

УДК 531.4

МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ СУХИМ ТРЕНИЕМ

АНДРОНОВ В. В.

Рассматриваются механические системы, схематизируемые некоторой общей моделью в виде твердого тела на подвижном основании с трением, для которых основной функционирования служит эффект линеаризации (кажущегося превращения в вязкое) сухого трения. Изучено несколько характерных задач динамики, связанных с приложениями в машиностроении и вибротехнике. Исследована задача оптимального быстрого действия посредством управления силой трения.

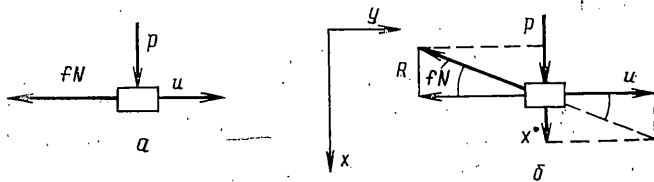
1. Пусть вдоль горизонтальной шероховатой плоскости (оси x на фиг. 1) необходимо переместить первоначально неподвижное тяжелое тело. В обычных условиях для этого потребовалось бы приложить к телу силу P , превосходящую трение покоя: $P > f_0 N = f_0 mg$. Однако в случае, если тело уже скользит с некоторой скоростью u поперек опорной плоскости (вдоль оси y), в первые мгновения сопротивления силе P отсутствует (вся сила трения направлена против скорости u) и тело продвигается в заданном направлении при сколь угодно малых значениях действующей силы (фиг. 1, а). Лишь в дальнейшем, с появлением скорости x , вектор силы трения повернется в своей плоскости (фиг. 1, б), создавая тем самым сопротивление и в направлении силы P , равное $(f - \text{коэффициент трения скольжения})$

$$R = -fmgx \cdot (x^2 + u^2)^{-1/2} \quad (1.1)$$

Фрикционное сопротивление вида (1.1), которое будем называть преобразованным сухим трением, радикально отличается от обычного сухого трения (трения в одномерном движении). Прежде всего здесь отсутствует трение покоя ($R|_{x=0} = 0$). Далее, сопротивление (1.1) оказывается линейным (линеаризуется) по отношению к малым воздействиям. Если $P \ll fmg$ и $u = \text{const} > 0$, то с течением времени устанавливается $|x| \ll u$, $R \approx -bx$ ($b = fmg/u$). Наконец, преобразованное трение (1.1) выбором u может целенаправленно изменяться (управляться), что предоставляет широкие возможности для синтеза движений с желаемыми свойствами.

Перечисленные свойства сухого трения при его преобразовании являются основой для создания разнообразных машин и технологических процессов [1-5]. Пакет круглых цилиндрических тел (например, лесоматериалов) при неподвижном основании в виде двух опорных балок может сохранять исходную многорядную структуру как угодно долго. Однако стоит сообщить опорам встречное движение, как пакет начинает разваливаться, а причиной неустойчивости служит преобразование трения между пакетом и опорами в направлении этих последних. Этот же эффект, замеченный в [6], лежит в основе перемещения частиц материала внутри слегка наклоненной вращающейся трубы, транспортировки деталей в некоторых типах конвейеров, ряда процессов механического резания и погружения.

К объектам с данным принципом действия, которые будем называть системами с преобразованным сухим трением, также относятся: вращающийся в опорах скольжения вал, который может перемещаться вдоль своей оси; груз на наклонной плоскости с трением, испытывающий поперечное (перпендикулярное линии наибольшего ската) воздействие в этой плоскости; физический маятник с наклонной осью вращения; многочисленные станки и устройства для шлифования, полирования, хонингования и так далее.



Фиг. 1

Одной из эталонных моделей рассматриваемых систем служит система (фиг. 2), состоящая из ползуна в идеальных направляющих, опирающегося на бесконечную шероховатую ленту, которая движется со скоростью u перпендикулярно к этим направляющим. Ее движение описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} = P - fNx^*(x^2 + u^2)^{-1/2} \quad (x^2 + u^2 \neq 0) \quad (1.2)$$

в котором в общем случае движущая сила P , сила трения $F = fN$ и управляющая скорость u являются некоторыми функциями t, x, x^* . В приложениях эти зависимости обычно имеют вполне определенный вид, поэтому могут быть выделены классы задач, допускающие получение конкретных результатов.

2. В ряде практически важных случаев силы P и F постоянны, а преобразующее движение равномерное. Тогда в уравнении (1.2) следует положить

$$P = \text{const} = P^0 > 0, \quad F = \text{const} = F^0 > 0, \quad u = \text{const} = u^0 \quad (2.1)$$

Характер динамических процессов в этой системе определяется интегрированием уравнения (1.2) с учетом (2.1) при общих начальных условиях

$$t = t_0: \quad x = x_0, \quad x^* = x_0^* \quad (2.2)$$

Сделаем замену переменной $x^* = u^0 \operatorname{tg} \varphi$, после чего уравнение (1.2) принимает вид

$$\varphi^* = F^0 (mu^0)^{-1} (\gamma - \sin \varphi) \cos^2 \varphi \quad (\gamma = P^0/F^0 = \text{const} > 0) \quad (2.3)$$

Новая переменная φ ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$) совпадает с отсчитываемым по часовой стрелке острым углом между направлением движения ленты и скоростью тела относительно ленты.

