

УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК С ВЫРЕЗАМИ

ДМИТРИЕВ В. Г., ПРЕОБРАЖЕНСКИЙ И. Н.

В оболочечные конструкции часто вносятся вырезы различной формы по конструктивным либо технологическим соображениям. Обзор литературы [1–5], посвященный исследованию напряженно-деформированного состояния оболочек с вырезами как тел конечных размеров, показывает, что имеющиеся результаты не охватывают многие важные в практическом отношении задачи. Значительные трудности возникают при численной реализации решений исходных дифференциальных уравнений, при этом применение большинства известных численных методов связано с существенными затратами машинного времени [6]. Учет нелинейных членов в постановочной части задачи имеет важное значение, поскольку современные требования, предъявляемые к весовым и прочностным характеристикам оболочек, вызывают необходимость повышения точности расчетов. Для оболочек с вырезами это обуславливается также тем, что даже при относительно невысоких уровнях нагружения (в докритической для всей конструкции области) перемещения в районе выреза могут достигать нескольких и более толщин [7–9]. При этом результаты, полученные на основе линейных соотношений теории оболочек, плохо согласуются с экспериментальными данными [8].

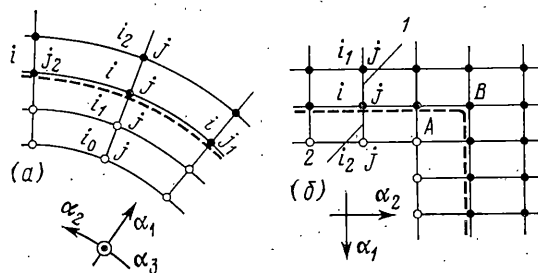
В публикуемой работе излагается численный метод, позволяющий решать широкий круг задач о напряженно-деформированном состоянии оболочек с вырезами, а также приводятся результаты некоторых исследований.

1. Рассматривается упругая ортотропная оболочка переменной толщины $h=f(\alpha_1, \alpha_2)$, где α_i — гауссовы криволинейные координаты срединной поверхности оболочки, принятой в качестве координатной. Исходные дифференциальные соотношения, основывающиеся в зависимости от постановки задачи на гипотезах Кирхгофа — Лява или Тимошенко, приняты в форме [10, 11]. Это позволяет исследовать деформирование оболочек, изготовленных не только из традиционных конструкционных материалов, но и из композиционных материалов. Геометрическая нелинейность учитывается в квадратичном приближении. Оболочка содержит один или, в общем случае, несколько подкрепленных вырезов различной формы. Предполагается, что края вырезов совпадают с линиями главных кривизн оболочки. В качестве силового воздействия рассматривается система неосесимметричных краевых и поверхностных нагрузок общего или локального характера. На внешнем и внутренних контурах (контурах вырезов) оболочки рассматриваются различные варианты граничных условий.

При численном решении задачи построение разностной схемы по пространственным переменным осуществляется методом конечных разностей. На плоскости главных координат оболочки вводится равномерная ортогональная сетка, совпадающая с сеткой, образованной линиями главных кривизн оболочки. Используется простая сетка, в узлах которой определяются все компоненты обобщенных перемещений u_i ($i=1, 2, 3$ — для схемы Кирхгофа — Лява, $i=1, 2, \dots, 5$ — для схемы Тимошенко); поскольку применение скрещивающейся (пересекающейся) сетки, обладающей несколько более лучшей сходимостью [12, 13], создает трудности вычислительного характера при удовлетворении граничным условиям типа свободного края на контуре выреза.

Частные производные в исходных дифференциальных уравнениях аппроксимируются центральными конечными разностями.

