МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1988

УДК 531.384

СЛАБО НЕГОЛОНОМНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧИ О КАЧЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ВОЗМОЖНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ ПО ФАЗОВЫМ ТОРАМ

ТАТАРИНОВ Я. В.

Рассматривается задача о качении (без проскальзывания) тяжелого твердого тела, опирающегося на неподвижную поверхность сферой малого радиуса. При стремлении радиуса к нулю в пределе получается голономная задача о вращении твердого тела, а ее первые интегралы и координаты точки опоры будут медленными переменными. Их эволюция исследуется при помощи пространственного осреднения по Аносову [1] в тех случаях, когда голономная задача вполне интегрируема как каноническая система, так что ее фазовое пространство расслоено на торы.

В возмущенном случае Эйлера осредненное (по двумерным торам) движение точки касания такое же, как при качении некоторого однородного шара по той же поверхности. В возмущенном случае Лагранжа (торы уже трехмерные) точка соприкосновения в среднем движется по горизонтальным сечениям опорной поверхности, а постоянные интегралов энергии и циклических не эволюционируют.

Перспективы применения одной теории Мозера [2] дает новое, неканоническое слоение фазовых торов уравнений Чаплыгина для задачи о качении динамически симметричного тела по плоскости (в ней есть три первых интеграла [3]) без предположения о малости закругления. При этом сохраняется фазовый объем соответствующего случая Лагранжа. В задаче Чаплыгина о плоском качении уравновешенного трехосного тела со сферической поверхностью [4] также существуют фазовые торы с интегральным инвариантом [5], однако аналитическая природа их другая.

Обычные методики усреднения [6, 7] в различных задачах о движении твердого тела уже использованы авторами [8–12] и другими. Теоретическая точность осреднения по Аносову качественно равноценна точности обычных методик – чтобы это показать, дальше даны единообразные переформулировки главных теорем. Кроме того, осреднение по Аносову позволило не приводить системы к стандартному виду и не использовать переменные действие – угол.

1. Пусть S — центр масс тела, m — его масса, ε — радиус опорной сферы, Q — ее центр, A, B, C — главные моменты инерции в точке Q, вектор $QS=r\mathbf{e}$, $|\mathbf{e}|=1$, P — точка опоры, $\mathbf{N}(P)$ — единичная нормаль к неподвижной поверхности M, направленная в сторону тела, $\mathbf{v}_S$, $\mathbf{v}_Q$, $\mathbf{u}_P=P^{\cdot}$ — скорости точек тела S, Q и точки $P\in M$ (места соприкосновения), $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, $\boldsymbol{\Lambda}_S$, $\boldsymbol{\Lambda}_P$ — моменты абсолютных количеств движения относительно соответствующих точек, $\boldsymbol{\lambda}_Q$ — момент чистого вращения вокруг точки Q (в поступательно движущихся осях), g — ускорение силы тяжести, $\mathbf{E}$ — единичное направление вертикали вверх, $Z(P)$ — высота точки опоры, f — реакция опоры. Точные уравнения движения имеют вид

$$m d\mathbf{v}_S/dt=-mg\mathbf{E}+\mathbf{f},\quad d\boldsymbol{\Lambda}_S/dt=-[PS\times\mathbf{f}]$$

$$\mathbf{v}_S=[\boldsymbol{\omega}\times PS],\quad PS=\varepsilon\mathbf{N}+r\mathbf{e}$$

К ним необходимо добавить выражения $\boldsymbol{\Lambda}_S$ через $\boldsymbol{\omega}$ с помощью связанных осей, а также вспомогательные геометрические и кинематические тождества, например уравнения Пуассона. Можно исключить реакцию, применив обобщенную теорему об изменении момента [4, 13] относительно P и выделив движение центра опорной сферы:

$$d\boldsymbol{\Lambda}_P/dt=[PS\times(-mg\mathbf{E})]+m[[\boldsymbol{\omega}\times PS]\times\mathbf{u}_P,\quad \boldsymbol{\Lambda}_P=m[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_S]+\boldsymbol{\Lambda}_S \tag{1.1}$$

$$\mathbf{v}_Q=\varepsilon[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{N}]^{\cdot},\quad \mathbf{f}=mg\mathbf{E}+m[\boldsymbol{\omega}\times PS]^{\cdot} \tag{1.2}$$

Всегда существует интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(\mathbf{\Lambda}_P, \boldsymbol{\omega})+mg(Z(P)+(\mathbf{E}, PS))=K=\mathrm{const}$$

При $\varepsilon=0$ имеем $\mathbf{v}_Q=0$: тело вращается вокруг $Q=P$ и при этом $\mathbf{\Lambda}_P=\mathbf{\Lambda}_Q=\lambda_Q$ и имеются интегралы $(\mathbf{\Lambda}_P, \mathbf{E})=F=\mathrm{const}$, $P=\mathrm{const}$. Впредь размерно независимые параметры m, g, A считаются равными единице. Будем считать ε малым.