В зависимости от того, какое из условий $\gamma > 1$, $\gamma = 1$, $\gamma < 1$ выполняется, в системе совершаются качественно различные движения

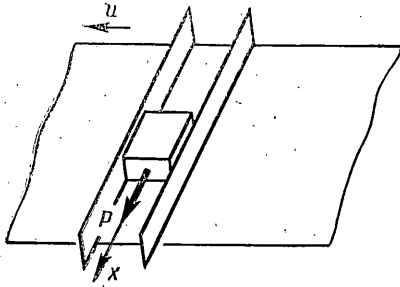
Пусть $\gamma > 1$. Тогда согласно (2.3) во всей области изменения φ справедливо $\varphi^* > 0$, поэтому угол φ с возрастанием времени монотонно увеличивается, приближаясь к значению $\varphi = \pi/2$ при $t \rightarrow \infty$. Скорость тела x^* также возрастает ($x^* \rightarrow \infty$), а ускорение стремится к постоянной величине $(P^0 - F^0)/m$ ускорения при неподвижной ленте ($u^0 = 0$).

Аналогичный вид имеет движение и в случае $\gamma = 1$, только предельное ускорение тела при $t \rightarrow \infty$ здесь равно нулю.

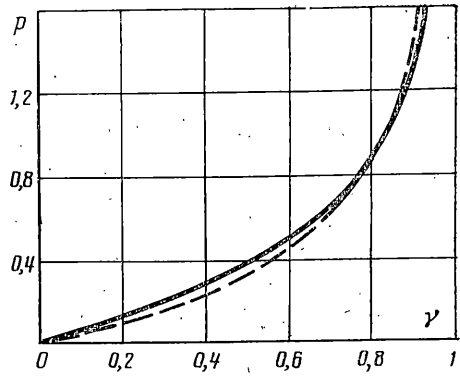
При $\gamma < 1$, если $\sin \varphi_0 < \gamma$, то в силу (2.3) на всем интервале изменения времени $t_0 \leq t < \infty$ имеем $\varphi^* > 0$. При этом угол φ возрастает стремясь при $t \rightarrow \infty$ к значению $\varphi_* = \arcsin \gamma$. Если $\sin \varphi_0 > \gamma$, то в течение всего движения $\varphi^* < 0$ и угол φ асимптотически убывает до значения φ_* . Следовательно, при любых начальных условиях движение тела при $\gamma < 1$ стремится к равномерному движению со скоростью

$$V = u^0 \gamma (1 - \gamma^2)^{-1/2} \quad (2.4)$$

Закон движения тела определяется во всех случаях интегрированием (2.3) при начальных условиях (2.2) и выражается формулами (в пара-



Фиг. 2



Фиг. 3

метрической форме):

$$t-t_0 = \frac{mu^{\circ}}{F^{\circ}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi (\gamma - \sin \varphi)} = \frac{mu^{\circ}}{F^{\circ}} [\Pi_1(\varphi) - \Pi_1(\varphi_0)]$$

$$x-x_0 = \frac{mu^{\circ 2}}{F^{\circ}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\operatorname{tg} \varphi d\varphi}{\cos^2 \varphi (\gamma - \sin \varphi)} = \frac{mu^{\circ 2}}{F^{\circ}} [\Pi_2(\varphi) - \Pi_2(\varphi_0)]$$

$$\Pi_1(\varphi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\gamma - \sin \varphi} + \frac{1}{1-\gamma^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \ln |\chi_1| - \frac{\gamma \cos \varphi}{\gamma - \sin \varphi} \right)$$

$$\chi_1 = [\gamma \operatorname{tg} \varphi / 2 - (1 + \sqrt{1-\gamma^2})] [\gamma \operatorname{tg} \varphi / 2 - (1 - \sqrt{1-\gamma^2})]^{-1}$$

$$\Pi_2(\varphi) = 1/2 (1-\gamma)^{-2} \{ [(1-\gamma^2) \operatorname{tg}^2 \varphi - \gamma^2] (\gamma - \sin \varphi)^{-1} - 2\gamma (1-\gamma^2)^{-1} \ln |\chi_2| - 1/2 (1-\gamma^2)^{-1} (1+\gamma^2) \ln |\chi_3| \}$$

$$\chi_2 = (\gamma - \sin \varphi) (\cos \varphi)^{-1}, \quad \chi_3 = (1 + \sin \varphi) (1 - \sin \varphi)^{-1} \quad (2.5)$$

Здесь принято $\gamma \neq 1$, однако аналогичные зависимости могут быть получены и в случае $\gamma = 1$.