Рассмотрим вычислительный алгоритм удовлетворения граничным условиям на краях вырезов при использовании схемы Кирхгофа — Лява для



Фиг. 1

следующих двух случаев: контур выреза гладкий (фиг. 1, а); вырез содержит угловую точку (фиг. 1, б). Усилия и моменты в ортотропной оболочке представим в виде

$$T_{11} = B_{11}E_{11} + B_{12}E_{22} \quad (1 \rightleftharpoons 2), \quad S = B_{33}E_{12} \quad (1.1)$$

$$M_{11} = D_{11}K_{11} + D_{12}K_{22} \quad (1 \rightleftharpoons 2), \quad H = 2D_{33}K_{12}$$

$$B_{11} = E_1 h / (1 - \nu_1 \nu_2), \quad B_{12} = \nu_2 B_{11}$$

$$D_{11} = B_{11} h^2 / 12, \quad D_{12} = \nu_2 D_{11} \quad (1 \rightleftharpoons 2)$$

$$B_{33} = Gh, \quad D_{33} = Gh^3 / 12, \quad E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1$$

где E_i , ν_i — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, E_{11} , E_{22} , E_{12} , K_{11} , K_{22} , K_{12} — компоненты тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности оболочки. Перерезывающие силы Q_{11} , Q_{12} определяются из уравнений равновесия [10].

Граничные условия типа свободного края на краях вырезов $\alpha_i = \text{const}$ ($i=1, 2$) записываются следующим образом:

$$T_{11} = T_{11}^*, \quad S + 2k_2 H = T_{12}^* \quad (1.2)$$

$$M_{11} = M_{11}^*, \quad Q_{11} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial H}{\partial \alpha_2} = Q_{11}^* \quad (1 \rightleftharpoons 2)$$

где k_1 , k_2 , A_1 , A_2 — кривизны и параметры Ламе. Звездочками в (1.2) помечены заданные крайевые нагрузки.

Обычно при использовании метода конечных разностей граничные условия удовлетворяются введением фиктивных (законтурных) узловых точек (светлые точки на фиг. 1). Значения перемещений в этих точках необходимы для вычисления разностных аналогов уравнений равновесия [10] в узловых точках линий сетки, совпадающих с краями вырезов. Пусть для первого случая край выреза совпадает с координатной линией $\alpha_1 = \text{const}$. Рассмотрим узловую точку (i, j) по координатным направлениям α_1 , α_2 и введем обозначения $i_0 = i - 2$, $i_1 = i - 1$, $i_2 = i + 1$; $j_1 = j - 1$, $j_2 = j + 1$. Записав граничные условия для контура выреза в конечно-разностной форме, находим перемещения в законтурной точке (i_1, j) . Первоначально вычисляются прогибы $u_3(i_1, j)$:

$$M_{11}^* = D_{11} \left[\frac{1}{A_1} \left(-\frac{1}{A_1} \frac{u_3(i_2, j) - 2u_3(i, j) + u_3(i_1, j)}{\Delta \alpha_1^2} + \dots \right) + \dots \right] + \quad (1.3)$$

$$+ D_{22} \left[\dots + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(-\frac{1}{A_1} \frac{u_3(i_2, j) - u_3(i_1, j)}{2\Delta \alpha_1} + \dots \right) \right]$$

где $\Delta \alpha_1$ — параметр разностной сетки. При вычислении производной $du_3/d\alpha_1$, входящей в выражение для K_{11} , используется линейная экстраполяция для перемещения u_3 . Поскольку вклад этого слагаемого в величину изгибной деформации невелик, то такая операция не приводит к существенным погрешностям вычислений.

Далее определяются перемещения $u_1(i_1, j)$ и $u_2(i_1, j)$ из граничных условий для нормальной и касательной к контуру выреза сил:

$$T_{11}^* = B_{11} \left(\frac{1}{A_1} \frac{u_1(i_2, j) - u_1(i_1, j)}{2\Delta\alpha_1} + \dots \right) + \dots \quad (1.4)$$

$$T_{12}^* = B_{33} \left(\frac{1}{A_1} \frac{u_2(i_2, j) - u_2(i_1, j)}{2\Delta\alpha_1} - \dots \right) +$$

$$+ 4k_2 D_{33} \left[\dots + k_2 \left(\frac{1}{A_1} \frac{u_2(i_2, j) - u_2(i_1, j)}{2\Delta\alpha_1} - \dots \right) \right]$$

В формулах (1.3)–(1.4) выписаны только члены, содержащие искомые перемещения в законтурных точках. Для вычисления законтурного значения перерезывающей силы Q_{11} (в точке, лежащей посередине между узлами (i_1, j) и (i, j)) используется второй ряд (i_0, j) законтурных узлов для прогибов u_3 (фиг. 1, а). Значения прогибов $u_3(i_0, j)$ определяются при совместном использовании условия для Q_{11}^* и формулы для перерезывающей силы Q_{11} в [10].

