

УДК 531.36

## О ЧАСТОТАХ ДВИЖЕНИЯ ЭЙЛЕРА — ПУАНСО

САДОВ Ю. А.

Для частот прецессии и собственного вращения движения Эйлера — Пуансо, а также для их отношения приводятся следующие свойства: частные значения при предельных значениях параметров, границы изменения, монотонность по переменной, нумерующей полудии рассматриваемого движения, формулы преобразования при изменении одного из параметров. Для обоснования одного из этих свойств доказывается теорема, определяющая достаточные условия монотонности по параметру взвешенного среднего от функции, когда от параметра зависит вес.

**1. Основные определения и формулы.** К числу относительно мало исследованных свойств движения Эйлера — Пуансо относятся свойства его основных частот — частоты прецессии  $Q_1$  и частоты собственного вращения  $Q_2$ . Эти частоты представляют собой вековые составляющие скоростей изменения соответствующих эйлеровых углов — прецессии и собственного вращения, которые для заданного тела и фиксированной инерциальной системы координат определяются неоднозначно, порождая тем самым неоднозначность определения  $Q_1$  и  $Q_2$ . Указанная неоднозначность связана с возможностью выбора в качестве оси  $Oz$  связанной системы координат, угловое расстояние которой от вектора кинетического момента обозначено как угол нутации, главной оси инерции тела с наибольшим или наименьшим моментом инерции.

Изучаемые в данной статье частоты  $Q_1$ ,  $Q_2$  задаются выбором в качестве оси  $Oz$  той из главных осей инерции тела, которая расположена внутри полудии рассматриваемого движения Эйлера — Пуансо. Согласно обозначениям и формулам [1, 2]<sup>1</sup> при этом

$$Q_1 = (G/C) \{1 - (A-C) \Pi(\kappa^2, \lambda) [AK(\lambda)]^{-1}\} \quad (1.1)$$

$$Q_2 = \pi \kappa (A-C) G [2ACK(\lambda)]^{-1} [(1+\kappa^2)(\kappa^2+\lambda^2)]^{-1/2}$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — главные центральные моменты инерции тела, причем  $B$  — средний по величине момент инерции, а  $C$  — момент инерции относительно оси  $Oz$ ,  $G$  — кинетический момент тела,  $K$  и  $\Pi$  — полные эллиптические интегралы первого и третьего родов. Положительные параметры  $\kappa$  и  $\lambda$  задаются формулами  $\kappa^2 = C(A-B)/[A(B-C)]$ ,  $\lambda^2 = \kappa^2(G^2 - 2CT)/(2AT - G^2)$ , так что  $\kappa$  определяется моментами инерции тела, а  $\lambda$  зависит также от интегралов движения: кинетического момента  $G$  и кинетической энергии  $T$ . При указанном выше выборе осей и обозначении моментов инерции  $0 \leq \lambda < 1$ .

Здесь изучаются некоторые свойства частот  $Q_1$  и  $Q_2$  и их отношения  $Q_1/Q_2$  как функций от  $\lambda$ . Определенные трудности при этом вызываются не только относительной сложностью выражений (1.1), но и зависимостью их от нескольких параметров. Вводя вместо  $Q_1$  и  $Q_2$  безразмерные частоты  $Q_1^\circ = BQ_1/G$ ,  $Q_2^\circ = BQ_2/G$ , находим, что  $Q_1^\circ$  и  $Q_2^\circ$  зависят, кроме  $\kappa$  и  $\lambda$ , еще только от одного безразмерного параметра, в качестве которого

<sup>1</sup> См. также: Садов Ю. А. Переменные действие — угол в задаче Эйлера — Пуансо: Препринт № 22. М.: ИПМ АН СССР. 1970.

будем выбирать  $\xi = B(A-C)/(AC)$ , и при этом

$$Q_1^\circ(\xi, \kappa, \lambda) = 1 - \xi [\Pi(\kappa^2, \lambda)/\mathbf{K}(\lambda) - (1 + \kappa^2)^{-1}] \quad (1.2)$$

$$Q_2^\circ(\xi, \kappa, \lambda) = \frac{\pi}{2\mathbf{K}(\lambda)} \frac{\xi \kappa}{\sqrt{(1 + \kappa^2)(\kappa^2 + \lambda^2)}} \quad (1.3)$$

В некоторых случаях удобнее использовать для представления тех же самых величин не параметры  $\kappa, \xi$ , а безразмерные моменты инерции  $a = A/B, c = C/B$ . Зависимость  $Q_k^\circ$  от этих параметров будем обозначать как  $\Omega_k(a, c, \lambda) = Q_k^\circ(\xi(a, c), \kappa(a, c), \lambda)$  ( $k=1, 2$ ).