Из равенств $\mathbf{N}^{\cdot}=O(\varepsilon)$, $PQ=\varepsilon\mathbf{N}$, $\mathbf{\Lambda}_P=\lambda_Q+\varepsilon r[\boldsymbol{\omega}\times[\mathbf{N}\times\mathbf{e}]]+\varepsilon^2[\mathbf{N}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{N}]]$ следует, что

$$P^{\cdot}\approx\mathbf{v}_Q=\varepsilon[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{N}(P)] \tag{1.3}$$

$$d/dt\lambda_Q\approx r[\mathbf{E}\times\mathbf{e}]+\varepsilon[\mathbf{E}\times\mathbf{N}]-\varepsilon r d^0/dt[\mathbf{N}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}]]-\varepsilon r[\mathbf{e}\times[d^0\boldsymbol{\omega}/dt\times\mathbf{N}]] \tag{1.4}$$

Здесь знак $\approx$ означает, что отбрасываются слагаемые $O(\varepsilon^2)$ (это, например, позволяет считать, что геометрия масс не зависит от ε). Символ d^0/dt означает полную производную по времени в силу уравнений движения при $\varepsilon=0$. Видно, что (1.3) и (1.4) составляют систему приближенных уравнений движения. Получается поток на фазовом пространстве задачи — прямом произведении $M\{P\}\times\mathbf{R}^3\{\boldsymbol{\omega}\}\times SO(3)$, где $SO(3)$ — множество ортогональных матриц, задающих ориентацию связанных осей.

Фиксирование координат точки P и констант F, $H=K-Z(P)$ при $\varepsilon=0$ задает в фазовом пространстве сложные четырехмерные поверхности [14]. Использование их для осреднения невозможно, так как фазовые траектории, вообще говоря, не всюду плотны на этих поверхностях. Осреднение (по поверхностям меньшей размерности) становится возможным, если возмущать интегрируемый случай.

Рассмотрим кратко осуществимость движения тела без отрыва от поверхности (или без проскальзывания, если задан конечный коэффициент трения). Из (1.2) можно заключить, что $f=mg\mathbf{E}+md^0\mathbf{v}_S/dt+O(\varepsilon)$, так что с асимптотической точки зрения достаточно обеспечить выполнение неравенства $(\mathbf{f}, \mathbf{E})>0$ в невозмущенном движении. В случае Эйлера всегда $\mathbf{f}=mg\mathbf{E}$, а в случае Лагранжа условия, гарантирующие неравенство $(\mathbf{f}, \mathbf{E})>0$, даны в [3]. Но и без учета этих условий $(\mathbf{f}, \mathbf{E})\approx mg$ вблизи регулярных прецессий (см. также [15]). В силу сказанного полученные далее качественные заключения о движении справедливы для значительной области начальных условий.

2. Будем считать, что правые части дифференциальных уравнений и другие вводимые функции непрерывно дифференцируемы в области определения (для простоты и без ущерба для приложений).

Эффективность методов усреднения опирается на эргодическую теорему Биркгофа; если поток $g_v{}^t$ векторного поля $x^{\cdot}=v(x)$ на n-мерном компактном многообразии Σ обладает инвариантной мерой mes с плотностью $\mu(x)>0$ (иными словами, интегральным инвариантом μdx) и метрически транзитивен (т. е. мера всякого инвариантного множества равна 0 или $\mathrm{mes}\,\Sigma$), то для любой непрерывной функции $f(x)$ ее временное среднее

$$f^{\infty}(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(g_v{}^t(x))\,dt$$

для всех x, кроме инвариантного множества меры нуль, совпадает с ее пространственным средним

$$f_{\Sigma}=\int_{\Sigma} f(x)\,\mu(x)\,dx\left(\int_{\Sigma}\mu(x)\,dx\right)^{-1}$$

Аналитическое условие инвариантности меры имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu(x)\,v_i(x))\equiv 0$$

Если v обладает первыми интегралами I_k, то локально можно считать, что $I_k\equiv x_{m+k}$, $k\geqslant 1$. Тогда в последней формуле $v_{m+k}\equiv 0$, суммирование идет от 1 до m, что дает на интегральных поверхностях $x_{m+k}=c_k$ индуцированную инвариантную меру с плотностью $\mu(x_1, \ldots, x_m, c_1, \ldots, c_{n-m})$ (этот вывод верен и «в целом»).

Осреднение по Аносову состоит в вычислении пространственных средних по интегральным поверхностям наименьшей размерности. Для исследования конкретных систем оно еще не применялось.

Сформулируем основной результат [1] в форме, удобной для приложений.

