

УДК 531.383

УХОД ДВУХСТЕПЕННОГО ИНТЕГРИРУЮЩЕГО ПОПЛАВКОВОГО ГИРОСКОПА ЗА СЧЕТ ЛЮФТА В ОПОРАХ ПОПЛАВКА

КОПЫЛОВ И. А.

Согласно экспериментально установленному факту [1], в гироскопах, ротор которых приводится во вращение синхронным гистерезисным электродвигателем, угловая скорость ухода зависит от фазового положения ротора по отношению к магнитному полю статора электродвигателя и, следовательно, произвольна при каждом запуске. В [2] высказано предположение о том, что причиной возникновения данной погрешности служит «полярный» возмущающий момент, появляющийся из-за несовершенств гиродвигателя. Зависимость квадратичных уходов, определяемых взаимодействием «полярных» и «экваториальных» возмущений, от фазового положения ротора по отношению к магнитному полю статора совпадает с наблюдаемой в эксперименте [1].

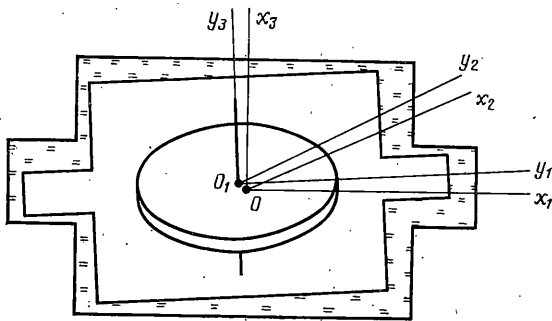
В данной работе предлагается модель возникновения погрешности двухстепенного интегрирующего поплавкового гироскопа, в которой учитывается наличие люфта в опорах поплавка. Полярные и экваториальные возмущения приводят к соударениям элементов в зазорах опор. Касательные составляющие ударных импульсов реакции вызывают уход гироскопа. Качественная зависимость ухода от фазового положения ротора такая же, как и в [1, 2]; величина ухода превосходит оценку величины погрешности, проведенной в [2].

1. Рассмотрим двухстепенной интегрирующий поплавковый гироскоп [3, 4], установленный на неподвижном основании. Положим, что со стороны статора синхронного гистерезисного электродвигателя на ротор действует возмущающий высокочастотный магнитный момент. Зададим его, так же как и в [2], в виде

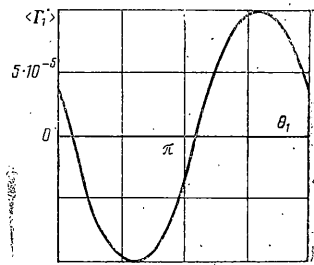
$$M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cos(k\Omega_0 T + \theta_k) \quad (1.1)$$

где M_k , θ_k — амплитуда и фаза k -й гармонической составляющей возмущающего момента, Ω_0 — угловая скорость вращения магнитного поля статора гиродвигателя, T — время. Момент (1.1) направлен по оси собственного вращения ротора. Влиянием синхронного «упругого» момента и момента сопротивления собственному вращению на высокочастотные колебания ротора будем пренебрегать. Ротор гироскопа динамически симметричен, из-за технологических несовершенств изготовления ротора его полярная главная центральная ось инерции отклонена от оси собственного вращения на малый угол ϵ . В опорах поплавка имеется малый люфт, позволяющий совершать поплавку свободные поступательные и угловые движения относительно неподвижного корпуса гироскопа (фиг. 1). В момент удара одной из цапф поплавка об опору, скрепленную с корпусом, в точке контакта возникает ударный импульс реакции, имеющий нормальную и касательную по отношению к поверхности опоры составляющие. Плотность вязкой жидкости, в которой находится поплавок, вообще говоря, подбирается таким образом, чтобы подъемная сила со стороны жидкости равнялась по величине весу поплавка вместе с ротором. Предположим, что за счет всякого рода несовершенств остаточный вес P , равный разности веса и подъемной силы, отличен от нуля. Найдем уход прибора, обусловленный перечисленными причинами.