**2. Частота собственного вращения.** Выражение (1.3) позволяет почти непосредственно увидеть следующие свойства частоты собственного вращения  $Q_2^\circ$ :

$$2.1. Q_2^\circ(\xi, \kappa, 0) = \xi(1 + \kappa^2)^{-1/2} = \text{sign}(a - c) [(a - c)(1 - c)/a]^{1/2} c^{-1} = \Omega_2(a, c, 0)$$

$$2.2. Q_2^\circ(\xi, \kappa, 1) = 0$$

$$2.3. |Q_2^\circ| \text{ монотонно убывает по } \lambda \text{ при } 0 < \lambda < 1$$

$$2.4. 0 \leq Q_2^\circ < \Omega_2(1, 0, 0) = \infty \quad (a > c) \\ 0 \geq Q_2^\circ \geq \lim_{a \rightarrow 0} \Omega_2(a, 1 + a, 0) = -1 \quad (a < c)$$

$$2.5. Q_2^\circ(\xi, \lambda/\kappa, \lambda) = Q_2^\circ(\xi, \kappa, \lambda)$$

Поясним здесь лишь вывод свойства 2.4, определяющего абсолютные границы изменения  $Q_2^\circ$ . При его доказательстве нужно учесть, что вследствие монотонности  $Q_2^\circ$  экстремальные значения этой функции даются свойствами 2.1, 2.2, а при вычислении границ изменения  $\Omega_2(a, c, 0)$  следует принять во внимание физические ограничения на безразмерные моменты инерции  $a$  и  $c$ , в силу которых

$$0 \leq a - 1 \leq c \leq 1 \leq a \leq 1 + c \leq 2 \quad (a \geq c) \quad (2.1)$$

$$0 \leq c - 1 \leq a \leq 1 \leq c \leq 1 + a \leq 2 \quad (a \leq c)$$

**3. Частота прецессии.** Для частоты  $Q_1^\circ$  можно указать по аналогии с  $Q_2^\circ$  следующие свойства:

$$3.1. Q_1^\circ(\xi, \kappa, 0) = c^{-1} - Q_2^\circ(\xi, \kappa, 0) = \Omega_1(a, c, 0)$$

$$3.2. Q_1^\circ(\xi, \kappa, 1) = 1$$

3.3.  $Q_1^\circ$  монотонно возрастает по  $\lambda$  при  $a > c$  и монотонно убывает при  $a < c$

$$3.4. 2(\sqrt{2} - 1) = \Omega_1(1 + \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) \leq Q_1^\circ \leq 1 \quad (a > c)$$

$$1 \leq Q_1^\circ \leq \lim_{a \rightarrow 0} \Omega_1(a, 1 + a, 0) = 2 \quad (a < c)$$

$$3.5. Q_1^\circ(\xi, \lambda/\kappa, \lambda) = 2 - Q_1^\circ(\xi, \kappa, \lambda) - Q_2^\circ(\xi, \kappa, \lambda) + \xi \kappa^2 (1 - \lambda^2) [(1 + \kappa^2)(\kappa^2 + \lambda^2)]^{-1}$$

Получить эти свойства непосредственно из формулы (1.2) сложно. Воспользуемся для этой цели соотношением  $2GQ_1 + JQ_2 = 2T$ , где  $J$  — одно из действий (наряду с  $G$ ) в переменных действие — угол. Для безразмерных частот отсюда находим  $Q_1^\circ = 2T^\circ - VQ_2^\circ$ , где

$$2T^\circ(\xi, \kappa, \lambda) = 2BT/G^2 = 1 + \xi \kappa^2 (1 - \lambda^2) [(1 + \kappa^2)(\kappa^2 + \lambda^2)]^{-1} \quad (3.1)$$

а функция  $V(\kappa, \lambda) = J/G$  обладает следующими свойствами:

$$V(\kappa, 0) = 1, \quad V(\kappa, 1) = (2/\pi) \text{arctg } \kappa \quad (3.2)$$

$$V(\lambda/\kappa, \lambda) = 1 - V(\kappa, \lambda) + (2\mathbf{K}(\lambda)/\pi) \kappa (1 - \lambda^2) [(1 + \kappa^2)(\kappa^2 + \lambda^2)]^{-1/2}$$

Из последнего равенства с учетом свойства 2.5 имеем

$$V(\lambda/\kappa, \lambda) Q_2^\circ(\xi, \lambda/\kappa, \lambda) = Q_2^\circ(\xi, \kappa, \lambda) - V(\kappa, \lambda) Q_2^\circ(\xi, \kappa, \lambda) + \xi \kappa^2 (1 - \lambda^2) [(1 + \kappa^2)(\kappa^2 + \lambda^2)]^{-1} \quad (3.3)$$

<sup>2</sup> Садов Ю. А. Использование переменных действие — угол в задачах возмущенного движения твердого тела относительно центра масс: Препринт № 33. М.: ИПМ АН СССР. 1984.