Теорема Аносова. Пусть система дифференциальных уравнений

$$\Phi^{\cdot}=\varepsilon F(\Phi, \varphi, \varepsilon), \ \varphi^{\cdot}=\omega(\Phi, \varphi)+\varepsilon f(\Phi, \varphi, \varepsilon) \tag{2.1}$$

при каждом $\varepsilon\in[0, \varepsilon^{\vee}]$ определена на прямом произведении открытой k-мерной области $D\{\Phi\}$ и компактного многообразия $\Sigma\{\varphi\}$ размерности l (обозначения для простоты выбраны так, как будто Σ есть l-мерный тор $\mathbf{T}^l\{\varphi \bmod 2\pi\}$); при $\varepsilon=0$ невозмущенная система $\Phi^{\cdot}=0$, $\varphi^{\cdot}=\omega(\Phi, \varphi)$ обладает инвариантной мерой с плотностью $\mu(\Phi, \varphi)>0$ и для почти всех значений $\Phi\in D$ задает на поверхностях Σ_Φ метрически транзитивные потоки (в случае $\Sigma=\mathbf{T}^l$ это обеспечивается несоизмеримостью средних частот $\Omega_i(\Phi)=[\omega_i(\Phi, \varphi)]_\Sigma$).

Обозначим $\Phi_\varepsilon(t, \mathrm{A}, \alpha)$, $\varphi_\varepsilon(t, \mathrm{A}, \alpha)$ решение исходной системы (2.1) с начальными условиями (A, α), а $\Psi(\varepsilon t, \mathrm{A})$ — решение осредненной системы $\Psi^{\cdot}=\varepsilon F_\Sigma(\Psi)$, где F_Σ — пространственное среднее $F(\Phi, \varphi, 0)$ на Σ_Φ. Будем брать А из компактной подобласти $K\subset D$, такой, что все решения $\Psi(\varepsilon t, \mathrm{A})$ определены при $0\leqslant\varepsilon t\leqslant T$.

Тогда для любых $\eta>0$, $\delta>0$ существует $\varepsilon_0(K, T, \eta, \delta)<\varepsilon^{\vee}$, такое, что при $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ в $K\times\Sigma$ можно выделить «дефектное множество» $\Gamma_\varepsilon^\delta$, $\operatorname{mes}\Gamma_\varepsilon^\delta\leqslant\delta$, после чего отклонение $|\Phi_\varepsilon(t, \mathrm{A}, \alpha)-\Psi(\varepsilon t, \mathrm{A})|\leqslant\eta$ при начальных условиях $(\mathrm{A}, \alpha)\in K\times\Sigma\backslash\Gamma_\varepsilon^\delta$ и на интервале времени $0\leqslant t\leqslant T/\varepsilon$.

Теорема Боголюбова. Пусть система дифференциальных уравнений

$$X^{\cdot}=\varepsilon G(X, t, \varepsilon) \tag{2.2}$$

при каждом $\varepsilon\in[0, \varepsilon^{\vee}]$ определена на прямом произведении открытой k-мерной области $D\{X\}$ и полупрямой $\{t\geqslant0\}$; локально равномерно по x в области D определено временное среднее

$$G^\infty(X)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T G(X,t,0)$$

Обозначим $X_\varepsilon(t, A)$ решение исходной системы (2.2) с начальным условием $t=0$, $X=A$, а $Y(\varepsilon t, A)$ — решение осредненной системы $Y^{\cdot}=\varepsilon G^\infty(Y)$. Будем брать A из компактной подобласти $K\subset D$, такой, что все решения $Y(\varepsilon t, A)$ определены при $0\leqslant\varepsilon t\leqslant T$.

Тогда для любого $\eta>0$ существует $\varepsilon_0(K, T, \eta)\leqslant\varepsilon^{\vee}$, такое, что при $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ отклонение $|X_\varepsilon(t, A)-Y(\varepsilon t, A)|\leqslant\eta$ при начальных условиях $A\in K$ на интервале времени $0\leqslant t\leqslant T/\varepsilon$.

Теоремы Боголюбова и Аносова не выводятся одна из другой. В одночастотной ситуации, когда $\Sigma=\mathbf{T}^1$ или G периодична по t, они практически равноценны (но не равносильны) — при этом дефектное множество отсутствует и в обеих теоремах $\varepsilon_0=O(\eta)$. Общие же оценки ε_0 через η в обеих теоремах даны быть не могут.

В теореме Боголюбова дефектное множество не возникает, так как требование равномерной сходимости при вычислении временного среднего является, как отмечено в [1], весьма ограничительным и неестественным даже в случае двумерных Σ (например, если $\Sigma=\mathbf{T}^2$, то отношение Ω_1/Ω_2 должно быть постоянным иррациональным числом). Из доказательства теоремы Аносова следует, что на дефектном множестве временное среднее функций F слишком сильно отклоняется от пространственного. Поэтому практическое применение схемы Боголюбова либо приведет к пригодной системе стандартного вида, либо не пройдет и тогда укажет на дефектное множество (точнее, на некоторый предел $\Gamma_\varepsilon^\delta$). К вычислению временных средних сводится и схема осреднения по порождающим решениям [7]. Такое вычисление (или равносильный поиск замен переменных) нередко громоздко именно из-за возможности разрывов.