Свяжем правые ортогональные трехгранники $Ox_1x_2x_3$, $O_1y_1y_2y_3$ с корпусом гироскопа и поплавком соответственно (фиг. 1). Ось Ox_1 является



Фиг. 1



Фиг. 2

выходной осью прибора; ось O_1y_3 — осью собственного вращения ротора. Считаем, что ось Ox_3 параллельна направлению силы тяжести. Обозначим через X_1, X_2, X_3 координаты точки O_1 , совпадающей с центром масс системы тел поплавков — ротор, в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Трехгранник $Oy_1y_2y_3$ получается из $Ox_1x_2x_3$ тремя последовательными поворотами: на угол Γ_1 вокруг оси Ox_1 , на угол Γ_2 вокруг второй оси промежуточного трехгранника и на угол Γ_3 вокруг оси Oy_3 . Углы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ малы. Движение центра масс O_1 определяется остаточным весом P и ударными импульсами реакции, возникающими в моменты контакта одной из цапф поплавка с его опорой. Считаем, что проекция на ось Ox_1 ударных импульсов реакции равна нулю. Положим, что во все время движения равна нулю координата X_1 точки O_1 .

Уравнения движения составим в виде уравнений движения центра масс системы тел поплавков — ротор в проекциях на оси Ox_2 и Ox_3 и уравнений кинетических моментов. Уравнения кинетического момента для системы поплавков — ротор запишем в проекциях на оси трехгранника $O_1y_1y_2y_3$, для ротора — в проекции на ось O_1y_3 . Динамический дебаланс ротора вызывает малые угловые колебания поплавка относительно корпуса гироскопа. Оценим амплитуду этих колебаний параметром $\varepsilon \ll 1$. Положим, что амплитуда колебаний ротора, возникающих под действием возмущающего магнитного момента (1.1), около его синхронного положения также имеет порядок ε . Выпишем уравнения движения, сохранив в них только линейные по переменным члены

$$\begin{aligned} M_0 X_2'' &= -N X_2'; & M_0 X_3'' &= -N X_3' - P & (1.2) \\ (A + A_1) \Gamma_1'' + H \Gamma_2' &= -N_1 \Gamma_1' + (A - C) \varepsilon \Omega_0^2 \cos \Omega_0 T \\ (A + B_1) \Gamma_2'' - H \Gamma_1' &= -N_2 \Gamma_2' + (A - C) \varepsilon \Omega_0^2 \sin \Omega_0 T \\ (C + B_1) \Gamma_3'' + C \Lambda'' &= -N_2 \Gamma_3'; & C \Gamma_3'' + C \Lambda'' &= M_1 \cos(\Omega_0 T + \theta_1) \end{aligned}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени T ; M_0 — суммарная масса поплавка и ротора, A, C — экваториальный и полярный моменты инерции ротора, A_1, B_1 — главные моменты инерции относительно осей трехгранника $O_1y_1y_2y_3$ динамически симметричного поплавка с учетом присоединенных моментов инерции жидкости, H — номинальное значение собственного кинетического момента гироскопа ($H = C\Omega_0$), N — коэффициент вязкого трения, возникающего при поступательных движениях поплавка, N_1, N_2 — коэффициенты вязкого трения, которое возникает при угловых движениях поплавка соответственно вокруг оси Ox_1 и осей, перпендикулярных Ox_1 , Λ — малый угол отклонения ротора от синхронного положения. Возникновение угла Λ обусловлено действием возмущающего магнитного момента (1.1). Отсчет времени выбран таким образом, что при $T=0$ главная полярная ось инерции ротора получается из оси O_1y_3 поворотом на угол ε вокруг оси O_1y_1 . Наличие в правых частях третьего и четвертого уравнений системы (1.2) неоднородных членов вызвано динамическим дебалансом ротора. В выражении для возмущающего магнитного момента (1.1) оставлена только первая гармоническая составляющая.