При исследовании оболочек с вырезами, содержащими углы (точка B на фиг. 1, б), использование законтурных точек создает трудности, связанные с постановкой однозначных граничных условий для законтурной угловой точки (точка A на фиг. 1, б). Одним из приемов, позволяющих получать устойчивые численные алгоритмы, является вариант удовлетворения граничных условий без использования законтурных узловых точек.

Рассмотрим край выреза $\alpha_1 = \text{const}$ (фиг. 1, б). Для вычисления разностных аналогов уравнений равновесия в узловых точках контура выреза (например, в точке (i, j)) необходимо знать значения силовых факторов на самом контуре выреза, а также во «внутренней» точке 1 и «внешней» точке 2 (лежащих соответственно посередине между узлами (i_1, j) , (i, j) и (i, j) , (i_2, j)). Законтурные значения силовых факторов определяются следующим образом.

Пусть F^* — заданное краевое значение некоторой переменной в точке (i, j) , F_1 — значение этой же переменной в точке 1 (вычисленное через перемещения во внутренних узловых точках и точках контура выреза) и F_2 — значение переменной в точке 2. Используя центральные конечные разности, можно записать $F^* = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$, $F_2 = 2F^* - F_1$. Данная операция выполняется в пределах шага разностной сетки, что не приводит к снижению порядка аппроксимации. Усилия T_{11} , S , Q_{11} и моменты M_{11} , H в точках контура выреза полагаются равными заданным. Для вычисления крайевых значений T_{22} и M_{22} рассмотрим следующую систему:

$$T_{11}^* = B_{11}(E_{11} + \nu_2 E_{22}), \quad M_{11}^* = D_{11}(K_{11} + \nu_2 K_{22}) \quad (1.5)$$

$$T_{22} = B_{22}(E_{22} + \nu_1 E_{11}), \quad M_{22} = D_{22}(K_{22} + \nu_1 K_{11})$$

Поскольку законтурные значения перемещений необходимы только для вычисления компонентов деформации E_{11} и K_{11} , то, выразив их из первых двух уравнений (1.5), получаем

$$T_{22} = B_{22}[E_{22}(1 - \nu_1 \nu_2) + T_{11}^* \nu_1 / B_{11}] \quad (1.6)$$

$$M_{22} = D_{22}[K_{22}(1 - \nu_1 \nu_2) + M_{11}^* \nu_1 / D_{11}]$$

При этом для определения величины угла поворота $\theta_i(i, j)$, входящего в выражение для K_{22} , используется левая разностная производная.

Аналогично удовлетворяются граничные условия на крае выреза $\alpha_2 = \text{const}$, а также на внешнем контуре оболочки. Таким же образом строится вычислительный алгоритм удовлетворения граничных условий на краях вырезов и при использовании соотношений теории оболочек типа Тимошенко.

2. Для решения полученной системы нелинейных конечно-разностных уравнений используется метод установления [13–16]. Переход к нестационарной задаче осуществляется заменой уравнений равновесия на урав-

нения, совпадающие по форме с уравнениями движения оболочки в вязкой среде. Представим уравнения равновесия [10, 11] в виде $L_k=0$, где $k=1, 2, 3$ для схемы Кирхгофа — Лява и $k=1, \dots, 5$ для схемы Тимошенко. При использовании метода конечных разностей в каждой узловой точке (i, j) разностной сетки следует удовлетворить следующим уравнениям движения:

$$L_k(i, j) = m_k u_k''(i, j) + \varepsilon_k u_k'(i, j) \quad (2.1)$$

$$m_k = \rho h \quad (k=1, 2, 3), \quad m_k = \rho h^3/12 \quad (k=4, 5)$$

где ρ — плотность материала оболочки, h — толщина, ε_k — удельная вязкость среды. Будем полагать, что $\varepsilon_k = \varepsilon = \text{const}$ и, кроме того, параметры массовых характеристик и вязкости постоянны по пространственным и временной координатам. Точкой вверху обозначено дифференцирование по времени.