Применение на практике осреднения по Аносову, скорее всего, всегда будет связано с осреднением по $\Sigma=\mathbf{T}^l$. Если при этом ω_i не зависят от φ и функционально независимы, то справедлива оценка погрешности усреднения А. И. Нейштадта [5], в силу которой $\varepsilon_0=O(\eta^2\delta^2)$, $\operatorname{mes}\Gamma_\varepsilon^\delta=O(\sqrt{\varepsilon}/\eta)\leqslant\delta$. В частных ситуациях эта оценка может быть улучшена. Пределом $\Gamma_\varepsilon^\delta$ при $\Sigma=\mathbf{T}^l$ всегда оказывается некоторое подмножество торов с соизмеримыми частотами — именно на них временное среднее может иметь разрывы.

Пространственное среднее всегда непрерывно (на практике — гладко). Это иногда позволяет находить его по следующей схеме: на эргодических Σ пространственное среднее равно временному по теореме Биркгофа, а на остальных доопределимо по непрерывности. В качестве примера укажем на

$$(d^0f/dt)_\Sigma\equiv0 \tag{2.3}$$

(пространственное среднее полной производной в силу невозмущенной системы тождественно равно нулю).

Исходя из того что мала вероятность немалых отклонений на больших временах, осреднение по Аносову будем считать адекватным отражением грубых свойств исследуемой невозмущенной системы.

3. Задача, поставленная в п. 1, является слабо неголономной — невозмущенная задача голономна. Осреднение будем проводить по фазовым торам с двумя и тремя частотами случаев Эйлера и Лагранжа соответственно.

Впервые метод усреднения применен к динамике неголономной системы в работе [11]. Невозмущенной здесь послужила также неголономная, одночастотная задача о качении шара по плоскости. В [12] небольшие колебания тела на плоскости описаны при помощи нормальной формы второго приближения, что равносильно усреднению, при котором невозмущенной системой является линейное приближение. Осреднение, базирующееся на случае Эйлера, впервые проведено в [8] применительно к задаче, где опасных соизмеримостей между частотами конечное число, так что от дефектного множества можно отстраниться выбором начальных условий. В [9] описаны такие диссипативные силы, что при возмущении ими волчка Лагранжа уравнения для медленных переменных зависят только от нутации, так что из уравнений движения выделяется одночастотная подсистема.

С общей точки зрения дальше возникнут системы, близкие к гамильтоновым (но трактуемые не так, как в [7]):

$$p^\cdot=-\partial H/\partial q+\varepsilon(\ldots),\ q^\cdot=\partial H/\partial p+\varepsilon(\ldots),\ R^\cdot=\varepsilon(\ldots),\ H=H(p,\ q,\ R)$$

и обратимые в том смысле, что выдерживают одновременную замену p на $-p$ и t на $-t$. Подчеркнем также, что при $\varepsilon=0$ имеется интегральный инвариант $dp_1\ldots dp_ndq_1\ldots dq_ndR_1\ldots dR_l$.

Допустим, что невозмущенная система наряду с тривиальными интегралами $R_j=C_{n+j}$ обладает независимыми интегралами $F_i(p,\ q,\ R)=C_i$ $(i=1,\ldots,n)$, попарно находящимися в инволюции при всех R. Компактные связные уровни $\Sigma_C=\{F_i=C_i,\ R_j=C_{n+j}\}\subset R^{2n+l}\{p,\ q,\ R\}$ будут n-мерными торами $\mathbf{T}^n$. В качестве локальных координат на них можно взять $x_i(\cdot)\equiv q_i(\cdot)$. Тогда в переменных C_k, x_i получим систему типа (2.1): $dC_k/dt=\varepsilon U_k(C,\ x,\ \varepsilon)$, $dx_i/dt=\nu_i(C,\ x)+\varepsilon u_i(C,\ x,\ \varepsilon)$, интегральный инвариант которой есть

$$\det\|\partial F/\partial p\|^{-1}dx_1\ldots dx_ndC_1\ldots dC_{n+l} \tag{3.1}$$

Эта мера тривиально индуцируется на $\Sigma_C=\mathbf{T}^n$ (или на торы меньшей размерности, если есть еще интегралы) и позволяет вычислять все средние непосредственно как функции C_k. Для дальнейшего достаточно следующего утверждения.

Лемма. Пусть H — натуральный гамильтониан вида

$$H=\frac{p_1^2}{2a}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{n}A_{ij}p_ip_j+V$$

с $n-1$ игнорируемой координатой, т.е. функции a, V, A_{ij} зависят только от q_1, R, причем $q_2,\ldots,q_n \bmod 2\pi$. Положим $C_1=H$, $W(C_2,\ldots,C_{n+l},\ q_1)=V+{}^1/_2\Sigma A_{ij}C_iC_j$. Будем считать, что $\{W(C_2,\ldots,C_{n+l},\ q_1)\leqslant C_1\}=[q_-(C),\ q_+(C)]$. Тогда

1. Плотность инвариантной меры (3.1) равна

$$\mu(q_1,C)=[a(q_1,C_{n+1},\ldots)/(2C_1-2W(q_1,C_2,\ldots))]^{1/2}$$

2. Для всякой функции $f(q_1, R)$ ее среднее есть

$$f_\Sigma=\int\limits_{q_-(C)}^{q_+(C)} f(q,C_{n+1},\ldots)\mu(q,C)\,dq\left(\int\limits_{q_-(C)}^{q_+(C)}\mu(q,C)\,dq\right)^{-1} \qquad (3.2)$$