Обозначим R_{x_2}, R_{x_3} проекции на оси Ox_2, Ox_3 ударного импульса реакции. Проведем нормализацию переменных и параметров

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \Gamma_* \gamma_i, \quad \Lambda = \Lambda_* \lambda, \quad X_j = X_* x_j, \quad A = C_* a \\ C &= C_* c, \quad A_1 = C_{1*} a_1, \quad B_1 = C_{1*} b_1, \quad N = N_* n \\ N_1 &= N_* n_1, \quad N_2 = N_* n_2, \quad R_{x_j} = R_* r_{x_j}, \quad M_1 = M_* m_1 \\ P &= P_* p, \quad T = T_* t \quad (i=1, 2, 3; j=1, 2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Выберем характерные значения $\Gamma_*, \Lambda_*, \dots, P_*$ так, чтобы безразмерные величины $\gamma_i, \lambda, \dots, p$ были порядка единицы:

$$T_* = 1/\Omega_0, \quad \Gamma_* = \Lambda_* = \varepsilon, \quad C_* = C_{1*} = C, \quad M_* = \Gamma_* H T_*^{-1} \quad (1.4)$$

$$N_* = H, \quad N_{x*} = M_0 T_*^{-1}, \quad X_* = e \Gamma_*, \quad P_* = M_0 X_* T_*^{-2}, \quad R_* = P_* T_*$$

где e — величина, характеризующая расстояние между точкой O_1 и точкой, в которой происходит касание одной из цапф поплавка с его опорой.

После подстановки соотношений (1.3), (1.4) в (1.2) получим уравнения движения в безразмерной форме

$$\begin{aligned} x_2'' &= -n x_2', \quad x_3'' = -n x_3' - p \\ (a+a_1) \gamma_1'' + \gamma_2' &= -n_1 \gamma_1' + (a-1) \cos t \\ (a+b_1) \gamma_2'' - \gamma_1' &= -n_2 \gamma_2' + (a-1) \sin t \\ (1+b_1) \gamma_3'' + \lambda'' &= -n_2 \gamma_3', \quad \gamma_3'' + \lambda'' = m_1 \cos(t+\theta_1) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени t . Заметим, что система уравнений (1.5) распадается на три независимые между собой подсистемы по переменным x_2, x_3 , переменным γ_1, γ_2 и переменным γ_3, λ .

Получим в первом приближении по ε соотношения при ударе одной из цапф поплавка об его опору. В момент удара скачком изменяются значения первых производных по времени переменных $x_2, x_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda$; значения самих переменных остаются неизменными. В сечении опоры поплавка плоскостью, проходящей через точку касания цапфы с опорой и параллельной координатной плоскости Ox_2x_3 , находится кольцо, радиус внутренней окружности которого равен $r+\varepsilon l$, где r — радиус цилиндрической цапфы поплавка, εl — малое расстояние, характеризующее размеры люфта. Удар происходит, когда выполняется одно из двух соотношений

$$\begin{aligned} (x_2 + e\gamma_3)^2 + (x_3 - e\gamma_2)^2 &= l^2 \\ (x_2 - e\gamma_3)^2 + (x_3 + e\gamma_2)^2 &= l^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Точка касания S цапфы поплавка с опорой в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеет координаты $(\pm e, (x_2 \pm e\gamma_3)r/l, (x_3 \mp e\gamma_2)r/l)$. Здесь и далее верхний знак соответствует первому соотношению (1.6), нижний — второму.