Свойства 3.1, 3.2, 3.5 непосредственно следуют из (3.2), (3.3) и равенств  $2T^\circ(\xi, \kappa, 0) = c^{-1}$ ,  $T^\circ(\xi, \lambda/\kappa, \lambda) = T^\circ(\xi, \kappa, \lambda)$ , которые можно получить из (3.1).

Для доказательства свойства 3.3 запишем более подробно выражение для  $Q_1^\circ$  из (1.2):

$$Q_1^\circ = \frac{1}{c} - \xi \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 + \kappa^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \right]^{-1} \quad (3.4)$$

и воспользуемся следующей теоремой, которая доказывается в п. 5.

*Теорема о монотонности средних.* Пусть

$$F(\lambda) = \int_r^s f(x) g(x, \lambda) dx \left[ \int_r^s g(x, \lambda) dx \right]^{-1}$$

где  $g(x, \lambda) > 0$  при  $x \in (r, s)$ ,  $\lambda \in I \subset R$  и  $f(x)$  монотонно возрастает (убывает) на  $(r, s)$ . Тогда  $F(\lambda)$  монотонно возрастает на  $I$ , если все функции  $g(x, \lambda_2)/g(x, \lambda_1)$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in I$  при  $\lambda_1 < \lambda_2$  монотонно возрастают (убывают) по  $x$  на  $(r, s)$ ;  $F(\lambda)$  монотонно убывает на  $I$ , если направление монотонности функций указанного семейства противоположно.

Эта теорема непосредственно применима к интегральной части выражения (3.4), если положить  $f(x) = (1 + \kappa^2 \sin^2 x)^{-1}$ ,  $g(x, \lambda) = (1 - \lambda^2 \sin^2 x)^{-1/2}$ . Функция  $f(x)$  монотонно убывает при  $x \in (0, \pi/2)$ , а функции  $g(x, \lambda_2)/g(x, \lambda_1)$  при  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$  монотонно возрастают на этом интервале, что видно из следующего представления:

$$\left[ \frac{g(x, \lambda_2)}{g(x, \lambda_1)} \right]^2 = \frac{1 - \lambda_1^2 \sin^2 x}{1 - \lambda_2^2 \sin^2 x} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2^2 (1 - \lambda_2^2 \sin^2 x)}$$

Поэтому, согласно приведенной теореме, отношение интегралов в правой части формулы (3.4) — монотонно убывающая функция параметра  $\lambda$ , откуда и следует свойство 3.3.

Доказательство свойства 3.4 проведем для случая  $a > c$  ( $\xi > 0$ ). При этом максимальное значение  $Q_1^\circ$ , как следует из монотонности этой функции, достигается при  $\lambda = 1$  и равно единице согласно 3.2. Минимум  $Q_1^\circ$  при данных  $a$  и  $c$ , согласно 2.1, 3.1, равен  $\Omega_1(a, c, 0) = \{1 - [(a-c)/(1+c)]^{1/2}\} c^{-1}$ .

Минимальное значение этой величины при фиксированном  $c$  и соблюдении верхних неравенств (2.1) получается при  $a = 1 + c$ , поэтому

$$Q_1^\circ \geq \Omega_1(a, c, 0) \geq \Omega_1(1+c, c, 0) = \{1 - [(1-c)/(1+c)]^{1/2}\} c^{-1}$$

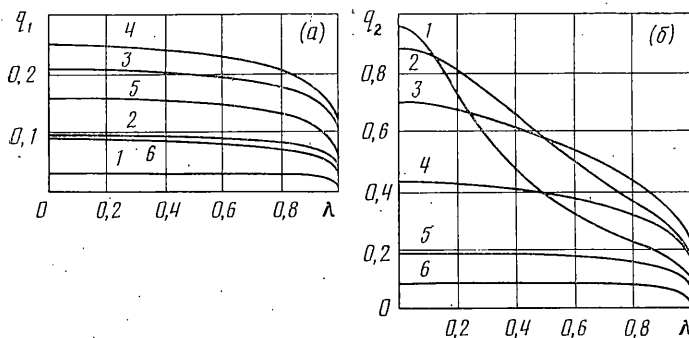
Наконец, вычисление минимума по  $c$  выражения в правой части дает  $\min Q_1^\circ = 2(\sqrt{2} - 1) = 0,8284$  при  $c = \sqrt{2}/2$ ,  $a = 1 + \sqrt{2}/2$ . Отсюда следует первая половина свойства 3.4. Вторая его половина проверяется аналогично.