3. Для функции вида $f(q_1, p_1, R)$ имеем $f_\Sigma\equiv0$, если она нечетная, а если она четная, то среднее вычисляется по (3.2) с помощью интеграла энергии;

4. Для функций вида $h=f(q_1,p_1,R)\cdot g(q_2,\ldots,q_n,R)$ имеем

$$h_\Sigma=\frac{f_\Sigma}{(2\pi)^{n-1}}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}g\,dq_2\ldots dq_n \qquad (3.3)$$

То обстоятельство, что $\mu\to\infty$, когда q_1 стремится к q_- или к q_+, несущественно и выражает лишь некоторую специфику используемых переменных.

Метрическая транзитивность на почти всех Σ_C следует, например, из частотной невырожденности невозмущенной системы: частоты условно-периодического движения по торам Σ_C как функции констант интегралов должны быть независимы. В рассматриваемых ниже задачах это свойство выполняется.

4. Случай Эйлера является невозмущенным для уравнений (1.3), (1.4) при $Q=S$; тогда интегралами будут $\Lambda\equiv\Lambda_S=\lambda_Q$, $T=K-Z(P)$. Пусть $\Lambda^2\neq\neq2(A,\ B,\ C)T$. Из представления Пуансо известно, что в шестимерном фазовом пространстве $\mathbf{R}^3\{\omega\}\times SO(3)$ совместные уровни $\Sigma=\{\Lambda=\mathrm{const},\ T=\mathrm{const}\}$ — двумерные торы, причем частоты условно-периодического движения имеют вид $\omega_i=\omega_i(\Lambda^2,\ T)$.

Утверждение 1. Среднее по Σ значение вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ равно

$$\boldsymbol{\omega}_\Sigma=(2T/\Lambda^2)\boldsymbol{\Lambda} \qquad (4.1)$$

Действительно, если $X(t)$ — матрица, задающая движение тела с угловой скоростью $\omega(t)$ в некоторой неподвижной системе координат, и Y — произвольный поворот вокруг вектора $\boldsymbol{\Lambda}$, то $YX(t)$ — также движение с теми же $\boldsymbol{\Lambda}$, T и угловой скоростью $Y\omega(t)$. Отсюда

$$(Y\boldsymbol{\omega})^\infty=\lim\frac{1}{T}\int\limits_0^T Y\boldsymbol{\omega}(t)\,dt=Y\lim\frac{1}{T}\int\limits_0^T\boldsymbol{\omega}(t)\,dt=Y\boldsymbol{\omega}^\infty$$

а на торах с несоизмеримыми частотами $\boldsymbol{\omega}^\infty=\boldsymbol{\omega}_\Sigma$. По непрерывности на всех торах получаем

$$Y\boldsymbol{\omega}_\Sigma=\boldsymbol{\omega}_\Sigma \qquad (4.2)$$

причем этот вектор параллелен моменту Λ.

Осталось отметить, что $(\boldsymbol{\omega}_\Sigma,\ \boldsymbol{\Lambda})=(\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\Lambda})_\Sigma=2T_\Sigma=2T$, так что $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ есть проекция $\boldsymbol{\omega}$ на $\boldsymbol{\Lambda}$ и имеет вид (4.1).

Это позволяет осреднить (1.3):

$$P^{\cdot}=2\varepsilon(K-Z(P))\Lambda^{-2}[\mathbf{\Lambda}\times N(P)] \tag{4.3}$$

Из приближенного уравнения (1.4), учитывая, что $r=0$, получим

$$\mathbf{\Lambda}^{\cdot}=\varepsilon[\mathbf{E}\times\mathbf{N}(P)]. \tag{4.4}$$

Тело со сферическим эллипсоидом инерции будем называть шаром. Заметим, что при $A=B=C$ средняя угловая скорость $\boldsymbol{\omega}^{\infty}\equiv\boldsymbol{\omega}=(2T/\Lambda^2)\mathbf{\Lambda}$, что совпадает с формулой (4.1), хотя осреднение здесь другое. Следовательно, справедлив следующий вывод.

Утверждение 2. Осредненное движение произвольного тела (4.3), (4.4) совпадает с приближенным движением (1.3), (1.4) шара с тем же радиусом опорной сферы и теми же начальными условиями Λ, T, P.

Отсюда вытекает возможность несложным преобразованием точных решений интегрируемых задач о качении шара по сфере, конусу и так далее [3] получать (с точностью до $O(\varepsilon^2)$) осредненное движение в соответствующих задачах о почти эйлеровом качении.

В таких задачах фактически возникает шар Чаплыгина: тело со сферической поверхностью и центром масс в ее центре. Задача о его качении по горизонтальной плоскости интегрируема [4]: в переменных Эйлера — Пуассона есть четыре интеграла плюс интегральный инвариант (интегрирующий множитель Якоби) и почти нет состояний равновесия. Отсюда следует, что совместные уровни интегралов являются двумерными торами [5], но при этом нет никакого аналога переменных действие — угол, доказывается лишь существование таких переменных Φ_k, $\varphi_i \bmod 2\pi$, что

$$\varphi_i^{\cdot}=\omega_i(\Phi)/f(\Phi,\ \varphi),\ \Phi_k^{\cdot}=0 \tag{4.5}$$

При возмущении этой задачи применимо только осреднение по Аносову, но соответствующая техника его еще не разработана.

