (1.15) служит для определения фаз удара $\varphi_1{}^\circ$, $\varphi_2{}^\circ=\varphi_1{}^\circ+T/2$, уравнение (1.13) — для вычисления первого приближения импульсов, уравнение (1.16) — для вычисления сдвига фаз в первом приближении.

Если рассматриваемая система автономна, $f=f(x,\ px)$, то можно положить $\varphi_1{}^\circ=0$. В этом случае уравнение (1.15) служит для определения периода движения T.

Сходимость изложенной схемы последовательных приближений доказывается стандартным приемом [3].

2. Оптимальное управление квазирезонансным периодическим движением. Пусть функция f в соотношениях (1.7), (1.9), (1.14) имеет вид

$$f(t,\ x,\ px)=M(p)u(t)+g(x,\ px) \tag{2.1}$$

где $u(t)$ — T-периодическое управление, $M(p)$ — передаточная функция управляющего звена. Найдем управление $u(t)$, $|u| \leqslant U_0$, реализующее оптимальной по быстродействию периодический квазирезонансный режим в системе с несимметричными ограничителями, и вычислим оптимальный период T.

Совмещая начало отсчета времени с моментом удара о правый ограничитель, запишем интегральное уравнение периодического режима в виде, аналогичном (1.7)

$$x = -J_1\chi(t) + J_2\chi(t-\varphi) + \varepsilon \int_0^T [\chi(t-s) g(x(s), px(s)) + \chi^u(t-s) u(s)] ds \tag{2.2}$$

$$\chi^u(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(ki\omega) [D(ki\omega)]^{-1} e^{ki\omega t} \tag{2.3}$$

где $\chi(t)$ — периодическая функция Грина (1.6), $\chi^u(t)$ — периодическая функция Грина управляемой системы.

Оптимальное управление $u(t)$ ищется методом последовательных приближений [4]: решение находится по рекуррентной схеме, аналогичной (1.8), (1.9)

$$x^\circ(t) = -J_1{}^\circ\chi(t) + J_2{}^\circ\chi(t-\varphi^\circ) \tag{2.4}$$

$$x^k(t) = -J_1{}^k\chi(t) + J_2{}^k\chi(t) + \varepsilon\theta^{k-1}(t) + \varepsilon G^{k-1}(t), \quad k \geqslant 1 \tag{2.5}$$

$$\theta^k(t) = \int_0^T \chi^u(t-s) u^k(s) ds, \qquad G^k(t) = \int_0^T \chi(t-s) g(x^k(s), px^k(s)) ds \tag{2.6}$$

а оптимальное управление $u^{k-1}(t)$ определяется на каждом шаге как минимизирующее период T (быстродействие) на траекториях системы (2.5) при дополнительных ограничениях (1.2) и условии $|u^{k-1}(t)| \leqslant U_0$.

Из (2.4) следует, что в первом приближении система неуправляема, импульсы J_1°, J_2° определены выражениями (1.12), сдвиг фаз $\varphi^\circ = T/2$. Уравнение первого приближения приводится к виду, аналогичному (1.15)

$$\begin{gathered} {}^1/_4[r_1(J_1{}^\circ)^2 + r_2(J_2{}^\circ)^2] - J_1{}^\circ G^{\circ\cdot}(0) + \\ + J_2{}^\circ G_2{}^{\circ\cdot}(T/2) = J_1{}^\circ\theta^{\circ\cdot}(0) - J_2{}^\circ\theta^{\circ\cdot}(T/2) \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\theta^{\circ\cdot}(t) = -\int_0^T \chi_s{}^u(t-s) u^\circ(s) ds, \qquad G^{\circ\cdot}(t) = -\int_0^T \chi_s(t-s) g(x^\circ(s), px^\circ(s)) ds \tag{2.8}$$

Левая часть уравнения (2.7) в силу (1.12), (2.6), (2.8) явно зависит только от неизвестного периода T и не зависит от x, u. Таким образом, задачу оптимального управления в первом приближении можно сформулировать следующим образом: найти управление $u^\circ(s)$, минимизирующее период T при изопериметрическом ограничении

$$\int_0^T \left[J_1{}^\circ\chi_s{}^u(T-s) - J_2{}^\circ\chi_s{}^u\left(\frac{T}{2} - s\right)\right] u^\circ(s) = -\gamma^\circ(T), \qquad |u^\circ(s)| \leqslant U_0 \tag{2.9}$$

где $\gamma^\circ(T)$ — выражение, соответствующее левой части уравнения (2.7).