Решение нестационарных уравнений (2.1) строится с помощью явной двухслойной разностной схемы по времени, при этом производные по времени аппроксимируются центральными конечными разностями. Введем обозначения: $u_k^-(i, j)$ и $u_k^+(i, j)$ — скорости в моменты времени соответственно $t=t_0-\Delta t/2$ и $t=t_0+\Delta t/2$, $u_k^-(i, j)$ и $u_k^+(i, j)$ — перемещения в моменты времени $t=t_0$ и $t=t_0+\Delta t$, где Δt — шаг по времени. Тогда из (2.1) можно получить в явном виде выражения для скоростей $u_k^+(i, j)$, а путем интегрирования — перемещения в момент времени $t=t_0+\Delta t$:

$$u_k^+(i, j) = [(2m_k - \varepsilon \Delta t)/(2m_k + \varepsilon \Delta t)] u_k^-(i, j) + [2\Delta t/(2m_k + \varepsilon \Delta t)] L_k(i, j) \quad (2.2)$$

$$u_k^+(i, j) = u_k^-(i, j) + \Delta t u_k^+(i, j) \quad (2.3)$$

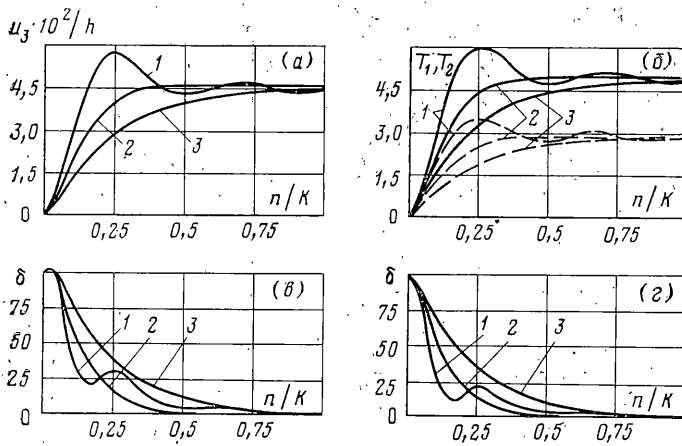
Таким образом, переход к нестационарной задаче вида (2.1) позволяет построить итерационный процесс (2.2) — (2.3) нахождения решения исходной стационарной задачи. Процесс счета начинается с момента времени $t=0$ при некотором первоначальном (в частном случае нулевом) приближении для перемещений и нулевых значениях скоростей. Строится разностный шаблон вычисления левых частей уравнений равновесия для некоторой узловой точки разностной сетки и далее организуется цикл вычисления скоростей и перемещений согласно (2.2) — (2.3) для тех узловых точек, где эти уравнения должны быть удовлетворены. Шаг итерационного процесса заканчивается после удовлетворения заданным граничным условиям на внешнем и внутренних контурах оболочки. Итерации выполняются до достижения заданной степени установления процесса, когда характерные значения компонентов напряженно-деформированного состояния оболочки не перестают меняться в пределах заданной точности.

Значения параметров итерационного процесса — удельной вязкости среды ε и шага по времени Δt — определяются из условия ускорения сходимости и устойчивости разностной схемы, что приводит к необходимости оценки наименьшего и наибольшего собственных чисел матрицы жесткости задачи в рамках принятой схемы дискретизации по пространственным переменным [14, 17]. Поскольку для нелинейных задач нахождение указанных величин представляет значительные трудности, то определение оптимальных (с точки зрения затрат машинного времени) значений итерационных параметров производится в рамках линейной задачи и последующих уточнений путем пробных расчетов. При исследовании ортотропных оболочек в качестве оценочных могут быть использованы следующие формулы [18, 19]:

$$\varepsilon = 2k_e(\rho h \lambda_1)^{1/2}, \quad \Delta t = 2k_i(\rho h/\lambda_2)^{1/2}, \quad \lambda_1 \approx k_1^2 B_{11} + 2k_1 k_2 B_{12} + k_2^2 B_{22} \quad (2.4)$$

$$\lambda_2 \approx \max(4B_{11}/\Delta x_1^2 + 4B_{33}/\Delta x_2^2; 4B_{22}/\Delta x_2^2 + 4B_{33}/\Delta x_1^2)$$

