

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ТЕОРИИ  
ПОЛОГИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

ОЛЬШАНСКИЙ В. П.

Согласно теории оболочек Кирхгофа, в решении типа Навье двойные тригонометрические ряды для изгибающих моментов и поперечных сил в точке приложения нормальной силы расходятся. Применение теории оболочек с конечной жесткостью сдвига приводит к расходимости также в рядах для прогибов и тангенциальных усилий. Поэтому требуется ускорение сходимости разложений путем выделения замкнутых составляющих. Такие преобразования одинарных тригонометрических рядов для оболочек вращения проводились в [1-4].

В данной статье рассматриваются вопросы ускорения сходимости двойных тригонометрических рядов для прогибов и изгибающих моментов незамкнутой свободно опертой панели при действии нормальной силы. Из них выделяется разложение, соответствующее дифференциальному оператору пологой сферы без учета сдвига и преобразуется методом двумерных отображений. В результате ряды по синусам сводятся к рядам функций Томсона. Ввиду быстрой сходимости последних их суммы при определенных в статье условиях можно с достаточной точностью аппроксимировать выделенным основным членом. Оставшаяся после преобразования регулярная часть функции Грина в виде двойного тригонометрического ряда сходится быстро для пологих панелей и дает поправки на отклонение заданной формы поверхности от сферической. Она также содержит поправки на учет деформаций сдвига.

Проведенные преобразования позволяют упростить численную реализацию при решении краевых задач теории оболочек за счет убыстрения вычислений ядер интегральных уравнений. Появляется возможность аналитически оценить погрешность, возникающую при замене функций Грина фундаментальным решением в задаче об опертой на прямоугольный план сферической панели.

1. При построении рядов для прогиба  $w$  панели, опертой по краям  $x=0$ ,  $x=l_1$ ,  $y=0$ ,  $y=l_2$ , исходим из уравнений уточненной теории пологих трансверсально-изотропных оболочек [5, 6]. Записанные относительно потенциальной функции  $\Phi$  они имеют вид [6]:

$$c^2 \Delta^4 \Phi + (1 - \varepsilon \Delta) \Delta_k^2 \Phi = q - \varepsilon \Delta q \quad (1.1)$$

$$\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2, \Delta_k = R_2^{-1} (\partial^2 / \partial x^2 + \lambda \partial^2 / \partial y^2) \\ \varepsilon = E c^2 / (G' k'), c^2 = h^2 [12(1 - \nu^2)]^{-1}, k' = 5/6, |\lambda| = R_2 R_1^{-1} \leq 1 \\ w = (Eh)^{-1} \Delta^2 \Phi \quad (1.2)$$

Здесь  $E$ ,  $\nu$ ,  $G'$  — соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и модуль сдвига материала панели толщиной  $h$ ;  $R_1$ ,  $R_2$  — радиусы кривизны срединной поверхности, знак которой совпадает со знаком  $\lambda$ ;  $k'$  — коэффициент сдвига;  $q$  — внешняя нормальная нагрузка.

Разложим в двойные тригонометрические ряды функции  $q$  и  $\Phi$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} q \\ \Phi \end{array} \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} q_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{array} \right\} \sin(a_m x) \sin(b_n y) \quad (1.3) \\ a_m = m\pi l_1^{-1}, b_n = n\pi l_2^{-1}$$

Для нагрузки в виде единичной силы, сосредоточенной в точке с координатами  $x_1$ ,  $y_1$ , имеем  $q_{mn} = 4(l_1 l_2)^{-1} \sin(a_m x) \sin(b_n y)$ . Подставляя раз-

ложения (1.3) в уравнение (1.1), с учетом выражения для  $q_{mn}$  получим ряд для потенциальной функции

$$\Phi = 4(c^2 l_1 l_2)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \varepsilon (a_m^2 + b_n^2)) [(a_m^2 + b_n^2)^4 +$$

$$+ (R_2 c)^{-2} (1 + \varepsilon (a_m^2 + b_n^2)) (a_m^2 + \lambda b_n^2)^2]^{-1} \sin(a_m x_1) \sin(b_n y_1) \sin(a_m x) \sin(b_n y)$$

Продифференцировав его в соответствии с формулой (1.2), находим выражение прогиба

$$w = (D b^2)^{-1} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{1mn} (\Delta_{mn}^{-1} - \Delta_{2mn}^{-1}) S_{mn} + F_1 + \gamma F_2 \right) \quad (1.5)$$

$$\Delta_{1mn} = [\gamma (\alpha_m^2 + \beta_n^2) + 1] (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2$$

$$\Delta_{mn} = (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^4 + [\gamma (\alpha_m^2 + \beta_n^2) + 1] (\alpha_m^2 + \lambda \beta_n^2)^2$$

$$\Delta_{2mn} = (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^4 + (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2, \quad \alpha_m = m\pi/k_1, \quad \beta_n = n\pi/k_2$$

$$S_{mn} = 4(k_1 k_2)^{-1} \sin(\alpha_m \xi_1) \sin(\beta_n \eta_1) \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \eta)$$

$$b = (c R_2)^{-1/2}, \quad \gamma = \varepsilon b^2, \quad k_1 = b l_1, \quad k_2 = b l_2$$

$$\xi = b x_1, \quad \eta_1 = b y_1, \quad \xi = b x, \quad \eta = b y, \quad D = E h c^2$$