Следуя [4], запишем расширенный функционал задачи оптимального быстродействия (λ — постоянный множитель Лагранжа)

$$S = \int_0^T \{1 + \lambda[J_1{}^\circ\chi_s{}^u(T-s) - J_2{}^\circ\chi_s{}^u(T/2-s)] u^\circ(s) + T^{-1}\gamma^\circ(T)]\} ds \tag{2.10}$$

Для определения оптимального управления $u^\circ(s)$, периода T и множителя λ служат равенство (2.9) и следующие условия минимума функционала (2.10) [5]:

$$u^\circ(s) = -U_0 \operatorname{sign} \lambda [J_1^\circ \chi_s^u (T-s) - J_2^\circ \chi_s^u (T/2-s)] \tag{2.11}$$

$$\partial S/\partial T = 0$$

Ограничимся важным для приложений случаем $\Delta_2=\Delta_1+\varepsilon\delta$. При этом из (1.12) следует $J_2^\circ = J_1^\circ = -\Delta_1\chi_2^{-1}(0)$. Тогда, пренебрегая в (2.11) величинами $O(\varepsilon)$, получим

$$u^\circ(s) = -U_0 \operatorname{sign} \lambda\chi_{2s}^u (T-s) \tag{2.12}$$

Аналогично упрощается величина $\gamma^\circ(T)$. Очевидно, что

$$u^\circ(s) = -U_0 \operatorname{sign} \chi_{2s}^u (T-s) \quad (\gamma^\circ(T)>0) \tag{2.13}$$

$$u^\circ(s) = U_0 \operatorname{sign} \chi_{2s}^u (T-s) \quad (\gamma^\circ(T)<0)$$

С учетом условия $-\chi_2(t)=\chi_2(t+T/2)$ запишем

$$u^\circ(s) = U_0 \operatorname{sign} \gamma^\circ(T) \operatorname{sign} \chi_{2s}^u (T/2-s) \tag{2.14}$$

Внося (2.13) или (2.14) в (2.9) и преобразуя с учетом свойств функции $\chi_2^u(t)$, получим уравнение для определения периода колебаний

$$2U_0 \int\limits_0^{T/2} |\chi_{2s}^u (T/2-s)|\, ds = |\gamma^\circ(T)| \tag{2.15}$$

Рассмотрим частный случай $M(p)=k=\mathrm{const}$. Тогда в порождающем приближении

$$x^\circ = -J^\circ\chi_2(t), \quad J^\circ = -\Delta_1\chi_2^{-1}(0) \tag{2.16}$$

Учитывая, что $\chi_2^u(s) = k\chi_2(s)$ и в консервативной системе $\chi_2(T-s) = \chi_2(s)$, преобразуем выражение (2.13) к виду

$$u^\circ(s) = -U_0 \operatorname{sign} \gamma^\circ(T) \operatorname{sign} \chi_{2s}(s).$$

Принимая во внимание (2.16), будем иметь $x^{\circ\bullet} = -J^\circ\chi_{2t}(t)$, т. е. при $J^\circ>0$:

$$u^\circ(s) = U_0 \operatorname{sign} \gamma^\circ(T) \operatorname{sign} x^{\circ\bullet}(s) \tag{2.17}$$

Иначе говоря, в первом приближении оптимальное управление зависит только от скорости.