Таким образом, при всех значениях параметров  $a, c, \lambda$  или  $\xi, \kappa, \lambda$  безразмерная частота прецессии  $Q_1^\circ$  изменяется в ограниченных пределах, а при  $a \geq c$ , когда ось  $Oz$  совпадает с осью наименьшего момента инерции, эта частота вообще меняется не больше чем на 18%.

Наглядное представление о зависимости частот  $Q_1^\circ$  и  $Q_2^\circ$  от определяющих их параметров дает фигура, где изображены графики зависимости от  $\lambda$  приведенных частот  $q_1(\kappa, \lambda)$ ,  $q_2(\kappa, \lambda)$ , таких, что  $Q_1^\circ(\xi, \kappa, \lambda) = 1 - \xi q_1(\kappa, \lambda)$ ,  $Q_2^\circ(\xi, \kappa, \lambda) = \xi q_2(\kappa, \lambda)$ . Каждая кривая отвечает определенному значению параметра  $\kappa$  с таким соответствием номеров кривых и значений  $\kappa$ : 1 — 0,25; 2 — 0,5; 3 — 1,0; 4 — 2,0; 5 — 5,0; 6 — 10,0.

Можно показать, что  $0 \leq q_1(\kappa, \lambda) \leq 0,25$ ,  $0 \leq q_2(\kappa, \lambda) \leq 1$ . При сравнении данных фигуры с результатами анализа границ изменения частот  $Q_1^\circ, Q_2^\circ$  (свойства 2.4, 3.4) надо учитывать, что в силу физических ограничений на моменты инерции величина  $\xi$  при заданном  $\kappa$  изменяется в пределах

$$-\frac{1 + \kappa^2}{1 + \sqrt{1 + \kappa^2}} \leq \xi \leq \frac{1 + \kappa^2}{\kappa(\kappa + \sqrt{1 + \kappa^2})}$$



**4. Отношение частот.** Для отношения частот  $Q_1/Q_2$  из выражений (1.2), (1.3) можно получить

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{2}{\pi} \frac{a}{a-c} \frac{\sqrt{(1+\kappa^2)(\kappa^2+\lambda^2)}}{\kappa} \int_0^{\pi/2} \frac{\left(\frac{c}{a} + \kappa^2 \sin^2 \varphi\right) d\varphi}{(1+\kappa^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4.1)$$

Отсюда выводятся следующие свойства  $Q_1/Q_2$ :

- 4.1.  $Q_1/Q_2 > 0$  ( $a > c$ ),  $Q_1/Q_2 < 0$  ( $a < c$ )
- 4.2.  $Q_1/Q_2 = -1 + \text{sign}(a-c) [(a-c)(1-c)/a]^{-1/2}$  ( $\lambda=0$ )
- 4.3.  $Q_1/Q_2 \rightarrow \infty$  ( $\lambda \rightarrow 1$ )
- 4.4.  $|Q_1/Q_2|$  — монотонно возрастающая функция  $\lambda$ .

Для случая  $a > c$  указанные свойства найдены в [3]. Свойства 4.1–4.3 следуют также из приведенных выше свойств  $Q_1^\circ$  и  $Q_2^\circ$ .

Отношения частот важны, в частности, для изучения резонансных свойств возмущенных систем (см., например, [4]). При этом существенно знать границы изменения  $Q_1/Q_2$  как для данного тела, так и абсолютные. Как следует из 4.3, модуль этого отношения сверху не ограничен, а для нижней его границы с учетом 4.1–4.4 находим

$$Q_1/Q_2 \geq -1 + [(a-c)(1-c)/a]^{-1/2} \geq 0 \quad (a > c)$$

$$Q_1/Q_2 \leq -1 - [(c-a)(c-1)/a]^{-1/2} \leq -2 \quad (a < c)$$

Таким образом, если ось  $Oz$  является осью наибольшего момента инерции, то частота прецессии по модулю не менее чем в два раза превышает частоту собственного вращения.

