МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1988

УДК 534.1

УСЛОВИЯ АНИЗОХРОННОСТИ АВТОНОМНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

ЗЕВИН А. А.

Рассмотрены однопараметрические семейства периодических решений в автономных гамильтоновых системах. Найдены условия, при которых соответствующие периоды колебаний монотонно возрастают либо убывают при возрастании параметра (т. е. система является мягко либо жестко анизохронной). Полученные результаты иллюстрируются на примерах.

Локальные критерии существования семейств периодических колебаний в окрестности положения равновесия устанавливаются классической теоремой Ляпунова [1] (современное состояние локальной теории отражено в [2, 3]). Условия продолжимости таких семейств по параметру до границы заданной области найдены в [4]. Критерии анизохронности для скалярного уравнения второго порядка получены в [5]; для систем с несколькими степенями свободы какие-либо результаты такого рода, по-видимому, отсутствуют. Найденные ниже условия, обеспечивая анизохронность рассматриваемых систем, вместе с тем позволяют существенно ослабить установленные в [4] нелокальные критерии существования однопараметрических семейств периодических решений.

1. Рассматривается автономная гамильтонова система

$$J\dot{\mathbf{x}}=H_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}),\quad J=\begin{Vmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{Vmatrix},\quad \mathbf{x}=[x_1,\ldots,x_{2n}]^T \tag{1.1}$$

где $x_1,\ldots,x_n$ и $x_{n+1},\ldots,x_{2n}$ — обобщенные координаты и импульсы, $H(\mathbf{x})$ — функция Гамильтона, I_n — единичная матрица порядка n.

Пусть Ω — некоторая заданная область, $\mathbf{x}=0$ — единственное положение равновесия системы $(H_{\mathbf{x}}(0)=0)$ в этой области.

Предположим, что при $\mathbf{x}\in\Omega$ гессиан функции Гамильтона $A(\mathbf{x})=H_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x})$ является положительно-определенным и удовлетворяет одному из неравенств

$$A(\mathbf{x})<C(\mathbf{x})=\int_0^1 A(\theta\mathbf{x})\,d\theta \tag{1.2}$$

$$A(\mathbf{x})>C(\mathbf{x}) \tag{1.3}$$

Неравенства (1.2), (1.3), как обычно, означают, что они выполняются для квадратичных форм $(A(\mathbf{x})\mathbf{y},\mathbf{y})$ и $(C(\mathbf{x})\mathbf{y},\mathbf{y})$ при любом $\mathbf{y}\neq0$.

В силу положительной определенности $A(\mathbf{x})$ найдутся такие симметрические положительно-определенные постоянные матрицы A_- и A_+, что $A_-<A(\mathbf{x})<A_+$, $\mathbf{x}\in\Omega$, $\mathbf{x}\neq0$. Поскольку

$$\frac{\partial C(\varepsilon\mathbf{x})}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon A(z\mathbf{x})\,dz\right]=\frac{1}{\varepsilon}\left[A(\varepsilon\mathbf{x})-C(\varepsilon\mathbf{x})\right]$$

то при условии (1.2) $C(\varepsilon\mathbf{x})$ убывает, а при условии (1.3) — возрастает по ε. Поэтому в дальнейшем полагаем соответственно $A_+=C(0)=A(0)$ и $A_-=A(0)$.

Обозначим $\pm i\omega_k^-$, $\pm i\omega_k^+$ $(k=1,\ldots,n;\ \omega_k\leqslant\omega_{k+1})$ собственные значения матриц $J^{-1}A_-$ и $J^{-1}A_+$. При условии (1.2) $\omega_k^+=\omega_k^0$, при условии

(1.3) $\omega_k^-=\omega_k^0$, где $\pm i\omega_k^0$ — собственные значения матрицы $J^{-1}A(0)$ (физически ω_k^0 — частоты колебаний линеаризованной системы).

Если для некоторого j выполняется неравенство

$$\omega_i^0/\omega_j^0\neq m \ (m=1, 2, \ldots, i\neq j) \tag{1.4}$$

то в соответствии с теоремой Ляпунова [1] в окрестности $\mathbf{x}=0$ существует единственное семейство периодических решений $\mathbf{x}_j(t, s)$ с периодом $T_j(s)$, такое, что $\mathbf{x}_j(t, s)\to 0$, $T_j(s)\to 2\pi/\omega_j^0$ при $s\to 0$. Следующая теорема устанавливает достаточные условия продолжимости $\mathbf{x}_j(t, s)$ по параметру s до границы области Ω и монотонности $T_j(s)$.