где $\Delta x_i = A_i \Delta \alpha_i$ ($i=1, 2$) — параметры разностной сетки, k_e, k_i — близкие к единице поправочные коэффициенты, k_1, k_2 — характерные значения главных кривизн оболочки.



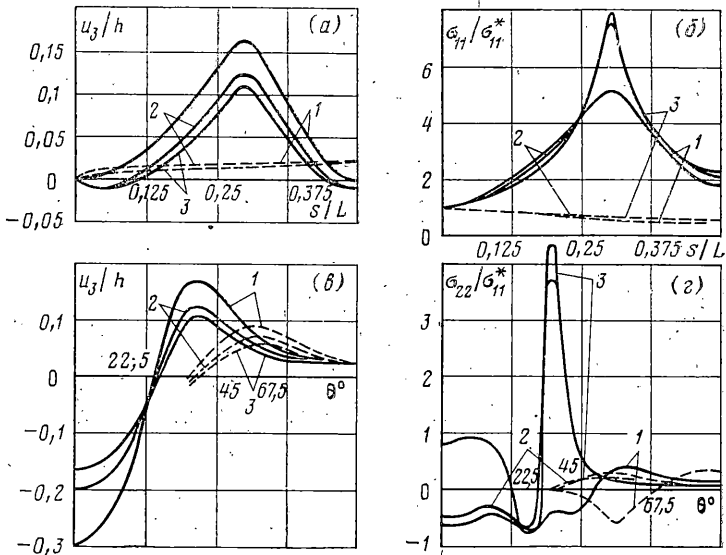
Фиг. 2

3. Сходимость итерационного процесса (2.2), (2.3) зависит, в частности, от двух факторов: числа точек дискретизации $N \times M$ и величины удельной вязкости ϵ . Последний параметр определяется через оценку наименьшего собственного числа задачи, слабо зависящего от параметров разностной сетки. Это позволяет для определения оптимального значения ϵ производить пробные расчеты с использованием довольно крупной сетки. Для исследования зависимости сходимости и точности решения стационарной задачи от итерационных параметров — вязкости ϵ и шага по времени Δt — рассмотрим деформирование изотропной цилиндрической оболочки постоянной толщины под действием равномерного внутреннего давления. Геометрические характеристики оболочки: $R/h=100$, $L=2R$, где R и L — соответственно радиус средней поверхности и длина образующей оболочки. Характеристики материала оболочки: $E=1,96 \cdot 10^5$ МПа, $\nu=0,3$. Интенсивность внутреннего давления $q_3=0,5 \cdot 10^{-6} E$. Оболочка шарнирно закреплена по краям: $u_1=u_2=u_3=M_{11}=0$. В качестве исходных использовались соотношения теории оболочек, основанные на гипотезах Кирхгофа — Лява. Для определения оптимального значения параметра ϵ коэффициент k_ϵ полагался последовательно равным 0,5; 1,1; 1,5.