Сравнение с соответствующими результатами для обычного ползуна ($u^{\circ} = 0$) показывает, что преобразование трения наиболее существенно отражается на поведении ползуна в случае $\gamma < 1$. Это обстоятельство типично для систем с преобразованным сухим трением — именно при таком соотношении между величинами движущей силы и силы трения они по настоящему содержательны, т. е. резко отличаются по своим свойствам от соответствующих систем без преобразования трения ($u^{\circ} = 0$). Этим выделяются наиболее интересные случаи для дальнейшего исследования.

Пусть величина силы трения в рассматриваемой системе неизвестна, но допустимо тем или иным способом определение скорости ползуна V , устанавливающейся при каком-либо значении движущей силы $P = P^{\circ}$. Тогда при помощи (2.4) легко подсчитать силу трения в системе

$$F^{\circ} = P^{\circ} [1 + (u^{\circ}/V)^2]^{1/2} \quad (2.6)$$

Это открывает новую возможность для экспериментального определения коэффициентов трения скольжения [7]. Основу экспериментальной установки составляют ползун и наклонные вращающиеся скалки, которые и образуют испытываемую фрикционную пару. Если сообщить скалкам равномерное вращение, то первоначально неподвижный ползун начнет двигаться по ним в направлении наклона. Измеряя каким-либо способом его установившуюся скорость V , можно согласно (2.6) определить величину силы трения или подсчитать коэффициент трения $f = \operatorname{tg} \alpha [1 + (u^{\circ}/V)^2]^{1/2}$, где α — угол наклона осей скалок к горизонту. В опытах вместо скорости V можно измерять зависящие от нее величины. Способ применим и в случае зависимости коэффициента трения от относительной скорости скольжения $v = (x^{\circ 2} + u^{\circ 2})^{1/2}$. Исследование устойчивости стационарных режимов, которых в этом случае может быть несколько, показывает, что устойчивые равномерные движения

ползуна могут существовать и на «падающих» участках характеристики трения $f = f(v)$, что для трибометров с иным принципом действия часто невозможно.

3. Широкий спектр приложений рассматриваемых систем связан со случаем, когда постоянная движущая сила $P = P^0 < F^0$ действует в условиях гармонического преобразующего движения ($u = a\omega \sin \omega t$). При этом установившееся движение является равномерным «в среднем» движением [1], т. е. для него справедливо (здесь треугольные скобки означают средние по периоду времени T):

$$\begin{aligned} x^*(t) &= x^*(t+T), & x(t) &= Vt + \psi(t) \\ \psi(t) &= \psi(t+T), & V &= \langle x^* \rangle \end{aligned} \quad (3.1)$$

а основной интерес представляет значение средней скорости движения V . Здесь дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} = P^0 - F^0 x^* (x^{*2} + a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t)^{-1/2} \quad (P^0 < F^0) \quad (3.2)$$

не интегрируется в квадратурах, однако в двух крайних случаях, соответствующих преобразующему воздействию либо очень высокой ($ma\omega^2 \gg \gg P^0$), либо, наоборот, очень низкой ($ma\omega^2 \ll P^0$) интенсивности может быть проинтегрировано асимптотически.

Введем безразмерные переменные

$$\tau = \omega t, \quad \theta = x^*/(a\omega), \quad \mu = P^0/(ma\omega^2), \quad \gamma = P^0/F^0 \quad (0 < \gamma < 1) \quad (3.3)$$

и запишем уравнение (3.2) в следующем безразмерном виде:

$$d\theta/d\tau = \mu [1 - \theta\gamma^{-1}(\theta^2 + \sin^2 \tau)^{-1/2}] \quad (3.4)$$

В указанных выше случаях справедливо либо $\mu \ll 1$, либо $\mu \gg 1$, поэтому (3.4) оказывается дифференциальным уравнением с малым либо, наоборот, с большим параметром в правой части. В случае $\mu \ll 1$ для получения приближенного решения допустимо прямое осреднение по времени, после которого вместо (3.4) получаем

$$\frac{dp}{d\tau} = \mu \left[1 - \frac{2pk}{\pi\gamma} K(k) \right], \quad p = \langle \theta \rangle = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \theta d\tau \quad (3.5)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k = (1+p^2)^{-1/2}$.

Искомая средняя скорость установившегося движения ползуна (безразмерная) совпадает со стационарным ($dp/d\tau = 0$) значением переменной p и находится из уравнения

$$(2/\pi)p(1+p^2)^{-1/2}K((1+p^2)^{-1/2}) = \gamma \quad (3.6)$$

Анализ зависимости (3.6) показывает, что при изменении p от 0 до ∞ γ монотонно изменяется от 0 до 1. Поэтому при $0 < \gamma < 1$ для (3.6) существует обратная функция $p = p(\gamma)$, которая и определяет среднюю скорость (безразмерную) установившегося движения в первом приближении метода осреднения. График этой функции показан на фиг. 3 (штриховая кривая).