Теорема. Если

$$m\notin[\omega_i^-/\omega_j^+, \ \omega_i^+/\omega_j^-] \quad (m=1, 2, \ldots, i\neq j) \tag{1.5}$$

и $2\omega_n^->\omega_n^+$, то решение $\mathbf{x}_j(t, s)$ единственным образом продолжимо по s до границы области Ω. Соответствующий период $T_j(s)$ при условии (1.2) монотонно возрастает, при условии (1.3) — убывает.

Доказательство. Поскольку из (1.5) следует (1.4), то в достаточно малой окрестности $\mathbf{x}=0$ семейство $\mathbf{x}_j(t, s)$ существует. Ему отвечает уравнение в вариациях

$$J\mathbf{y}^\cdot=A_j(t, s)\mathbf{y}, \ A_j(t, s)=A(\mathbf{x}_j(t, s)) \tag{1.6}$$

Ввиду автономности системы (1.1) уравнение (1.6) имеет периодическое решение $\mathbf{y}=\mathbf{x}_j^\cdot(t, s)$. Следовательно, краевая задача

$$J\mathbf{y}^\cdot=\lambda R(t)\mathbf{y}, \ \mathbf{y}(0)=\mathbf{y}(1) \tag{1.7}$$

при $R=A_j(t/T, s)$ имеет собственное значение $\lambda_k=T_j(s)$, отвечающее собственной функции $\mathbf{y}_k(t)=\mathbf{x}_j^\cdot(t/T, s)$.

Пусть λ_i^-, λ_i^+ $(i=1, 2, \ldots, \lambda_i\leqslant\lambda_{i+1})$ — положительные собственные значения задачи (1.7) при $R=A_-$ и $R=A_+$ соответственно. Очевидно, что λ_i^- и λ_i^+ образованы из расположенных в порядке возрастания величин $2\pi m/\omega_k^-$, $2\pi m/\omega_k^+$ $(m=1, 2, \ldots; k=1, \ldots, n)$, каждая из которых является двукратным собственным значением соответствующей задачи (1.7). Так как почти всюду на $[0, T_j(s)]$ $A_-<A_j(t, s)<A_+$, то собственные значения λ_i удовлетворяют неравенствам $\lambda_i^+<\lambda_i<\lambda_i^-$ [6]. В силу (1.5) отрезок $[2\pi/\omega_j^+, 2\pi/\omega_j^-]$ не имеет общих точек с отрезками $m[2\pi/\omega_i^+, 2\pi/\omega_i^-]$, поэтому число собственных значений λ_i на $[2\pi/\omega_j^+, 2\pi/\omega_j^-]$ равно двум (для $j=n$ этот вывод справедлив при дополнительном условии $2\omega_n^->\omega_n^+$). Учитывая неравенство $\lambda_k^+<\lambda_k(s)<\lambda_k^-$, найдем, что если $\mathbf{x}_j(t, s)$ продолжимо по s, то период $T_j(s)$ удовлетворяет неравенству

$$2\pi/\omega_j^+<T_j(s)<2\pi/\omega_j^- \tag{1.8}$$

Покажем, что собственное значение λ_k является простым. Используя интегральную формулу конечных приращений, представим правую часть (1.1) в виде

$$H_\mathbf{x}(\mathbf{x})=\int_0^1 H_{\mathbf{xx}}(\theta\mathbf{x})\mathbf{x}\,d\theta+H_\mathbf{x}(0)=C(\mathbf{x})\mathbf{x}$$

Поскольку $\mathbf{x}_j(t, s)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и $\mathbf{x}_j(t+T, s)=\mathbf{x}_j(t, s)$, то $\mathbf{x}_j(t/T, s)$ является собственной функцией, а $T_j(s)$ — соответствующим собственным значением задачи (1.7) при $R=C_j(t/T, s)=C_j(\mathbf{x}_j(t/T, s))$. Очевидно, что почти всюду $A_-<C_j(t, s)<A_+$, поэтому число собственных значений на $[2\pi/\omega_j^+, 2\pi/\omega_j^-]$ также равно двум.