Из рядов (1.5) выделены составляющие ( $\delta_{ij}$  — символ Кронекера):

$$F_j = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 [\delta_{1j} + \delta_{2j} (\alpha_m^2 + \beta_n^2)] S_{mn} \Delta_{2mn}^{-1} \quad (j = \overline{1, 2}) \quad (1.6)$$

Ряд  $F_2$  расходится в точке ( $x=x_1, y=y_1$ ) и сходится очень медленно для остальных  $x$  и  $y$ . Преобразуем его к виду, более удобному для вычислений, с помощью метода двумерных отображений, который позволяет упростить и вычисление ряда  $F_1$ , особенно при больших размерах плана. Выражение

$$w_0 = (D b^2)^{-1} F_1 \quad (1.7)$$

определяет прогибы прямоугольной пластины изгибной жесткости  $D$ , подкрепленной основанием Винклера с коэффициентом постели  $k = D b^4$ , т. е. является решением краевой задачи ( $\delta(z)$  — функция Дирака):

$$D(\Delta^2 w_0 + b^4 w_0) = \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) \quad (1.8)$$

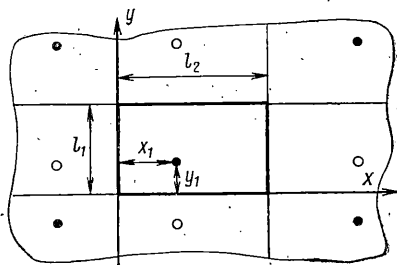
$$w_0 = \partial^2 w_0 / \partial x^2 = 0 \quad (x=0, x=l_1)$$

$$w_0 = \partial^2 w_0 / \partial y^2 = 0 \quad (y=0, y=l_2)$$

2. Решим повторно эту задачу методом двумерных отображений. Метод отображений по одномерной схеме в теорию пластин введен Надаи [7]. Эта схема успешно использовалась и при расчете цилиндрических оболочек [1, 7]. Здесь предлагается двумерная схема отображений, при которой суммируются непериодические фундаментальные решения. В одномерной они должны быть периодическими по одной из переменных.

Прямоугольную пластину рассматриваем как участок бесконечной области, нагруженной двойкопериодической системой единичных сосредоточенных сил.

На фигуре светлыми и темными точками отмечены силы противоположных направлений. Нагружение оказывается таким, что на линиях  $x=0$ ,



$x=l_2, y=0, y=l_1$  воздействия от соответствующих сил компенсируют друг друга. Поэтому на указанных прямых прогибы и их четные производные обращаются в нуль, что обеспечивает выполнение граничных условий. Обозначив через  $W(x, y)$  фундаментальное решение дифференциального оператора (1.8), с помощью принципа суперпозиции воздействий найдем следующее выражение для прогибов пластины:

$$w_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j} W(X_{mi}, Y_{nj}) \quad (2.1)$$

$$X_{mi} = 2ml_1 + (-1)^i x_1 - x, \quad Y_{nj} = 2nl_2 + (-1)^j y_1 - y$$

Поскольку фундаментальное решение уравнения (1.8) и оператор Лапласа от него выражаются через функции Томсона [7], то

$$W(x, y) = -(2\pi D b^2)^{-1} \text{kei}(b(x^2 + y^2)^{1/2}) \quad (2.2)$$

$$\Delta W(x, y) = -(2\pi D)^{-1} \text{ker}(b(x^2 + y^2)^{1/2})$$

Из условия единственности решения краевой задачи и соотношений (1.7), (2.1), (2.2) получаем

$$F_1 = (2\pi)^{-1} \text{kei}[(\xi_{00}^2 + \eta_{00}^2)^{1/2}] + \varphi_1(\xi_1, \eta_1, \xi, \eta) \quad (2.3)$$

$$F_2 = -b^{-2} \Delta F_1 = (2\pi)^{-1} \text{ker}[(\xi_{00}^2 + \eta_{00}^2)^{1/2}] + \varphi_2(\xi_1, \eta_1, \xi, \eta)$$

$$\begin{cases} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{cases} = (2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j} \varepsilon_{mnij} \begin{cases} -\text{kei}(z_{mnij}) \\ \text{ker}(z_{mnij}) \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon = 1 - \delta_{m0} \delta_{n0} \delta_{i0} \delta_{j0}, \quad z_{mnij} = (\xi_{mi}^2 + \eta_{nj}^2)^{1/2}$$

$$\xi_{mi} = 2mk_1 + (-1)^i \xi_1 - \xi, \quad \eta_{ij} = 2nk_2 + (-1)^j \eta_1 - \eta$$

Функции  $\varphi_1, \varphi_2$  обеспечивают точное выполнение граничных условий. В рамках теории Кирхгофа они дополняют фундаментальные решения дифференциальных уравнений до функций Грина опертой сферической панели.