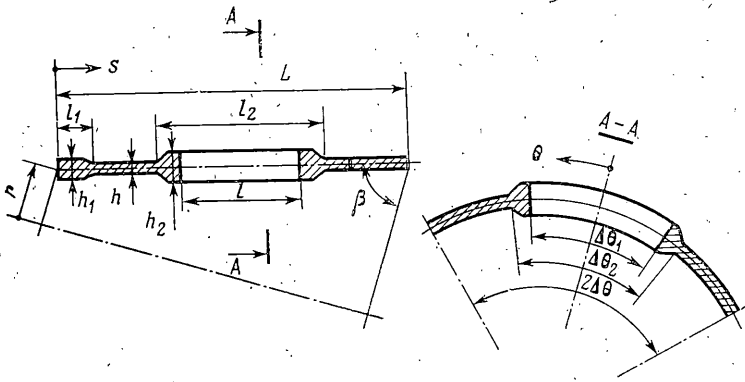
Результаты исследований представлены на фиг. 2, где n — число итераций, K — общее число неизвестных: $K=3 \times N \times M$. Кривые 1–3 соответствуют результатам расчетов при $k_\epsilon=0,5; 1,1; 1,5$. На фиг. 2, а показан процесс установления прогиба u_3 в узловой точке, лежащей посередине длины оболочки, а на фиг. 2, б — установление усилий T_{11} (штриховые линии) и T_{22} (непрерывные линии) в том же узле ($T_1 = (2T_{11}/Eh) \cdot 10^{-5}$, $T_2 = (T_{22}/Eh) \cdot 10^{-5}$). Как видно из графиков, величина ϵ при $k_\epsilon=1,1$ весьма близка к оптимальной и значения компонентов напряженно-деформированного состояния оболочки устанавливаются за наименьшее число итераций. При $k_\epsilon=0,5$ наблюдается осцилляция решения с постепенным выходом на стационарное состояние, а при $k_\epsilon=1,5$ процесс, как и при $k_\epsilon=1,1$, монотонно устанавливается, но за большее число итераций. На фиг. 2, в, г показано поведение соответственно максимальных и средних (по всем узлам) погрешностей в удовлетворении уравнений равновесия в проекции на нормаль. Погрешность определялась как абсолютная величина отношения невязки левой части уравнения равновесия к значению нагрузки в данном узле.

Как показывают результаты исследований, для получения решения с величиной максимальной погрешности в удовлетворении уравнений равновесия порядка 1% необходимо проведение расчетов на временной базе, составляющей около $(1,5-2)T$ (T — период свободных колебаний), что согласуется с данными [20]. В связи с этим для экономии затрат машинного времени принятая в расчете величина шага по времени Δt должна быть достаточно близкой к критическому значению, удовлетворяющему условию устойчивости разностной схемы. Если Δt превышает критическое значение, то появляющаяся числовая неустойчивость легко распознается по характерному осциллированию решения с возрастающей амплитудой и быстрому росту погрешностей в удовлетворении уравнений равновесия, что позволяет легко алгоритмизировать процесс отыскания оптимального значения Δt .

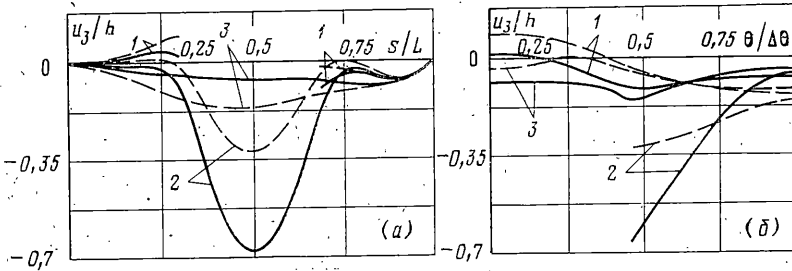
Результаты проведенных исследований показывают, что разработанный метод обладает достаточно высокой скоростью сходимости. Так, например, в [21] с помощью метода конечных элементов исследовалось неосесимметричное деформирование гибкой изотропной цилиндрической оболочки постоянной толщины. Для решения нелинейных алгебраических уравнений использовался метод последовательных приближений в сочетании с шаговым методом по нагрузке. Как показали результаты расчетов, применение метода установления для получения решения данной задачи с заданной погрешностью (в [21] указана величина максимальной погрешности 5%) при примерно одинаковой густоте сеток конечных элементов и конечных разностей позволяет в 3–4 раза сокращать затраты машинного времени.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