Предположим, что при $R=A_j(t/T, s)$ собственное значение $\lambda_k=T_j(s)$ является двукратным $(\lambda_k=\lambda_{k+1})$. Учитывая, что при условии (1.2) почти всюду $C_j(t, s)>A_j(t, s)$, при условии (1.3) $C_j(t, s)<A_j(t, s)$, найдем, что $\lambda_{k+1}(C)<\lambda_{k+1}(A)=T_j(s)$ либо $\lambda_k(C)>\lambda_k(A)=T_j(s)$ соответственно, т. е. в обоих случаях равенство $\lambda_k(C)=T_j(s)$ или $\lambda_{k+1}(C)=T_j(s)$ невозможно. Полученное противоречие показывает, что $\lambda_k(A)=T_j(s)$ — простое собственное значение.

Таким образом, уравнение в вариациях (1.6), отвечающее решению $\mathbf{x}_j(t, s)$, имеет единственное периодическое решение $\mathbf{y}(t)=\mathbf{x}_j^{\cdot}(t, s)$. Следовательно [4], $\mathbf{x}_j(t, s)$ продолжимо по s, причем $dT/ds\neq 0$. Единственное положение равновесия системы в области Ω $\mathbf{x}=0$ при возрастании s не может быть предельной точкой, так как в силу (1.8) предельное значение $T_j(s)$ было бы равно $2\pi/\omega_j^0$, что, однако, невозможно ввиду монотонности $T_j(s)$. Поэтому $\mathbf{x}_j(t, s)$ продолжимо по s до границы $\partial\Omega$ области Ω (т. е. $\mathbf{x}(t_*, s_*)\in\partial\Omega$ при некоторых t_*, s_*). Учитывая, что при условии (1.2) $\omega_j^0=\omega_j^+$, при условии (1.3) $\omega_j^0=\omega_j^-$, найдем, что в первом случае $T_j(s)$ монотонно возрастает по s, во втором — убывает. Теорема доказана.

Замечание. Теорема легко обобщается на случай, когда матрицы A_-, $A(0)$ и A_+ не являются положительно-определенными. Необходимо только условие (1.5) заменить требованием, чтобы отрезок $[\lambda_k^+, \lambda_k^-]$ не имел общих точек с отрезками $[\lambda_i^+, \lambda_i^-]$ ($\lambda_k^+>0$, $\lambda_k^+=2\pi/\omega_j^0$ либо $\lambda_k^-=2\pi/\omega_j^0$ при условии (1.2) либо (1.3) соответственно).

2. Рассмотрим доказанную теорему. Заметим, что условие (1.5) аналогично условию теоремы Ляпунова (1.4), однако, в отличие от последнего, требует отсутствия целочисленных соотношений не между частотами линеаризованной системы ω_j^0 и ω_i^0, а между точками отрезка $[\omega_j^-, \omega_j^+]$ и отрезков $[\omega_i^-, \omega_i^+]$. Если область Ω уменьшается, то при соответствующем выборе A_- и A_+ отрезки $[\omega_k^-, \omega_k^+]$ $(k=1,\ldots,n)$ стягиваются к ω_k^0, в результате условие (1.5) переходит в (1.4). Таким образом, если для некоторой системы выполняется теорема Ляпунова и какое-либо из неравенств (1.2), (1.3), то можно указать конечную область Ω, для которой справедлива доказанная теорема.

Ввиду монотонности $T_j(s)$ в качестве параметра, определяющего рассматриваемое семейство решений, может быть принят его период T; при этом $\mathbf{x}_j(t, T)\to 0$ при $T\to 2\pi/\omega_j^0$.

Если условия теоремы выполняются при всех $\mathbf{x}\in R^{2n}$, то предельным является такое значение $T_*\in[2\pi/\omega_j^+, 2\pi/\omega_j^-]$, что $\|\mathbf{x}_j(t, T)\|\to\infty$ при $T\to T_*$. При этом любое решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1.1) с периодом $T\in(2\pi/\omega_j^+, 2\pi/\omega_j^-)$ принадлежит семейству $\mathbf{x}_j(t, T)$. Действительно, как видно из доказательства теоремы, решение $\mathbf{x}(t)$ может быть продолжено по T до $T=2\pi/\omega_j^0$, причем $\mathbf{x}(t, T)\to 0$ при $T\to 2\pi/\omega_j^0$. Так как такое семейство в окрестности положения равновесия единственно, то $\mathbf{x}(t, T)$ совпадает с $\mathbf{x}_j(t, T)$.