Интегрируемость задачи о плоском качении делает вечным отсутствие эволюции $\mathbf{\Lambda}$ в этой ситуации. Об интегрируемости, когда опорная поверхность не является плоскостью, ничего не известно.

Добавим, что сама по себе интегрируемость неголономной системы еще не гарантирует появления инвариантных торов. Пример существования инвариантных многообразий другого топологического строения приведен в [16]. Соответствующие потоки не эргодичны, на каждом многообразии есть состояния равновесия, а все остальные фазовые траектории (кроме асимптотических) просто замкнуты.

5. В невозмущенном случае Лагранжа примем, что моменты инерции $A=B=1$, $C=1/c$ (теперь $Q\mathbf{e}$ — ось динамической симметрии). В обычных углах Эйлера угловая скорость и канонические импульсы имеют вид

$$\omega=\psi^{\cdot}\mathbf{E}+\varphi^{\cdot}\mathbf{e}+\theta^{\cdot}[\mathbf{E}\times\mathbf{e}]/\sin\theta \tag{5.1}$$

$$p_\psi=(\boldsymbol{\lambda}_Q,\ \mathbf{E}),\ p_\varphi=(\boldsymbol{\lambda}_Q,\ \mathbf{e}),\ p_\theta=(\boldsymbol{\lambda}_Q,\ [\mathbf{E}\times\mathbf{e}]/\sin\theta)$$

Интегралы движения таковы:

$$\begin{gathered}p_\psi=F,\ p_\varphi=G,\ {}^1/_2 p_\theta^{\,2}+{}^1/_2(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)^2\sin^{-2}\theta+\\ +{}^1/_2 p_\varphi^{\,2}/C+r\cos\theta=H=K-Z(P)-\varepsilon(\mathbf{N},\ \ \mathbf{E})\end{gathered} \tag{5.2}$$

Осреднять предстоит по фазовым торам Σ_{FGH}.

Утверждение 3. В случае Лагранжа $\omega_\Sigma=\Omega(F,\ G,\ H)\mathbf{E}$. Это утверждение аналогично (4.2): если $X(t)$ — движение и Y — поворот вокруг вертикали, то $YX(t)$ — также движение с теми же константами интегралов. Уравнение (1.3) теперь осредняется:

$$P^{\cdot}=\varepsilon\Omega[\mathbf{E}\times\mathbf{N}(P)] \tag{5.3}$$

Утверждение 4. В осредненном движении точка P движется по горизонтальным сечениям опорной поверхности, т. е. $Z^{\cdot}=(\mathbf{E},\ P^{\cdot})\equiv0$ (а в случае горизонтальной плоскости вообще не движется, т. е. в среднем $P^{\cdot}\equiv0$).

Чтобы вычислить скорость движения, надо осреднить $(\omega, \mathbf{E}) = \psi^{\cdot} + \varphi^{\cdot}\cos\theta = cp_\varphi + (c-1)\cos\theta p_\psi$ с помощью леммы п. 3 (применимой в силу (5.2)).

Утверждение 5. Пусть $1 < u_1 \leqslant u_2 < 1 < u_3$ — корни классического уравнения третьей степени относительно $u = \cos\theta$ (см. также [17]). Тогда

$$\Omega = G + (c-1)(\cos\theta)_\Sigma F$$

$$(\cos\theta)_\Sigma = u_3 - (u_3 - u_1)E(k)/K(k),\ k^2 = (u_2 - u_1)/(u_3 - u_1)$$

Коэффициент Ω постоянен в осредненном движении, поскольку не эволюционируют константы интегралов.

Утверждение 6. В среднем

$$F^{\cdot} = G^{\cdot} = H^{\cdot} = 0 \tag{5.4}$$

Что касается H, то это очевидно в силу сохранения полной энергии. Для F согласно (5.1) и (1.4) имеем

$$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\lambda_Q, \mathbf{E}\right) = -\varepsilon r\left(\frac{d^0}{dt}[\mathbf{N}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}]], \mathbf{E}\right) - \varepsilon r\left(\left[\frac{d^0}{dt}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{N}\right], [\mathbf{E}\times\mathbf{e}]\right) \approx$$

$$\approx \varepsilon\frac{d^0}{dt}(\ldots) - \varepsilon(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{E})\left(\frac{d^0}{dt}\mathbf{e}, \mathbf{N}\right)$$

Второе слагаемое преобразуется к виду $-\varepsilon(G + (c-1)\cos\theta F)(d^0e/dt, N)$. С учетом (2.3) согласно (3.4) и (3.3) получаем

$$(\cos\theta\mathbf{e}^{\cdot})_\Sigma = ((\cos\theta\mathbf{e})^{\cdot} - \sin\theta\theta^{\cdot}\mathbf{e})_\Sigma =$$

$$= (\sin^2\theta p_\theta\sin\psi, -\sin^2\theta p_\theta\cos\psi, -\sin\theta\cos\theta p_\theta)_\Sigma = 0$$