Запишем уравнение изменения при ударе вектора количества движения системы тел поплавков — ротор в проекциях на оси Ox_2 и Ox_3 и уравнения изменений при ударе векторов момента количества движения системы в проекциях на оси трёхгранника $O_1y_1y_2y_3$ и момента количества движения ротора в проекции на ось O_1y_3 . В первом приближении по ε будем иметь следующие соотношения, связывающие послеударные значения скоростей с доударными:

$$\begin{aligned} x_2^{(1)'} - x_2^{(0)'} &= r_{x_2}, \quad x_3^{(1)'} - x_3^{(0)'} = r_{x_3} \\ (a+a_1) (\gamma_1^{(1)'} - \gamma_1^{(0)'}) &= r_{x_3} (x_2 \pm e\gamma_3) r/l - r_{x_2} (x_3 \mp e\gamma_2) r/l \\ (a+b_1) (\gamma_2^{(1)'} - \gamma_2^{(0)'}) &= \mp r_{x_3} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} (1+b_1)(\gamma_3^{(1)'} - \gamma_3^{(0)'}) + \lambda^{(1)'} - \lambda^{(0)'} &= \pm e r_{x_2} \\ \gamma_3^{(1)'} - \gamma_3^{(0)'} + \lambda^{(1)'} - \lambda^{(0)'} &= 0 \end{aligned}$$

Верхним индексом 1 в скобках обозначены значения послеударных скоростей переменных, верхним индексом 0 в скобках — соответствующие доударные значения. Для замыкания уравнений (1.7) наложим, опираясь на гипотезу Ньютона и гипотезу Рауса [5], условия на послеударные нормальную $v_n^{(1)}$ и касательную $v_\tau^{(1)}$ составляющие вектора скорости точки S , принадлежащей цапфе поплавка. Связь между послеударной и доударной нормальными составляющими вектора скорости точки S зададим следующим образом:

$$v_n^{(1)} = -\kappa v_n^{(0)} \quad (1.8)$$

где κ — коэффициент восстановления ($0 < \kappa < 1$). Выражение для $v_\tau^{(1)}$ зависит от соотношения между нормальной r_n и касательной r_τ составляющими ударного импульса реакции. Если справедливо неравенство

$$|r_\tau| < \mu |r_n| \quad (1.9)$$

где μ — динамический коэффициент трения, то $v_\tau^{(1)} = 0$. Выразим условие (1.9) через значения доударных скоростей переменных. Проекции $v_2^{(k)}$, $v_3^{(k)}$ вектора скорости точки S на оси Ox_2 , Ox_3 определяются по значениям $x_2^{(k)'}$, $x_3^{(k)'}$, $\gamma_2^{(k)'}$, $\gamma_3^{(k)'}$ ($k=0, 1$). В первом приближении по ε имеем

$$\begin{aligned} v_2^{(k)} &= x_2^{(k)'} \pm e \gamma_3^{(k)'} - \gamma_1^{(k)'} (x_3 \mp e \gamma_2) r / l \\ v_3^{(k)} &= x_3^{(k)'} \mp e \gamma_2^{(k)'} + \gamma_1^{(k)'} (x_2 \pm e \gamma_3) r / l \quad (k=0, 1) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Проекция ударного импульса реакции и проекция вектора скорости точки S на нормальное и касательное направления и на оси Ox_2 , Ox_3 связаны между собой соотношениями