Аналогично [4] показывается, что если $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})=H(\mathbf{q}, -\mathbf{p})$, $\mathbf{q}=[x_1,\ldots,x_n]$, $\mathbf{p}=[x_{n+1},\ldots,x_{2n}]$, то при соответствующем выборе начала отсчета t рассматриваемое решение удовлетворяет соотношениям $\mathbf{q}_j(t, s)=\mathbf{q}_j(-t, s)$, $\mathbf{p}_j(t, s)=-\mathbf{p}_j(-t, s)$.

Если $H(\mathbf{x})=H(-\mathbf{x})$, то

$$\mathbf{x}_j(t, s)=-\mathbf{x}_j(t+T/2, s) \tag{2.1}$$

Заметим, что при условии $H(\mathbf{x})=H(-\mathbf{x})$ существование и единственность решений вида (2.1) обеспечивается более слабым, чем (1.5), условием

$$m\notin[\omega_i^-/\omega_j^+, \omega_i^+/\omega_j^-],\ 3\omega_n^->\omega_n^+\quad (i\neq j,\ m=1, 3, 5,\ldots) \tag{2.2}$$

Действительно, функция $\mathbf{y}_k=\mathbf{x}_j^{\cdot}(t/T, s)$ является собственной функцией краевой задачи для уравнения (1.7) при условиях $\mathbf{y}(0)=-\mathbf{y}(1/2)$. Аналогично доказательству теоремы устанавливается неравенство (1.8), а также простота соответствующего собственного значения λ_k, которая и обеспечивает продолжимость $\mathbf{x}_j(t, s)$ по s и монотонность $T_j(s)$. Однако условие (2.2) не исключает наличия решений $\mathbf{x}(t)$ с периодом $T\in(2\pi/\omega_j^+, 2\pi/\omega_j^-)$, не удовлетворяющих соотношению (2.1) (такие решения, в частности, могут ответвляться от $\mathbf{x}_j(t, s)$ при некотором s). Единственность $\mathbf{x}_j(t, s)$, как показано выше, гарантируется более сильным условием (1.5).

Предположим, что условие (1.5) будет выполнено, если ω_j^- либо ω_j^+ заменить некоторым значением $\omega_j^*>\omega_j^-$ либо $\omega_j^*<\omega_j^+$ в случае условий

(1.2) и (1.3) соответственно. Тогда решение $\mathbf{x}_j(t, T)$ продолжимо по T до $T_*=2\pi/\omega_j^*$, если при этом оно остается внутри области Ω.

Для $j=n$ условие (1.5) принимает наиболее простой вид $\omega_{n-1}^+<\omega_n^-$. Поэтому при условии (1.2) семейство $\mathbf{x}_n(t, T)$ внутри области Ω продолжимо по T при $T<T_*$, где T_* — меньшая из величин $2\pi/\omega_{n-1}^+$, $4\pi/\omega_n^+$.

В приложениях функция Гамильтона часто имеет вид

$$H(\mathbf{x})=(H_0\mathbf{x},\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{p}H_i(z_i),\qquad z_i=\sum_{k=1}^{2n}L_{ik}x_k \tag{2.3}$$

т. е. каждое слагаемое H_i зависит от некоторой линейной комбинации x_k. Например, в механических системах с нелинейными упругими связями обычно

$$H(\mathbf{x})=(T_0\mathbf{p},\mathbf{p})+(V_0\mathbf{q},\mathbf{q})+\sum_{i=1}^{p}V_i(z_i),\qquad z_i=\sum_{k=1}^{n}L_{ik}q_k$$

где $V_i(z_i)$ — потенциальная энергия i-й нелинейной связи, z_i — ее деформация. Для системы (2.3):

$$\begin{gathered}(A(\mathbf{x})\mathbf{y},\mathbf{y})=2(H_0\mathbf{y},\mathbf{y})+\sum_{i=1}^{p}b_i(z_i)\left(\sum_{k=1}^{2n}L_{ik}y_k\right)^2,\qquad b_i(z)=\frac{d^2H_i(z)}{dz^2}\\(C(\mathbf{x})\mathbf{y},\mathbf{y})=2(H_0\mathbf{y},\mathbf{y})+\sum_{i=1}^{p}\frac{f_i(z_i)}{z_i}\left(\sum_{k=1}^{2n}L_{ik}y_k\right)^2,\qquad f_i(z)=\frac{dH_i(z)}{dz}\end{gathered} \tag{2.4}$$