При $\mu \gg 1$ (3.4) эквивалентно уравнению

$$\mu^{-1}d\theta/d\tau = 1 - \theta\gamma^{-1}(\theta^2 + \sin^2 \tau)^{-1/2} \quad (3.7)$$

с малым параметром при производной. Для его приближенного решения с погрешностью порядка μ^{-1} достаточно решить более простое вырожденное уравнение

$$1 - \theta\gamma^{-1}(\theta^2 + \sin^2 \tau)^{-1/2} = 0 \quad (3.8)$$

получаемое из (3.7) при $\mu^{-1} = 0$. Это приводит к зависимости

$$\theta = \gamma(1 - \gamma^2)^{-1/2} |\sin \tau| \quad (3.9)$$

которая и будет описывать приближенно основную в данной задаче «медленную» составляющую движения ползуна [8].

Осреднение обеих частей (3.9) за период приводит к формуле

$$p = 2\gamma[\pi(1-\gamma^2)^{1/2}]^{-1} \quad (3.10)$$

определяющей с погрешностью порядка μ^{-1} среднюю скорость движения. График этой зависимости показан на фиг. 3 (сплошная кривая).

Отметим, что размерная средняя скорость V связана с безразмерной средней скоростью p соотношением $V = a\omega p$.

Полученные результаты позволяют построить количественную теорию так называемого резания со скольжением, используемого в ряде конструкций сельскохозяйственных машин и других случаях. В них с целью повышения эффективности процесса режущему лезвию наряду с основным движением перпендикулярно к режущей кромке сообщается еще движение вдоль этой кромки — одностороннее направленное либо колебательное. Качественная теория резания при таком сложном движении лезвия была предложена в [3]. Преобразование трения в рассматриваемом смысле и объясняет наблюдаемое на практике резкое облегчение резания при наличии добавочного движения. Эта идея позволяет рассматривать формулы (2.6), (3.6), (3.10) как выражения для определения движущей силы P^0 (силы резания) в установившихся процессах резания со скольжением равномерным — (2.6) либо колебательным — (3.6), (3.10).

4. Ряд приложений связан с использованием преобразованного сухого трения как демпфирующего фактора при колебаниях. В задаче о собственных колебаниях ($u = \text{const} = u^0$, $fN = F = \text{const} = F^0$, $P = -cx$) основное уравнение (1.2) принимает вид

$$mx'' + F^0 x' (x^2 + u^0)^{-1/2} + cx = 0 \quad (4.1)$$

Введем безразмерные переменные

$$\tau = \Omega t \quad (\Omega = (c/m)^{1/2}), \quad \xi = x/L \quad (4.2)$$

где L — некоторый характерный линейный размер, и запишем (4.1) в нормальной форме Коши ($\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = d\xi/d\tau$):

$$\begin{aligned} d\xi_1/d\tau &= \xi_2, & d\xi_2/d\tau &= -\xi_1 - \mu \xi_2 (\xi_2^2 + U^2)^{-1/2} \\ (\mu &= F^0/(m\Omega^2 L), & U &= u^0/(\Omega L)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Пологая μ малым, воспользуемся для решения системы (4.3) методом осреднения [9]. Для этого осуществим в (4.3) замену переменных

$$\xi_1 = \alpha \sin \varphi, \quad \xi_2 = \alpha \cos \varphi \quad (4.4)$$

приводящую эти уравнения к следующей системе в стандартной форме метода осреднения (μ — малый параметр):

$$\begin{aligned} d\alpha/d\tau &= -\mu \cos^2 \varphi [\cos^2 \varphi + (U/\alpha)^2]^{-1/2} \\ d\varphi/d\tau &= 1 + \mu \alpha^{-1} \sin \varphi \cos \varphi [\cos^2 \varphi + (U/\alpha)^2]^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнения (4.5) эквивалентны исходному уравнению (4.1). Осредняя (4.5) по быстрой переменной φ , приходим к приближенным уравнениям

$$d\alpha/d\tau = -(2/\pi)\mu k B(k), \quad d\varphi/d\tau = 1 \quad (4.6)$$

Здесь $B(k)$ — табулированная функция [10] полных эллиптических интегралов первого и второго рода с модулем k :

$$B(k) = [E(k) - (1-k^2)K(k)]k^{-2}, \quad k = [1 + (U/\alpha)^2]^{-1/2} \quad (4.7)$$