Для G в силу (5.1) имеем $dG/dt = (d\lambda_Q/dt, \mathbf{e}) + (\lambda_Q, [\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}])$. Второе слагаемое равно нулю, а первое по (1.4) дает

$$\frac{dG}{dt} = \varepsilon([\mathbf{E}\times\mathbf{N}], \mathbf{e}) - \varepsilon r\frac{d^0}{dt}([\mathbf{N}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}]], \mathbf{e})$$

Осталось заметить, что $\mathbf{e}_\Sigma = 0$ и применить (2.3).

6. При качении по плоскости декартовы координаты точки касания подчиняются уравнениям

$$x^{\cdot} = \varepsilon(\varphi^{\cdot}\sin\theta\sin\psi + \theta^{\cdot}\cos\psi),\quad y^{\cdot} = \varepsilon(-\varphi^{\cdot}\sin\theta\cos\psi + \theta^{\cdot}\sin\psi) \tag{6.1}$$

Выражения для кинетической и потенциальной энергии не содержат x, y, т. е. получается неголономная система Чаплыгина. Следовательно, вращение тела описывается некоторым потоком на $\mathbf{R}^3\{\omega\}\times SO(3)$, зависящим от ε. При $\varepsilon = 0$ он гамильтонов, а при $\varepsilon \neq 0$ — негамильтонов, но обратим: если $X(t) \in SO(3)$ — движение, то $X(-t)$ — также движение.

В случае Лагранжа при $\varepsilon = 0$ фазовое пространство расслаивается на инвариантные торы, движение — условно-периодическое с независимыми частотами $\omega_i(F, G, H)$. Доказательство частотной независимости см. в [17].

По теореме Мозера, обобщающей теорему Колмогорова на обратимые системы [2], условие сильной несоизмеримости, например $|k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3| \geqslant \mathrm{const}\cdot(|k_1| + |k_2| + |k_3|)^{-3}$, гарантирует, что при $\varepsilon < \varepsilon_0(\omega)$ инвариантный тор с соответствующими частотами, несколько деформировавшись, продолжает существовать в фазовом пространстве уравнений Чаплыгина рассматриваемой задачи. Однако для нее верно и более сильное утверждение: фазовое пространство целиком (в точной постановке задачи) расслоено на торы с условно-периодическим движением. Таким образом, эта задача сама должна служить основой для применения теоремы Мозера, например, когда тело мало отличается от динамически симметричного.

Задачу о качении динамически осесимметричного тела будем рассматривать в переменных θ, ψ, φ, p_θ, p_ψ, p_φ, канонических при $\varepsilon = 0$, так что при всех ε имеем

$$\theta^{\cdot}=\partial H_0/\partial p_\theta,\quad \psi^{\cdot}=\partial H_0/\partial p_\psi,\quad \varphi^{\cdot}=\partial H_0/\partial p_\varphi \tag{6.2}$$

где H_0 дается правой частью (5.2). Помимо интеграла энергии

$$H=H_0+\varepsilon H_1+\varepsilon^2 H_2 \tag{6.3}$$

$$H_1=r\cos\theta\theta^{\cdot 2}-r\sin^2\theta\psi^{\cdot}\varphi^{\cdot},\ 2H_2=\theta^{\cdot 2}+\sin^2\theta\varphi^{\cdot 2}$$

есть два интеграла, линейных по импульсам:

$$p_\psi+\Phi_1(\theta,\ \varepsilon)p_\varphi=F,\quad \Phi_2(\theta,\ \varepsilon)p_\varphi=G \tag{6.4}$$

$$\Phi_1=-\varepsilon(\cos^2\theta+c\sin^2\theta)(1+\varepsilon r\cos\theta+\Phi_2)^{-1}$$

$$\Phi_2=[1+2r\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2(\cos^2\theta+c(1-r^2)\sin^2\theta)]^{1/2}$$

При $\varepsilon=0$ получаются интегралы случая Лагранжа, а при $r=0$ — интегралы частного варианта задачи о шаре Чаплыгина. Получить (6.4) можно преобразованием формул из [3, § 243], учитывая, что в них A, C — центральные моменты инерции.

Соотношения (6.2)—(6.4) полностью описывают вращение катящегося по плоскости тела. Из (6.4) выразим $p_\varphi=G/\Phi_2$, $p_\psi=F-G\Phi_1/\Phi_2$ и подставим в (6.3) с учетом (6.2). Получим

$$^1/_2 p_\theta{}^2+W(F,\ G,\ \theta)=H,\ \theta^{\cdot}=p_\theta \tag{6.5}$$

Бифуркационная диаграмма функции W будет некоторой деформацией диаграммы случая Лагранжа [17]. Уточнение этой диаграммы интереса не представляет: ясно, что изменение θ будем иметь колебательный характер.