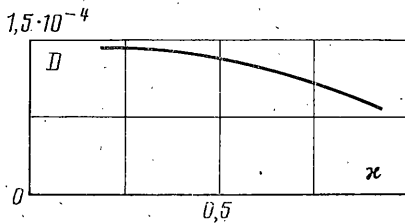
$$\begin{aligned} r_n &= [r_2(x_2 \pm e \gamma_3) + r_3(x_3 \mp e \gamma_2)] / l \\ r_\tau &= [r_2(x_3 \mp e \gamma_2) - r_3(x_2 \pm e \gamma_3)] / l \\ v_n^{(k)} &= [v_2^{(k)}(x_2 \pm e \gamma_3) + v_3^{(k)}(x_3 \mp e \gamma_2)] / l \\ v_\tau^{(k)} &= [v_2^{(k)}(x_3 \mp e \gamma_2) - v_3^{(k)}(x_2 \pm e \gamma_3)] / l \quad (k=0, 1) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Используя выражения (1.7), (1.8), (1.10), (1.11), можно установить, что неравенство (1.9) равносильно следующему: $|v_\tau^{(0)}| < \mu(1+\kappa)|v_n^{(0)}|$. Если это условие не выполнено, то касательная и нормальная составляющие ударного импульса удовлетворяют равенству $|r_\tau| = \mu|r_n|$. В этом случае послеударная касательная составляющая вектора скорости точки S по абсолютной величине меньше доударной на величину $\mu(1+\kappa)|v_n^{(0)}|$ и знаки $v_\tau^{(1)}$ и $v_\tau^{(0)}$ совпадают:

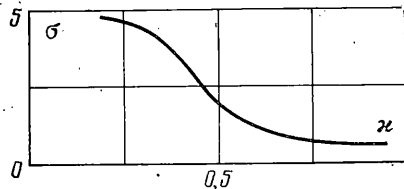
$$|v_\tau^{(1)}| = |v_\tau^{(0)}| - \mu(1+\kappa)|v_n^{(0)}| \quad (1.12)$$

Соотношения (1.7), (1.8), (1.10), (1.11) вместе с равенством $v_\tau^{(1)} = 0$ или (1.12) образуют замкнутую невырожденную систему линейных уравнений для определения послеударных скоростей переменных.

2. Движение системы исследовалось методом припасовывания. Уравнения свободного движения (1.5) между ударами были проинтегрированы, и значения переменных задачи в момент времени t в явном виде выражены через их начальные значения в произвольный момент времени t_0 ($t_0 < t$). С помощью ЭВМ БЭСМ-6 строилась последовательность моментов времени, в которые совершались удары цапф поплавка об опоры. Начальные условия выбирались произвольно. По известному решению уравнений (1.5) численно определялся момент удара, т. е. наименьший момент времени, больший t_0 , в который выполняется одно из соотношений (1.6). Затем производилось преобразование скоростей переменных по (1.7), (1.8), (1.10)–(1.12), за начальное время выбирался момент удара. По известному решению уравнений (1.5) определялся момент времени, в который происходил следующий удар, и так далее. Расчеты проводились для гироскопа со следующими числовыми значениями



Фиг. 3



Фиг. 4

параметров: $H=0,1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$; $\Omega_0=2,5\cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$; $A_1=2\cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $B_1=1,5\cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $C=4\cdot 10^{-5} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $A=3\cdot 10^{-5} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $M_0=0,3 \text{ кг}$; $e=2\cdot 10^{-2} \text{ м}$; $r=7\cdot 10^{-4} \text{ м}$; $\varepsilon l=10^{-5} \text{ м}$; $N=25 \text{ кг}\cdot\text{с}^{-1}$; $N_1=3,3\cdot 10^{-2} \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$; $N_2=3,3\cdot 10^{-2} \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$; $M_1=10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-2}$; $\varepsilon=7\cdot 10^{-6}$; $\kappa=0,9$; $\mu=10^{-2}$; $P=3\cdot 10^{-3} \text{ Н}$.

За последовательностью ударов велось наблюдение в течение 200 с. Через каждые 5 с находилось среднее значение ухода $\langle \Gamma_1^* \rangle$ гироскопа в ненормализованных параметрах за истекший интервал времени длительностью 5 с по следующей формуле:

$$\langle \Gamma_1^* \rangle = [\Gamma_1^*(T) - \Gamma_1^*(T - T_\Delta)] / T_\Delta \quad (2.1)$$

где T — текущее время, $\Gamma_1^*(T)$ — максимальное значение переменной Γ_1 на интервале времени $(T - T_0, T)$, $T_0 = 2\pi / \Omega_0$, $T_\Delta = 5 \text{ с}$ ($T_0 \ll T_\Delta$).