Система (4.6) может быть проинтегрирована в квадратурах. Для этого удобно, используя (4.7), перейти в (4.6) полностью к переменной k и записать ее в следующем окончательном виде:

$$dk/d\tau = -2\mu(\pi U)^{-1} k(1-k^2)^{3/2} B(k), \quad d\varphi/d\tau = 1 \quad (4.8)$$

k	$G(k)$	k	$G(k)$	k	$G(k)$
0,01	-4,3939	0,3	-0,8268	0,9	2,2917
0,02	-3,9758	0,4	-0,3884	0,92	2,6095
0,03	-3,6380	0,5	0	0,94	3,0267
0,05	-3,1181	0,6	0,3828	0,96	3,6102
0,1	-2,2915	0,7	0,8054	0,98	4,5019
0,2	-1,3903	0,8	1,3510	0,99	5,1568

Интегрируя (4.8) при начальных условиях: $k=k_0$, $\varphi=\varphi_0$ при $\tau=\tau_0$, получаем

$$\varphi=\varphi_0+\tau-\tau_0, \quad G(k)=G(k_0)-2\mu(\pi U)^{-1}(\tau-\tau_0) \quad (4.9)$$

Здесь введена функция

$$G(k)=\int_{1/2}^k \frac{ds}{s(1-s^2)^{3/2}B(s)} \quad (4.10)$$

которая зависит только от безразмерной переменной k ($0 < k < 1$) и поэтому легко табулируется (таблица). При $k \rightarrow 0$ $G(k) \rightarrow -\infty$ как $(4/\pi) \ln k$, при $k \rightarrow 1$ $G(k) \rightarrow \infty$ как $(1-k^2)^{-1/2}$.

Полученные формулы вместе с таблицей функции $G(k)$ полностью решают поставленную задачу о свободных колебаниях системы с одной степенью свободы, демпфированной преобразованным сухим трением, в первом приближении метода осреднения.

Последовательность действий для определения состояния системы в произвольный момент t сводится к следующему. Прежде всего по заданным начальным условиям: $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$ при $t=t_0$ находим соответствующие начальные значения безразмерных переменных $\tau_0=\Omega t_0$, $\xi_{10}=x_0 L^{-1}$, $\xi_{20}=\dot{x}_0 (\Omega L)^{-1}$ и, используя (4.4), (4.7), — начальные значения вспомогательных переменных α_0 , φ_0 , k_0 . Далее при помощи графика функции $G(k)$ определяется начальное значение этой функции $G(k_0)$, а по формулам (4.9) — величины φ и $G(k)$ в соответствующий момент безразмерного времени $\tau=\Omega t$. Теперь остается по значению $G(k)$ и графику этой функции определить величину $k(\tau)$; найти по вытекающей из (4.7) зависимости

$$\alpha=Uk(1-k^2)^{-1/2} \quad (4.11)$$

значение $\alpha(\tau)$, вычислить согласно (4.4) значения ξ_1 , ξ_2 и перейти к исходным переменным $x=\xi_1 L$, $\dot{x}=\xi_2 \Omega L$.

Собственные колебания, естественно, оказываются затухающими: при $\tau \rightarrow \infty$ имеем $G(k) \rightarrow -\infty$, $k \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$. Закон убывания амплитуды $\alpha(\tau)$ определяется формулой (4.11) и зависимостью $k(\tau)$ согласно второй формуле (4.9) и графику функции $G(k)$. При $k \simeq 1$ ($k'=(1-k^2)^{1/2} \ll 1$) и $k \ll 1$, когда применение описанной выше графоаналитической процедуры определения $\alpha(\tau)$ затрудняется, можно пользоваться следующими вытекающими из (4.9) — (4.11) приближенными формулами

$$\alpha=\alpha_0-(2\mu/\pi)(\tau-\tau_0) \quad (k' \ll 1) \quad (4.12)$$

$$\alpha=\alpha_0 \exp[-\mu(2U)^{-1}(\tau-\tau_0)] \quad (k \ll 1)$$

Соотношения (4.12) показывают, что в этих предельных случаях система с преобразованным сухим трением близка либо системе с обычным сухим трением ($k' \ll 1$), либо системе с вязким трением ($k \ll 1$).

Задача о вынужденных колебаниях ($P=-cx+H \sin \omega t$) в безразмерных величинах (4.2), (4.3) приводит к следующей системе уравнений в нормальной форме:

$$\begin{aligned} d\xi_1/d\tau &= \xi_2, & d\xi_2/d\tau &= -\xi_1 - \mu \xi_2 (\xi_2^2 + U^2)^{-1/2} + h \sin \lambda \tau \\ (h &= H/(m\Omega^2 L), \quad \lambda = \omega/\Omega) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Полагая μ и h малыми и используя замену (4.4), приведем ее к виду

$$\begin{aligned} d\alpha/d\tau &= -\mu \cos^2 \varphi [\cos^2 \varphi + (U/\alpha)^2]^{-1/2} + h \sin \varphi \cos \varphi \\ d\varphi/d\tau &= 1 + (\mu/\alpha) \sin \varphi \cos \varphi [\cos^2 \varphi + (U/\alpha)^2]^{-1/2} - \\ &\quad - (h/\alpha) \sin \varphi \sin \varphi, \quad d\psi/d\tau = \lambda \end{aligned} \quad (4.14)$$

Уравнения (4.14) имеют стандартную форму системы с одной медленной переменной α и двумя быстрыми фазами φ и ψ .