Предположим, что для всех i выполняется одно из неравенств

$$f_i(z)/z>df_i(z)/dz \tag{2.5}$$

$$f_i(z)/z<df_i(z)/dz \tag{2.6}$$

т. е. функции $f_i(z)/z$ убывают либо возрастают по $|z|$. Тогда если $z_i\neq0$ и $\Sigma L_{ik}y_k\neq0$ $(k=1,\ldots,2n)$ при некотором i, то выполняется неравенство (1.2) либо (1.3) соответственно. Учитывая это, можно показать, что если для $2\pi/\omega_j^0$-периодического решения линеаризованной системы $\mathbf{Z}_i^0(t)\neq0$ для какого-либо i, то теорема остается справедливой, поэтому при условиях (1.5), (2.5) период $T_j(s)$ семейства $\mathbf{x}_j(t, s)$ монотонно возрастает, а при условиях (1.5), (2.6) — убывает. Заметим, что этот вывод можно рассматривать как обобщение на n-мерные гамильтоновы системы известного результата, установленного в [5] для скалярного уравнения $\ddot{x}+f(x)=0$.

В системе с гамильтонианом (2.3) для определения матриц A_- и A_+ достаточно в (2.4) заменить функции $b_i(z_i)$ их минимумами и максимумами при $z_i\in\Omega$.

Для систем общего вида (не удовлетворяющих условию (1.2) или (1.3)) в [4] получено следующее достаточное условие продолжимости $\mathbf{x}_j(t, s)$ до границы Ω:

$$m\notin[(\omega_i^-+\omega_k^-)/\omega_j^+,\ (\omega_i^++\omega_k^+)/\omega_j^-]\quad(i,\ k=1,\ldots,n;\ i\neq k\ \text{при}\ k=j;\ m=1,2,\ldots) \tag{2.7}$$

Таким образом, наличие неравенства (1.2) или (1.3) обеспечивает монотонность $T_j(s)$ и позволяет существенно ослабить условие (2.7) (подчеркнем, однако, что последнее, в отличие от (1.5), гарантирует также орбитальную устойчивость в первом приближении семейства $\mathbf{x}_j(t, s)$).

3. Проиллюстрируем полученные результаты на примерах. Рассмотрим сначала систему n упругосвязанных маятников. Соответствующая

функция Гамильтона имеет вид

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+n}^2}{m_iL_i^2}+\sum_{i=1}^{n}m_igL_i(1-\cos x_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}k_i(x_{i+1}-x_i)^2$$

где x_i — угловая координата, m_i — масса, L_i — длина i-го маятника, k_i — жесткость связи между $(i+1)$-м и i-м маятниками, g — ускорение силы тяжести, x_{i+n} — соответствующий импульс.

Функция $H(x)$ имеет вид (2.3), где $z_i=x_i$, $H_i=m_igL_i(1-\cos x_i)$. Здесь $f_i(x_i)=m_igL_i\sin x_i$, $b_i(x_i)=m_igL_i\cos x_i$, поэтому при $|x_i|<A_*=4{,}493$ (A_* — первый корень уравнения $\operatorname{tg} x=x$) выполняется неравенство (2.5).

Пусть область Ω определяется условиями $|x_i|\leqslant A_i^0\leqslant\pi$ $(i=1,\ \dots,\ n)$. Так как

$$(A(\mathrm{x})\mathrm{y},\mathrm{y})=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i+n}^2}{m_iL_i^2}+\sum_{i=1}^{n}m_igL_i\cos x_iy_i^2+\sum_{i=1}^{n}k_i(y_{i+1}-y_i)^2 \qquad (3.1)$$

то для определения формы $(A_-\mathrm{y},\ \mathrm{y})$ достаточно в (3.1) заменить x_i величинами A_i^0. Соответствующие частоты $\omega_i^-(A_1^0,\ \dots,\ A_n^0)$ монотонно убывают по A_k^0.