4. Исследуем влияние параметров разностной сетки на напряженно-деформированное состояние оболочки с вырезом, содержащим угловые точки. Рассматривается изотропная ($E_1 = E_2 = 1,96 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$) цилиндрическая оболочка постоянной толщины под действием осевой сжимающей силы. Оболочка ослаблена двумя одинаковыми диаметрально противоположными прямоугольными вырезами, расположенными на одинаковых расстояниях от ее внешних краев. Геометрические характеристики оболочки: $R/h = 100$, $L = 2R$, где R — радиус срединной поверхности, L — длина образующей оболочки. Длина прямолинейного края выреза $l = 0,4L$, центральный угол выреза $\Delta\theta = 72^\circ$. В силу симметрии рассматривается $1/8$ часть оболочки. Исследования выполнялись для значений $N = M = 11; 21; 26$, где N и M — число точек дискретизации (без учета законтурных) соответственно в меридиональном и окружном направлениях. Внешний контур оболочки шарнирно оперт: $u_3 = S = M_{11} = 0$, $T_{11} = T_{11}^*$.

Результаты исследований представлены на фиг. 3, где кривые 1–3 соответствуют решениям при $N = M = 11; 21; 26$. На фиг. 3, а, б показаны эпюры прогибов u_3 и напряжений $\sigma_{11} = T_{11}/h$ в сечениях $\theta = 36^\circ$ (непрерывные линии) и $\theta = 90^\circ$ (штрихо-

вые линии). Эпюры прогибов u_3 и напряжений $\sigma_{22}=T_{22}/h$ в окружном направлении показаны на фиг. 3, e , g штриховыми линиями для координаты $s=0,5L$ и непрерывными линиями для $s=0,3L$. Линейная координата s ($0 \leq s \leq 0,5L$) отсчитывается от внешнего края оболочки, а окружная θ ($0 \leq \theta \leq 90^\circ$) — от меридиональной линии, проходящей через середину криволинейного края оболочки.

Анализ кривых на фиг. 3 показывает, что при исследовании напряженно-деформированного состояния оболочек с вырезами для получения достаточно точных результатов необходимо использовать мелкую сетку. При этом число узловых точек на стороне выреза должно быть не менее 12–15.

5. Рассмотрим деформирование усеченной ортотропной конической оболочки переменной толщины. Оболочка ослаблена четырьмя одинаковыми вырезами трапециевидальной формы, равномерно расположенными по окружной координате на одинаковом расстоянии от ее внешних краев. Геометрические характеристики оболочки (фиг. 4): $L/r=4,8$; $r/h=36$; $\beta=65^\circ$; $h_1=1,15h$; $h_2=1,25h$; $l=0,385L$; $l_1=0,115L$; $l_2=0,538L$; $\Delta\theta_1=41^\circ$; $\Delta\theta_2=57^\circ$. Характеристики материала оболочки: $E_1/E_2=3$, $G=-E^*/[2(1+\nu^*)]$, где $E^*=(E_1+E_2)/2$, $\nu^*=(\nu_1+\nu_2)/2$. Оболочка нагружена внешним давлением интенсивностью $q_3=0,25 \cdot 10^{-5} E^*$. Рассматривается два расчетных случая: каждый вырез закрыт гибкой крышкой, передающей нагрузку по контуру выреза в виде равномерно распределенной перерезывающей силы Q_{ii}^* ; краевые нагрузки на контуре выреза равны нулю. Оболочка шарнирно закреплена по краям: $u_1=u_2=u_3=M_{11}=0$. Расчетные параметры вдоль меридиональной координаты помечены индексом 1, вдоль окружной — индексом 2.

Результаты исследований представлены на фиг. 5, где непрерывные кривые соответствуют первому случаю, штриховые — второму. На фиг. 5, a показано распределение прогибов в сечениях $\theta=0$; $20,5$; 45° (кривые 1–3 соответственно), а на фиг. 5, b — эпюры прогибов вдоль окружных линий с координатами $s=0,31L$ (кривые 1); $0,5L$ (кривые 2); $0,69L$ (кривые 3); $\Delta\theta=45^\circ$.