Утверждение 7. Совместные уровни интегралов (6.3), (6.4) есть трехмерные торы в фазовом пространстве. Более того, существуют такие фазовые переменные (типа действие — угол) ρ_i, $\sigma_i \bmod 2\pi$, что **уравнения** движения приводятся к виду

$$\rho_i^{\cdot}=0,\quad \sigma_i^{\cdot}=\Omega_i(\rho) \tag{6.6}$$

Для доказательства введем настоящие переменные действие — угол ρ_1, σ_1 в гамильтоновой системе (6.5) и положим $\rho_2=F$, $\rho_3=G$. Тогда $p_\theta=p_\theta(\rho,\sigma_1)$, $\theta=\theta(\rho,\sigma_1)$, $\sigma_1^{\cdot}=\Omega_1(\rho)$, $\rho^{\cdot}=0$. Подстановка в (6.2) дает

$$\psi^{\cdot}=\Psi(\rho,\sigma_1)=\Omega_2(\rho)+\Psi_*(\rho,\sigma_1),\qquad \Omega_2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi\,d\sigma_1$$

$$\varphi^{\cdot}=\Phi(\rho,\sigma_1)=\Omega_3(\rho)+\Phi_*(\rho,\sigma_1),\qquad \Omega_3=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\,d\sigma_2$$

Поскольку Φ^*, Ψ^* имеют нулевые средние значения, переменные

$$\sigma_2=\psi-\frac{1}{\Omega_1(\rho)}\int_0^{\sigma_1}\Psi_*(\rho,\chi)\,d\chi,\qquad \sigma_3=\varphi-\frac{1}{\Omega_2(\rho)}\int_0^{\sigma_1}\Phi_*(\rho,\chi)\,d\chi$$

определены корректно (2π-периодичны по σ_1) и, очевидно, **являются** искомыми.

Из (6.6) следует, что в задаче имеется интегральный инвариант $d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3=dp_\theta dp_\psi dp_\varphi d\theta d\psi d\varphi$ (иначе говоря, плотность инвариантной меры в тех и других переменных равна единице). Поскольку интегральный инвариант такой же, как и в случае Лагранжа, и несмотря на негамильтоновость задачи, для осреднения можно по-прежнему применять формулы (3.2)—(3.4). Соответствующее обобщение леммы п. 3 проходит в силу (6.2) и (6.5). Равным образом частоты Ω_2, Ω_3 можно вычислить непосредственно как функции F, G, H, осредняя $\psi^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, как это уже делалось в [17]. Однако использование рассматриваемой задачи в качестве невозмущенной сопряжено с потенциально более громоздкими выкладками, нежели использование случая Лагранжа.

Утверждение 8 (усиление утверждения 4). Пусть $\Omega_2 \neq n\Omega_1$. Тогда движение точки соприкосновения представимо как перемещение с периодом $2\pi/\Omega_1$ по некоторой замкнутой кривой, в свою очередь вращающейся как твердое тело с угловой скоростью Ω_2.

Такое же свойство установлено в [13] для задачи о диске на льду. В этой задаче аналогично утверждению 7 можно показать, что почти все фазовое пространство расслаивается на четырехмерные торы. Сами торы, хотя и компактны, могут быть весьма протяженными. Размеры их проекций на многообразие положений стремятся к бесконечности, если начальные условия выбирать вблизи равномерного движения вдоль прямой в вертикальном положении диска.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аносов Д. В.* Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24. № 5. С. 721–742.
2. *Мозер Ю.* О разложении условно-периодических решений в сходящиеся степенные ряды // Успехи мат. наук (УМН). 1969. Т. 24. Вып. 2. С. 136–211.
3. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука. 1983. 544 с.
4. *Чаплыгин С. А.* Исследования по динамике неголономных систем. М.; Л.: Гостехиздат. 1949. 112 с.
5. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. совр. проблемы математики. Т. 3. М.: ВИНИТИ. 1985. 304 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. 503 с.
7. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ. 1971. 507 с.
8. *Черноусько Ф. Л.* О движении спутника относительно масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474–483.
9. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 771–778.
10. *Нейштадт А. И.* Об эволюции вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 30–36.
11. *Маркеев А. П.* О качестве эллипсоида по горизонтальной плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 2. С. 53–62.
12. *Маркеев А. П.* О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 575–582.
13. *Козлов В. В., Колесников Н. Н.* О теоремах динамики // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 28–33.
14. *Татаринов Я. В.* Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1974. № 6. С. 99–105.
15. *Козлова З. П.* Средние значения реакций в задаче о быстром вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Математические вопросы нелинейного анализа и управления динамическими системами. М.: Изд-во МГУ. 1985. С. 62–70.
16. *Татаринов Я. В.* Построение компактных многообразий, отличных от торов, в одной интегрируемой неголономной задаче // Успехи мат. наук (УМН). 1985. Т. 41. Вып. 3. С. 216.
17. *Татаринов Я. В.* Частотная невырожденность волчка Лагранжа и уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 4. С. 30–36.

Москва

Поступила в редакцию
18.III.1986