Изучим вынужденные колебания в окрестности резонанса ($\lambda=1$). В соответствии с процедурой изучения резонанса методом осреднения вводим медленную фазу $\theta = \psi - \varphi$ и записываем (4.14) в виде

$$\begin{aligned} d\alpha/d\tau &= -\mu \cos^2 \varphi [\cos^2 \varphi + (U/\alpha)^2]^{-1/2} + h \sin(\theta + \varphi) \cos \varphi \\ d\varphi/d\tau &= 1 + \chi(\alpha, \varphi, \theta), \quad d\theta/d\tau = \lambda - 1 - \chi(\alpha, \varphi, \theta) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\chi(\alpha, \varphi, \theta) = (\mu/\alpha) \sin \varphi \cos \varphi [\cos^2 \varphi + (U/\alpha)^2]^{-1/2} - (h/\alpha) \sin(\theta + \varphi) \sin \varphi$$

Поскольку при резонансе величину $\Delta = \lambda - 1$ («расстройку») можно считать порядка μ и h , то видно, что эта система содержит лишь одну быструю переменную φ . Осредняя по этой переменной, получим

$$\begin{aligned} d\alpha/d\tau &= -(2/\pi) \mu k B(k) + 1/2 h \sin \theta \\ d\varphi/d\tau &= 1 - 1/2 (h/\alpha) \cos \theta, \quad d\theta/d\tau = \Delta + 1/2 (h/\alpha) \cos \theta \end{aligned} \quad (4.16)$$

Решение уравнений стационарного режима ($\alpha' = 0, \theta' = 0$) в соответствии с (4.16) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta &= \pm 1/2 h (Uk)^{-1} (1 - k^2)^{1/2} \{1 - [4\mu (\pi h)^{-1} k B(k)]\}^{1/2} \\ \sin \theta &= 4\mu (\pi h)^{-1} k B(k), \quad \cos \theta = -2\Delta U k h^{-1} (1 - k^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Знак плюс соответствует $\lambda > 1$, знак минус — $\lambda < 1$. Видно, что условие существования режима $k < 1$ выполняется при любых значениях параметров, если $\Delta \neq 0$. Если $\Delta = 0$, что соответствует точному резонансу, то лишь при $\pi h / (4\mu) < 1$; при $\pi h / (4\mu) \geq 1$ колебания оказываются неограниченными.

Характеристическое уравнение для исследования устойчивости стационарного режима имеет вид

$$\begin{aligned} \rho^2 + 2\mu \pi^{-1} (1 - k^2)^{1/2} \{B(k) + k^{-1} (1 - k^2) [K(k) - E(k)]\} \rho + \\ + 4\mu^2 \pi^{-2} k^2 (1 - k^2)^2 B(k) [K(k) - E(k)] + 1/4 h^2 k^2 (1 - k^2) \{1 - \\ - [4\mu (\pi h)^{-1} k B(k)]^2\} = 0 \end{aligned}$$

Его коэффициенты при $k < 1$ положительны, поэтому, если стационарный режим существует, то он устойчив.

Формулы (4.7), (4.17) определяют амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики рассматриваемой системы (в первом приближении метода осреднения).

5. Выше было отмечено, что преобразование трения доставляет простой способ для управления движением. Рассмотрим уравнение (1.2) при $P = \text{const} = P^0, fN = \text{const} = F^0, P^0 < F^0$

$$m\ddot{x} = P^0 - F^0 x^*(x^{*2} + u^2)^{-1/2} \quad (5.1)$$

Изучим для этой системы задачу оптимального в смысле быстродействия перехода в начало координат, приняв за параметр управления скорость ленты u (фиг. 2), которую будем полагать подчиненной ограничениям

$$|u| \leq u_* \quad (5.2)$$

Задача имеет непосредственный практический интерес, например, в связи с оптимизацией конвейеров.

Следуя методике принципа максимума [11], перейдем к фазовым координатам $x_1=x$, $x_2=\dot{x}$ и представим (5.1) в нормальной форме Коши

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = m^{-1}[P^0 - F^0 x_2 (x_2^2 + u^2)^{-1/2}] \quad (5.3)$$

Функция Гамильтона H и уравнения для вспомогательных переменных ψ_i ($i=1, 2$) запишутся в виде

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 m^{-1}[P^0 - F^0 x_2 (x_2^2 + u^2)^{-1/2}] \quad (5.4)$$

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 m^{-1} F^0 u^2 (x_2^2 + u^2)^{-3/2} \quad (5.5)$$

Согласно принципу максимума, оптимальное по быстродействию управление удовлетворяет уравнениям (5.3), (5.5), ограничениям (5.2) и максимизирует функцию Гамильтона (5.4).