Следуя [6, 7] можно показать, что при использовании в системе (2.1) программного управления $u=u^\circ(s)$, определенного формулой (2.13), или синтеза управления

$$u = u(s,\ x^\bullet) = U_0 \operatorname{sign} \gamma^\circ(T) \operatorname{sign} x^\bullet(s) \tag{2.18}$$

сформированного на основе (2.17), реализующееся периодическое решение, ударные импульсы и период движения будут отличаться от оптимальных на величины $O(\varepsilon)$.

3. Управление квазирезонансными колебаниями системы с электроприводом. Исследуем динамику одномассовой системы, возбуждаемой с помощью двигателя или электромагнита. Считая диссипативные силы и постоянную времени привода малыми, запишем уравнения движения в форме

$$x^{\bullet\bullet} + 2\varepsilon n x^\bullet + \Omega^2 x = ky, \quad y^\bullet + \varepsilon^{-1}\gamma y = \alpha u - \beta x^\bullet \tag{3.1}$$

Предположим, что ограничители расположены симметрично, но коэффициенты восстановления скорости при ударе различны. Тогда условия удара принимают вид

$$t=0, \quad x=\Delta_1, \quad x_+^\bullet = -(1-\varepsilon r_1)x_-^\bullet \tag{3.2}$$

$$t=\varphi, \quad x=-\Delta_1, \quad x_+^\bullet = -(1-\varepsilon r_2)x_-^\bullet$$

Здесь x — относительная координата ударного элемента, y — ток в приводе, u — управляющее напряжение, Ω, n — параметры системы, k, γ, α, β — параметры привода.

Исключив из уравнений движения переменную y, получим

$$(p^2+\Omega^2)x=\frac{\varepsilon k\alpha}{\gamma+\varepsilon p}u-\varepsilon\left(\frac{k\beta}{\gamma+\varepsilon p}+2n\right)px \tag{3.3}$$

$$D(p)=p^2+\Omega^2,\quad M(p)=k\alpha(\gamma+\varepsilon p)^{-1} \tag{3.4}$$

$$g(x, px)=-[k\beta(\gamma+\varepsilon p)^{-1}+2n]px$$

Периодические функции Грина $\chi_2(s)$, $\chi_{2s}{}^u(s)$, характеризующие систему, могут быть представлены в замкнутом виде [3]. При $0<t<T/2$ будем иметь

$$\chi_2(t)=\frac{1}{2\Omega}\sin\left[\Omega\left(t-\frac{T}{4}\right)\right]\cos^{-1}\frac{\Omega T}{4} \tag{3.5}$$

$$\chi_{2t}{}^u(T/2-t)=(k\alpha/\gamma)\{\exp[-\gamma(T/2-t)/\varepsilon]-$$
$$-{}^1/_2\cos[\Omega(T/4-t)][\cos(\Omega T/4)]^{-1}\}$$

Внося (3.4), (3.5) в (2.8), с принятой точностью получим

$$\gamma^\circ(T)=(J^\circ)^2(\mu_1(T)+\mu_2(T)),\quad \mu_j=r_j/4+\gamma(T) \tag{3.6}$$

$$\gamma(T)=\rho\int_0^{T/2}[\chi_{2s}(s)]^2\,ds=\frac{\rho T}{8}\cos^{-2}\frac{\Omega T}{4}\left(1+\frac{2}{\Omega T}\sin\frac{\Omega T}{2}\right),\quad \rho=\frac{k\beta}{2\gamma}+n \tag{3.7}$$

В силу (2.14), (3.5)—(3.7) оптимальное управление

$$u^\circ(s)=U_0\operatorname{sign}\chi_{2s}{}^u(T/2-s)= \tag{3.8}$$
$$=U_0\operatorname{sign}\{\exp[-\gamma(T/2-s)/\varepsilon]-{}^1/_2\cos[\Omega(T/4-s)][\cos(\Omega T/4)]^{-1}\}$$