На фиг. 2 приведена зависимость среднего ухода от величины θ_1 фазового угла возмущающего магнитного момента (1.1), полученная с помощью ЭВМ. Уход $\langle \Gamma_1^* \rangle$ является гармонической функцией угла θ_1 с периодом 2π и амплитудой D , равной 10^{-4} с^{-1} . Максимальное по модулю значение ухода достигается при $\theta_1 \approx 1,9 + \pi k$, где k — целое число. Вне зависимости от начальных условий отклонение среднего значения ухода, полученного по (2.1) на различных временных интервалах счета, длительностью 5 с от величины, указанной на фиг. 2, при любом фиксированном значении фазы θ_1 не превышало $0,01D$. Исключения составляли значения $\langle \Gamma_1^* \rangle$ на первом, втором и третьем начальных интервалах счета, образующих временной интервал, на котором происходило установление ухода. При некоторых начальных условиях отклонения первого полученного по (2.1) значения $\langle \Gamma_1^* \rangle$ от указанного на фиг. 2 достигало $0,6D$.

Величина θ_1 , а вместе с ней величина ухода $\langle \Gamma_1^* \rangle$ меняется при каждом запуске гироскопа с синхронным гистерезисным электродвигателем.

При изменении параметра κ качественная зависимость ухода от величины θ_1 оставалась прежней. Максимальное по абсолютной величине значение $\langle \Gamma_1^* \rangle$ среднего ухода достигалось при тех же фазах θ_1 . На фиг. 3 показана зависимость D от величины κ ($\theta_1 \approx 1,9 + \pi k$, где k — целое число). При уменьшении κ величина D увеличивается. Значения θ_1 , при которых уход максимален, изменялись при варьировании коэффициентов вязкого трения N_1 и N_2 .

Количество ударов цапф поплавка об его опоры, произошедших за интервал времени T_Δ , изменялось незначительно на протяжении всего времени наблюдения. Зависимость среднего количества σ ударов за время $T_0 = 2\pi / \Omega_0$ от величины коэффициента восстановления κ приведена на фиг. 4. При уменьшении остаточного веса \dot{P} в два раза величина σ уменьшалась в 2,8 раз, уход уменьшался в 3,1 раза.

С уменьшением динамического коэффициента трения μ величина ухода становилась меньше. При $\mu = 0$ уход отсутствовал. Следовательно, уход гироскопа является благодаря наличию касательной составляющей ударного импульса реакции в точках контакта цапф поплавка и его опор.

Счетом на ЭВМ также установлено, что вне зависимости от начальных условий по истечении некоторого начального интервала времени наблюдения, заведомо не превышающего $3T_\Delta$, координаты центра масс системы во все моменты ударов были близки между собой. При этом знак координаты X_2 в моменты ударов совпадал со знаком среднего ухода. Если в выражении (1.1) для возмущающего магнитного момента синхронного гидродвигателя оставить не первую, а одну вторую, третью или четвертую гармоническую составляющую, то уход не возникает.

Автор благодарен И. В. Новожилову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Делекторский Б. А., Правоторов Е. А., Соболев Е. Б. и др. Исследование неустойчивости дрейфа гироскопа от изменения фазы вращения ротора // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1978. Вып. 361. С. 34–41.
2. Делекторский Б. А., Новожилов И. В. К оценке уходов в зависимости от фазового угла вращающего магнитного поля синхронного гидродвигателя // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 3–7.
3. Сломьянский Г. А., Прудников Ю. Н. Поплавковые гироскопы и их применение. М.: Оборонгиз. 1958. 244 с.
4. Wrigley W., Hollister W. M., Denhard W. G. Gyroscopic theory, design, and instrumentation. Cambridge: M. I. T. Press, 1969. 444 с. М.: Мир. 1972. 416 с.
5. Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара. М.: Наука. 1977. 232 с.