Из (5.4) следует, что максимум H по u достигается при $u = \pm u_*$, если $x_2 \psi_2 > 0$, и при $u = 0$, если $x_2 \psi_2 < 0$. Следовательно, оптимальное управление задается формулой

$$u = \pm u_* \quad (x_2 \psi_2 > 0), \quad u = 0 \quad (x_2 \psi_2 < 0) \quad (5.6)$$

Если $x_2 \psi_2 = 0$, то либо $x_2 = 0$, либо $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ и рассматриваемая оптимальная задача не существует.

Пусть на заключительном этапе движения справедливо $x_2 \psi_2 < 0$. Тогда $u = 0$ и основная система (5.3) принимает вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = (P^0 - F^0 \operatorname{sign} x_2) m^{-1} \quad (5.7)$$

Интегрируя при начальных значениях t_0 , x_{10} , x_{20} , находим, что изображающая точка $M(x_1, x_2)$ движется по фазовой плоскости согласно уравнениям

$$x_1 = x_{10} + x_{20}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_{\pm} (t - t_0)^2, \quad x_2 = x_{20} + a_{\pm} (t - t_0) \\ (a_{\pm} = (P^0 \pm F^0) m^{-1}) \quad (5.8)$$

Верхние знаки относятся к $x_2 < 0$, нижние — к $x_2 > 0$.

Фазовыми траекториями служат ветви парабол (фиг. 4, а)

$$x_1 = x_{10} + (2a_-)^{-1} (x_2^2 - x_{20}^2) \quad (x_2 > 0) \\ x_1 = x_{10} + (2a_+)^{-1} (x_2^2 - x_{20}^2) \quad (x_2 < 0) \quad (5.9)$$

Жирными линиями выделены траектории OG_1 и OG_2 , проходящие через начало координат. Только движением вдоль этих траекторий можно попасть в начало координат при условии $x_2 \psi_2 < 0$ ($u = 0$).

Если оптимальное движение заканчивается при условии $x_2 \psi_2 > 0$, то $u = u_*$ и основная система имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = m^{-1}[P^0 - F^0 x_2 (x_2^2 + u_*^2)^{-1/2}] \quad (5.10)$$

Для фазовых траекторий имеем уравнения

$$x_1 = x_{10} + m u_*^2 [\Pi_2(\varphi) - \Pi_2(\varphi_0)] / F^0 \\ \varphi = \operatorname{arctg}(x_2 / u_*), \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}(x_{20} / u_*) \quad (5.11)$$

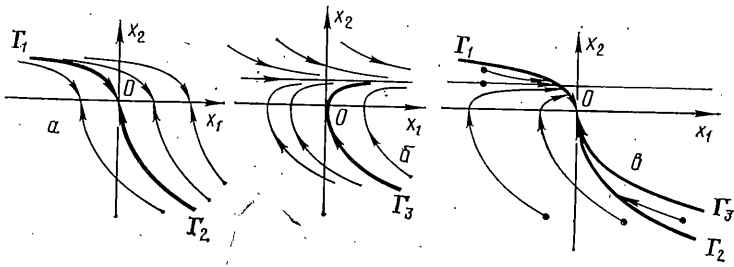
где функция $\Pi_2(\varphi)$ определена согласно (2.5).

Характер траекторий показан на фиг. 4, б.

Полутраектория, ведущая в начало координат, обозначена OG_3 . Только движением вдоль этой линии может закончиться оптимальное перемещение в начало координат при условии $x_2 \psi_2 > 0$ ($u = u_*$).

Из характера фазовых траекторий видно, что рассматриваемая оптимальная задача может существовать лишь для точек фазовой плоскости, расположенных ниже и на линии $G_1 OG_3$. Из остальных точек фазовой плоскости управлением (5.2) начало координат не достигается.

Заметим, что правая часть системы (5.7) в точке $x_2 = 0$ разрывна. Поэтому для точек ниже отрицательной полуоси x_1 и линии G_2 , из которых переход в начало координат связан с пересечением оси x_1 , рассматриваемая задача может распасться на две отдельные задачи: 1) оптимальное достижение оси x_1 и 2) оптимальный переход из соответствующей точки оси x_1 в начало координат. В каждой из них надлежащие условия гладкости выполнены и применение принципа максимума обоснованно.



Фиг. 4

Проинтегрируем систему (5.5) для вспомогательных переменных

$$\psi_1 = \text{const} = \psi_{10}, \quad \psi_2 = \left[\psi_{20} - \psi_{10} \int_{t_0}^t \exp\left(\int_{t_0}^t q(t) dt\right) dt \right] \exp\left(-\int_{t_0}^t q(t) dt\right)$$

$$q(t) = -m^{-1} F^0 u^2(t) [x_2^2(t) + u^2(t)]^{-1/2}$$

Здесь учтено, что вдоль любой траектории величины u и x_2 являются некоторыми функциями времени.