Приведенные выше результаты относятся к случаю  $\lambda < 1$ , когда ось  $Oz$  лежит внутри полости движения Эйлера – Пуансо. Можно вычислить частоты  $Q_1$ ,  $Q_2$  и для  $\lambda > 1$  [2] и провести аналогичное исследование. Можно поступить и иначе — перейти к другой связанной системе координат, направив ось  $Oz$  по главной оси инерции тела с моментом инерции  $A$ . Изменяя обозначения моментов инерции:  $A=C'$ ,  $C=A'$ , приходим к изученному здесь случаю и вычисляем по формулам (1.2), (1.3) частоты  $Q_1'$ ,  $Q_2'$ . При этом безразмерные параметры  $\zeta'$ ,  $\kappa'$ ,  $\lambda'$  связаны с исходными соотношениями  $\zeta' = -\zeta$ ,  $\kappa' = \kappa^{-1}$ ,  $\lambda' = \lambda^{-1}$ . Используя соответствующие формулы преобразования, можно показать, что частоты  $Q_1'$ ,  $Q_2'$  не совпадают с исходными частотами  $Q_1$ ,  $Q_2$  и получаются из них по формулам  $Q_1' = Q_1 + Q_2$ ,  $Q_2' = -Q_2$ .

Легко проверить, что такой же вид имеет и обратное преобразование от частот  $Q_1'$ ,  $Q_2'$  к  $Q_1$ ,  $Q_2$ , т. е. указанное преобразование инволютивно. Отмеченное несовпадение частот, вычисленных в разных системах координат, является одним из проявлений возможной неоднозначности определения частот вращения в многочастотных системах. С неоднозначностью определения частот движения Эйлера – Пуансо связаны и некоторые проблемы их аналитического выражения, обсуждаемые для частоты прецессии в [5].

**5. Доказательство теоремы о монотонности средних.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2 \in I$ ,  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Тогда при предположениях теоремы знак разности  $F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$  совпадает со знаком выражения

$$\begin{aligned}
P(\lambda_1, \lambda_2) &= \int_r^s f(x) g(x, \lambda_2) dx \int_r^s g(x, \lambda_1) dx - \\
&- \int_r^s f(x) g(x, \lambda_1) dx \int_r^s g(x, \lambda_2) dx = \int_r^s f(x) g(x, \lambda_2) dx \int_r^s g(y, \lambda_1) dy - \\
&- \int_r^s f(y) g(y, \lambda_1) dy \int_r^s g(x, \lambda_2) dx = \int_r^s \int_r^s [f(x) - f(y)] g(x, \lambda_2) g(y, \lambda_1) dx dy
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Изменение обозначений переменных интегрирования дает

$$P(\lambda_1, \lambda_2) = \int_r^s \int_r^s [f(y) - f(x)] g(x, \lambda_1) g(y, \lambda_2) dx dy \tag{5.2}$$

Наконец, сложением (5.1) и (5.2) получаем

$$\begin{aligned}
2P(\lambda_1, \lambda_2) &= \int_r^s \int_r^s [f(x) - f(y)] [g(x, \lambda_2) g(y, \lambda_1) - g(x, \lambda_1) g(y, \lambda_2)] dx dy = \\
&= \int_r^s \int_r^s [f(x) - f(y)] \left[ \frac{g(x, \lambda_2)}{g(x, \lambda_1)} - \frac{g(y, \lambda_2)}{g(y, \lambda_1)} \right] g(x, \lambda_1) g(y, \lambda_1) dx dy \tag{5.3}
\end{aligned}$$

Так как  $g(x, \lambda) > 0$ , то из (5.3) следует, что  $P(\lambda_1, \lambda_2) > 0$ , если  $f(x)$  и  $g(x, \lambda_2)/g(x, \lambda_1)$  монотонны в одном и том же направлении как функции от  $x$  на  $(r, s)$ , и  $P(\lambda_1, \lambda_2) < 0$ , если указанные функции монотонны в разных направлениях. Утверждение теоремы получается отсюда как следствие, если сформулированные условия удовлетворяются для всех  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 < \lambda_2$ ) из рассматриваемого интервала  $I$  значений  $\lambda$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Садов Ю. А. Переменные действие – угол в задаче Эйлера – Пуансо // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 962–964.
2. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука. 1977. 328 с.
3. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ. 1980. 230 с.
4. Садов Ю. А. Быстрое вращение спутника с магнитным демпфером. 4. Диссипативная эволюция. Резонансные эффекты // Космич. исследования. 1986. Т. 24. № 4. С. 553–563.
5. Пивоваров М. Л. О вековой и периодической части прецессии в задаче Эйлера – Пуансо // Определение движения космических аппаратов. М.: Наука. 1975. С. 107–110.

Москва

Поступила в редакцию  
24.VII.1986