Анализ результатов численных экспериментов показывает, что учет краевых нагрузок на контуре выреза оказывает существенное влияние на решение задачи не только на самом контуре выреза, но и в зонах, достаточно от него удаленных.

Результаты различных исследований, выполненных на основе разработанного численного метода, показали его эффективность и экономичность в отношении затрат машинного времени при расчетах оболочек с особенностями разрывного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Преображенский И. Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. М.: Машиностроение. 1981. 191 с.
2. Преображенский И. Н. Об исследованиях устойчивости тонкостенных оболочек с вырезами (обзор). Ч. 1, 2. // Пробл. прочности. 1982. № 1. С. 21–32; № 2. С. 74–81.
3. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н. и др. Исследования по теории тонких оболочек с отверстиями (обзор) // Прикл. механика. 1979. Т. 15. № 11. С. 3–37.
4. Моссаковский В. И., Ободан Н. И., Фридман А. Д. Нелинейное деформирование цилиндрической оболочки с большими прямоугольными вырезами // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 2. С. 51–56.
5. Колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем: Пер. с англ. М.: Мир. 1984. 311 с.
6. Григоренко Я. М. Решение задач теории оболочек методами численного анализа // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 10. С. 3–22.
7. Голда Ю. Л., Преображенский И. Н., Штукатуров В. С. Экспериментальное исследование устойчивости оболочек с отверстиями // Прикл. механика. Т. 9. № 1. С. 27–32.
8. Длувач М. И., Гавриленко Г. Д., Поляков П. С. Теоретическое и экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния ребристых оболочек с большими прямоугольными отверстиями // Прикл. механика. 1977. Т. 13. № 6. С. 177–120.
9. Toda S. Some considerations on the buckling of the thin cylindrical shells with cutouts // Trans. Jap. Soc. Aeronaut. and Space Sci. 1980. V. 23. No 60. P. 104–112.
10. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мясенков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций М.: Машиностроение. 1975. 374 с.
11. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.
12. Форсберг К. Оценка методов конечных разностей и конечных элементов в применении к расчету произвольных оболочек // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. Т. 2. Л.: Судостроение. 1974. С. 296–312.
13. Преображенский И. Н., Голда Ю. Л., Дмитриев В. Г. Пакет программ для численного анализа напряженно-деформированного состояния гибкой конической оболочки при несимметричном нагружении // Комплексы программ математической физики: Материалы 7-го Всесоюз. семинара. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1982. С. 304–311.
14. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1. М.: Наука. 1973. 631 с.
15. Преображенский И. Н., Голда Ю. Л., Дмитриев В. Г. Общий метод исследования напряженно-деформированного состояния гибких тонкостенных конструкций с физико-механическими особенностями // Тр. 1-й Всесоюз. симпозиум «Нелинейная

- теория тонкостенных конструкций и биомеханика». Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та. 1985. С. 286–289.
16. *Frieze P. A., Hobbs R. E., Dowling P. J.* Application of dynamic relaxation to the large deflection elasto-plastic analysis of plates // *Comput. and Struct.* 1978. V. 8. No 2. P. 301–340.
 17. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука. 1977. 656 с.
 18. *Преображенский И. Н., Голда Ю. Л.* Расчет гибких пологих оболочек с вырезами // *Пробл. прочности.* 1984. № 8. С. 76–79.
 19. *Преображенский И. Н., Голда Ю. Л., Дмитриев В. Г.* Численный метод исследования напряженно-деформированного состояния гибких композитных оболочек вращения, ослабленных вырезами различной формы // *Механика композит. материалов.* 1985. № 6. С. 1030–1035.
 20. *Кассель А. Ц., Хаббс Р. Е.* Динамическая релаксация // *Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ.* Т. 2. Л.: Судостроение. 1974. С. 259–273.
 21. *Кабанов В. В., Железнов А. П.* Исследование нелинейного деформирования и устойчивости цилиндрических оболочек при неосесимметричном давлении методом конечных элементов. // *Прикл. механика.* 1981. Т. 17. № 5. С. 71–76.

Москва

Поступила в редакцию
16.I.1986