Поскольку здесь $H(\mathrm{x})=H(-\mathrm{x})$, то при условии (2.2) семейство $\mathrm{x}_j(t,\ s)$ продолжимо по s до границы Ω, т. е. до такого значения $s=s_*$, при котором амплитуда колебаний какого-либо маятника становится равной A_i^0. Решение $\mathrm{x}_j(t,\ s)$ удовлетворяет соотношению (2.1); период $T_j(s)$ монотонно возрастает.

Если матрица A_- не является положительно-определенной (это возможно, если некоторые из величин A_i^0 превосходят $\pi/2$), то ее собственные значения $\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_p$ $(p<n)$ отрицательны. В этом случае установленные выше результаты справедливы для решений $\mathrm{x}_j(t,\ s)$, где $j>p$.

В качестве второго примера рассмотрим поперечные колебания струны с сосредоточенными массами. Соответствующая функция Гамильтона имеет вид

$$H=\frac{EF}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{L_i}\left(\frac{T_0L_i}{EF}+\sqrt{z_i^2+L_i^2}-L_i\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+n}}{m_i}$$

$$z_i=x_{i+1}-x_i\ (i=0,\ 1,\ \dots,\ n-1),\quad z_n=x_n,\quad x_0=0$$

где $x_1,\ \dots,\ x_n$ — поперечные перемещения масс $m_1,\ \dots,\ m_n$; $x_{n+1},\ \dots,\ x_{2n}$ — соответствующие импульсы, $L_0,\ \dots,\ L_n$ — длины последовательных участков, E — модуль упругости, F — площадь сечения, T_0 — начальное натяжение струны.

Рассматриваемый гамильтониан также имеет вид (2.3), причем $f_i(z_i)=EF[(k-1)L_i(z_i^2+L_i^2)^{-1/2}+1]z_i/L_i$, где k — относительное удлинение струны, вызванное натяжением T_0. Очевидно, что при $k>1$ выполняется условие (2.5), при $k<1$ — условие (2.6). Положим

$$a_i=EF[(k-1)L_i^2(z_{i0}^2+L_i^2)^{-3/2}+L_i^{-1}],\ z_{i0}=\max|x_{i+1}-x_i|,\ x_i,\ x_{i+1}\in\Omega$$

Заметим, что $a_i=\max df_i/dz_i$ при $k<1$, $a_i=\min df_i/dz_i$ при $k>1$. Пусть ω_i $(i=1,\dots,n)$ — частота собственных колебаний соответствующей линейной системы $(V={}^1/_2\Sigma a_i(x_{i+1}-x_i)^2\ (i=0,\dots,n-1))$. Тогда можно принять $\omega_i^-=\omega_i$, $\omega_i^+=\omega_i^0$ при $k>1$, $\omega_i^+=\omega_i$, $\omega_i^-=\omega_i^0$ при $k<1$, где ω_i^0 — частоты собственных малых колебаний струны.

Поскольку $H(\mathrm{x})=H(-\mathrm{x})$, то существование семейства $\mathrm{x}_j(t,\ s)$ обеспечивается условием (2.2). Соответствующий период $T_j(s)$ при $k>1$ возрастает, при $k<1$ — убывает. Таким образом, при заданной жесткости струны EF возрастание либо убывание периодов определяется натяжением T_0.

Если $\Omega=R^n$, то $\omega_i=\omega_i^0k^{-1/2}$. При условии (2.2) решение $\mathrm{x}_j(t,\ T)$ продолжимо по T до $T_j=2\pi/\omega_j$, при этом $\|\mathrm{x}_j(t,\ T)\|\to\infty$ при $T\to T_j$.

Предположим, что Ω определяется условием $|x_{i+1}-x_i|\leqslant CL_i$, где C — параметр. Тогда частоты ω_i и ω_i^0 пропорциональны, т. е.

$$\omega_i=d\omega_i^0,\quad d=\{[(k-1)(C+1)^{-2/2}+1]/k\}^{1/2} \tag{3.2}$$

Положив в (2.2) $\omega_i=d\omega_i^0$ $(i=1,\ldots,n)$, можно для каждого j вычислить значение d_j, при котором это условие нарушается (таким образом, семейство $\mathbf{x}_j(t, T)$ продолжимо по T до $T_j=2\pi/d_j\omega_j^0$). Очевидно, что значение d_j^- $(k>1)$ либо d_j^+ $(k<1)$ равно соответственно ближайшему к единице слева либо справа числу $m\omega_j^0/\omega_i^0$, $\omega_i^0/m\omega_j^0$ $(i=1,\ldots,n;\ m=1, 2,\ldots)$, поэтому $d_j^-=1/d_j^+$.