При любых начальных значениях ψ_{10} , ψ_{20} функция ψ_2 изменяет свой знак не более одного раза. Учитывая также (5.6), находим, что на каждом участке непрерывности системы оптимальные траектории содержат не более одного переключения управляющего параметра (от значений $\pm u_*$ к нулю и наоборот). Поэтому оптимальные траектории в начале координат имеют вид, показанный на фиг. 4, *а*.

Если начальная точка $M_0(x_{10}, x_{20})$ расположена на линии OG_1 , то наискорейшее попадание изображающей точки в начало координат осуществляется движением вдоль этой линии без переключения. Если M_0 лежит между линией OG_1 и полуосью $x_1 < 0$, включая и точки полуоси, то оптимальное движение начинается управлением $u = \pm u_*$ и заканчивается при $u = 0$ с переключением на линии OG_1 .

Для точек ниже отрицательной полуоси x_1 и линии OG_2 рассматриваемый переход складывается из двух этапов оптимального движения — вначале быстрое достижение полуоси $x_1 < 0$ при $u = 0$ (без переключения), затем переход с этой полуоси в начало координат описанным выше способом. Если начальная точка принадлежит кривой OG_2 , то процесс осуществляется движением вдоль этой кривой, т. е. управлением $u = 0$ без переключения.

Точкам области, расположенной между линиями OG_2 и OG_3 , принципом максимума допускаются по две траектории, ведущие в начало координат: либо движение при $u = \pm u_*$ по кривой семейства (5.11) с последующим переключением на $u = 0$ по достижении линии OG_2 , либо, наоборот, вначале движение при $u = 0$ по кривой семейства (5.8) с последующим переключением к одному из значений $u = \pm u_*$ на линии OG_3 и дальнейшим перемещением вдоль этой линии. Однако минимум времени имеет место на траекториях первого типа, которые и будут оптимальными.

Сказанное вытекает из следующих качественных рассуждений. Интенсивность торможения (из области G_2OG_3 можно перейти в начало координат только посредством торможения) при $u = u_*$ с уменьшением модуля скорости x_2 падает, в то время как при $u = 0$ она не зависит от скорости. Поэтому торможение до полной остановки в начале координат для последовательности управлений $\pm u_*$, 0 происходит быстрее, чем для последовательности 0, $\pm u_*$, что и доказывает утверждение.

Наконец, если начальная точка принадлежит линии OG_3 , то оптимальное движение осуществляется вдоль самой этой линии.

Иногда вспомогательное преобразующее движение не может быть заранее задано в виде зависимости $u = u(t)$, но может быть задан закон изменения преобразующей силы. Этот случай управления фрикционным сопротивлением можно трактовать как динамическое (силовое) преобразование сухого трения, в отличие от кинематического преобразования (при задании $u(t)$). Многие реальные устройства, основанные на идее косвенного преодоления сухого трения, принадлежат к системам именно этого класса. Среди них наиболее распространены системы с так называемым вибрационным преобразованием сухого трения, в которых преобразующая сила имеет вибрационный характер. Ряд результатов по динамике таких систем содержится в [1, 5, 12–14].

Автор глубоко признателен В. Ф. Журавлёву за полезные обсуждения статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение. М.: Наука. 1964. 440 с.
2. Бобров В. П. Проектирование загрузочно-транспортных устройств к станкам и автоматическим линиям. М.: Машиностроение. 1964. 291 с.
3. Горячкин В. П. Собрание сочинений. Т. 1. М.: Колос. 1968. 720 с.

4. Резник Н. Е. Теория резания лезвием и основы расчета режущих аппаратов. М.: Машиностроение. 1975. 311 с.
5. Кудинов В. А. Динамика станков. М.: Машиностроение. 1967. 359 с.
6. Жуковский Н. Е. Трение бандажей железнодорожных колес о рельсы. Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат. 1950. Т. 7. С. 426-478.
7. Андронов В. В. Об одном методе определения силы и коэффициента трения скольжения // Машиноведение. 1970. № 4. С. 104-107.
8. Янке Е., Эмде Ф., Лёви Ф. Специальные функции. М.: Наука. 1968. 344 с.
9. Васильева А. Б., Бугузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М.: Наука. 1973. 272 с.
10. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука. 1985. 125 с.
11. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1983. 392 с.
12. Андронов В. В. Движение тела по шероховатой наклонной плоскости, совершающей поступательные поперечные колебания в своей плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 3. С. 7-14.
13. Андронов В. В. Вибрационное перемещение по плоскости, колеблющейся под углом к линии наибольшего ската // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 51-55.
14. Андронов В. В. Вибрационное перемещение по импульсно-возмущенной наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 5. С. 54-64.

Калининград

Поступила в редакцию
24.V.1985