Оценим влияние каждого слагаемого в фигурных скобках. При $s=+0$ первое слагаемое стремится к нулю и $u^\circ(s)=-U_0$; влияние первого слагаемого сказывается только при $s\approx T/2-0$, в частности, при $s=T/2-0$ имеем $u^\circ(s)=U_0$. С принятой точностью точка переключения определяется условием $s_*=T/2-\varepsilon\tau$, $\tau=\gamma^{-1}\ln 2$. График функции $u^\circ(s)$ представлен на фиг. 2; при $s>T/2$ функция $u^\circ(s)$ может быть аналитически продолжена в силу соотношений $u^\circ(t+T/2)=-u^\circ(t)$, $u^\circ(t+T)=u^\circ(t)$. Очевидно, что в порождающем приближении следует принять $u^\circ(s)=U_0$, $0<s<T/2$, $u^\circ(s)=-U_0$, $T/2<s<T$, пренебрегая поправками $O(\varepsilon)$.

Для определения периода колебаний служит уравнение (2.15). Внося (3.5)—(3.7) в (2.15), в результате очевидных преобразований получим

$$2U_0k\alpha(\Omega\gamma)^{-1}\operatorname{tg}(\Omega T/4)=(\mu_1+\mu_2)J^\circ \tag{3.9}$$

Если диссипация в системе и при ударе отсутствует, то уравнение (3.9) преобразуется к виду

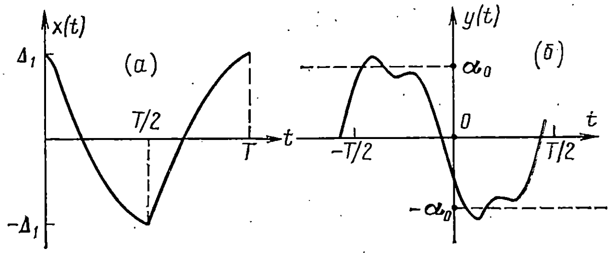
$$\frac{4\alpha U_0}{\beta T}\sin^2\frac{\Omega T}{4}\left(1+\frac{2}{\Omega T}\sin\frac{\Omega T}{2}\right)^{-1}=\Delta_1$$

и период колебаний перестает зависеть от коэффициента усиления k и постоянной времени привода γ. Вид функции $x(t)$ представлен на фиг. 3, *а*.

Построим зависимость $y(t)$. Из (3.1) следует, что периодическое решение $y(t)$ можно в первом приближении записать в виде

$$y(t)=\int_0^{T/2}\chi_2{}^y(t-s)[\alpha u^\circ(s)-\beta x^{\circ\bullet}(s)]\,ds \tag{3.10}$$

$$(0<t<T/2)\quad y(t+T/2)=-y(t)$$



Фиг. 3

где $\chi_2^y(t)$ — периодическая функция Грина второго рода, представимая в форме [3]:

$$\chi_2^y(t) = \exp(-\gamma t/\varepsilon)[1+\exp(-\gamma T/2\varepsilon)]^{-1} \quad (0<t<T/2)$$

Внося это выражение в (3.10), нетрудно убедиться, что вдали от точек переключения $t=0$, $t=T/2$ переменная $y(t)$ описывается соотношением $y(t)=\varepsilon\gamma^{-1}[\alpha u^\circ(t)-\beta x^{\circ\cdot}(t)]$. Влияние малого запаздывания приводит к сглаживанию графика функции $y(t)$ в окрестности точек переключения (фиг. 3, *б*). Пунктирная линия соответствует уровню $\alpha_0=\varepsilon\alpha U_0/\gamma$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабицкий В. И., Коловский М. З.* К исследованию резонансных режимов в виброударных системах // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 4. С. 88–91.
2. *Бабицкий В. И.* Теория виброударных систем. М.: Наука. 1978. 352 с.
3. *Розенвассер Е. Н.* Колебания нелинейных систем. М.: Наука. 1969. 576 с.
4. *Ковалева А. С.* Оптимизация периодических движений некоторых виброударных систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 6. С. 35–42.
5. *Фельдбаум А. А., Бутковский А. Г.* Методы теории автоматического управления. М.: Наука. 1971. 743 с.
6. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука. 1980. 383 с.
7. *Первозванский А. А., Гайцгори В. Г.* Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М.: Наука. 1979. 342 с.

Москва

Поступила в редакцию 24.X.1985