Числовые расчеты выполнены для струны с четырьмя равными массами, расположенными на одинаковом расстоянии друг от друга ($L_i=L_0$, $m_i=m_0$, $n=4$). Частоты собственных малых колебаний с точностью до множителя $2T_0^{1/2}(L_0m_0)^{-1/2}$ равны $\omega_1^0=0{,}3090$, $\omega_2^0=0{,}5878$, $\omega_3^0=0{,}8090$, $\omega_4^0=0{,}9512$. Соответствующие вычисления дают $d_1^-=0{,}974$, $d_1^+=1{,}026$; $d_2^-=0{,}809$, $d_2^+=1{,}235$, $d_3^-=d_4^-=0{,}851$, $d_3^+=d_4^+=1{,}176$.

Подставив найденные значения d_j в (3.2), можно при заданном k найти соответствующие значения C_j. Предельные амплитуды колебаний масс m_1, m_4 равны C_jL_0, для масс m_2, m_3 они равны $2C_jL_0$. Если при некотором d_j соотношение (3.2) неразрешимо относительно C, то это означает, что решение $\mathbf{x}_j(t, T)$ продолжимо по T до T_j, при этом $\|\mathbf{x}_j(t, T)\|\to\infty$ при $T\to T_j$.

Заметим, что в координатах $y_i=x_i$ $(i=1, 3,\ldots)$, $y_k=-x_k$ $(k=2, 4,\ldots)$ потенциальная энергия струны $V(y_1,\ldots,y_n)$ удовлетворяет условию

$$\partial V/\partial y_i>0,\quad y_1,\ldots,y_n>0 \tag{3.3}$$

Как показано в [7], в такой системе семейство $\mathbf{y}_n(t, T)$ $(\mathbf{y}_n(t, T)\to 0$ при $T\to 2\pi/\omega_n^0)$ удовлетворяет наряду с (2.1) соотношению

$$y_{ni}^{\boldsymbol{\cdot}}(t)<0,\quad t\in(0, T/2)\quad (i=1,\ldots,n) \tag{3.4}$$

Таким образом, координаты системы $x_{ni}(t)$ монотонно изменяются между экстремальными значениями, причем соседние массы движутся в противоположных направлениях (так же, как и в случае нормальных колебаний линеаризованной системы с частотой ω_n^0).

При условии (1.2) (т. е. при $k>1$) решение $\mathbf{x}_n(t, T)$ продолжимо до $T_n=2\pi/\omega_n$ независимо от условий (2.2), при этом $\|\mathbf{x}_n(t, T)\|\to\infty$ при $T\to T_n$.

В рассмотренной системе маятников условие (3.3) выполняется, во всяком случае, при $|x_i|\leqslant\pi$. Поэтому семейство $x_n(t, T)$ продолжимо по T, пока $|x_{ni}(t, T)|\leqslant\pi$, при этом соотношение (3.4) также имеет место.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат. 1956. 491 с.
2. *Verhulst F.* Asymptotic analysis of Hamiltonian systems // Lecture Notes Mathematics. V. 985. B.: Springer. 1983. P. 137–183.
3. *Duistermaat J. J.* Bifurcations of periodic solutions near equilibrium points of Hamiltonian systems // Lecture Notes Mathematics V. 1057. B.: Springer. 1984. P. 57–105.
4. *Зевин А. А.* Нелокальные критерии существования и устойчивости периодических колебаний автономных гамильтоновых систем // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 64–72.
5. *Opial Z.* Sur les periodes des solutions de l'equation differentielle $\ddot{x}+g(x)=0$ // Ann. Polon. Math. 1961. V. 10. P. 49–72.
6. *Крейн М. Г.* Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Памяти А. А. Андронова. М.: Изд-во АН СССР. 1955. С. 413–498.
7. *Зевин А. А.* Существование, устойчивость и некоторые свойства одного класса периодических колебаний в нелинейных механических системах // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 45–55.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
16.V.1986