Применение двумерного преобразования Фурье для вычисления прогибов и напряжений под локальной нагрузкой на базе уравнений технической теории связано с пренебрежением функцией  $\varphi_1$  [8, 9]. Поэтому, вычисляя ее значения, можно оценить погрешность, которая возникает при расчете опертой сферической панели методом интегральных преобразований, а также установить условия, при которых допустимо положить  $\varphi_1 = 0$ .

Члены рядов (2.4) регулярны в области  $\{(\xi, \xi_1) \in ]0, k_1[, (\eta, \eta_1) \in ]0, k_2[\}$ . Чтобы убедиться в ограниченности сумм этих рядов, рассмотрим их асимптотическое поведение при  $|m| > M \gg 1$  и  $|n| > N \gg 1$ . Для функций Томсона большого аргумента имеем представления [10]:

$$\begin{cases} \text{ker}(z) \\ \text{kei}(z) \end{cases} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2z}} e^{\alpha z} \begin{cases} \cos \beta(z) \\ \sin \beta(z) \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\alpha(z) = -(z + 1/8z^{-1} - 25/384z^{-3} + 13/128\sqrt{2}z^{-4})/\sqrt{2}$$

$$\beta(z) = -(z - 1/8z^{-1} - 25/384z^{-3})/\sqrt{2} - 1/8\pi - 1/16z^{-2}$$

При  $z=2$  расчет по формулам (2.5) дает  $\text{ker}(2) = -0,04128$ ,  $\text{kei}(2) = -0,2018$ , что близко к табличным значениям  $-0,04166$ ;  $-0,2024$ . С увеличением  $z$  точность повышается и уже при  $z=4$  достигается совпадение пяти значащих цифр:  $\text{ker}(4) = -0,036175$ ,  $\text{kei}(4) = 0,002195$ , вместо  $-0,036178$  и  $0,002198$  по таблицам [7]. Поэтому выражения (2.5) позволяющие существенно упростить вычисление  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Подставляя асимптотические представления (2.5) в ряды (2.4), можно убедиться, что при больших положительных  $m$  и  $n$  они ведут себя так

Таблица 1

$\xi$	$F_1' (25)$	$F_1' (50)$	$F_1' (100)$	$F_1' (2)$	$F_1' (0)$
0	4,47	4,48	4,48	4,49	12,49
0,2	4,05	4,06	4,06	4,03	12,07
0,4	3,23	3,23	3,23	3,19	11,20
0,6	2,22	2,22	2,22	2,19	10,15
0,8	1,13	1,13	1,13	1,11	9,01

Таблица 2

$\xi$	$F_2' (25)$	$F_2' (100)$	$F_2' (200)$	$F_2' (2)$	$F_2' (0)$
0	59,34	81,09	91,94	$\infty$	$\infty$
0,2	26,99	26,18	26,09	26,04	27,58
0,4	14,84	15,23	15,14	15,11	16,91
0,6	8,48	8,80	8,74	8,72	11,03
0,8	4,33	4,08	4,05	4,03	7,21

Таблица 3

$\xi$	$F_1' (25)$	$F_1' (50)$	$F_1' (200)$	$F_1' (2)$	$F_1' (0)$
0	12,38	12,45	12,47	12,48	12,49
0,2	7,87	7,87	7,85	7,86	7,88
0,4	3,21	3,22	3,22	3,22	3,22
0,6	0,85	0,85	0,85	0,84	0,81
0,8	0,08	0,08	0,08	0,07	-0,05

Таблица 4

$\xi$	$F_2' (50)$	$F_2' (200)$	$F_2' (500)$	$F_2' (2)$	$F_2' (0)$
0	46,20	67,77	82,10	$\infty$	$\infty$
0,2	4,30	4,62	4,57	4,55	4,56
0,4	-0,46	-0,62	-0,68	-0,67	-0,66
0,6	-1,28	-1,08	-1,05	-1,04	-1,07
0,8	-0,47	-0,54	-0,55	-0,57	-0,58

же, как ряды

$$\begin{aligned} \begin{cases} S_1 \\ S_2 \end{cases} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 (-1)^{i+j} \exp\left(-\frac{z_{mnij}}{\sqrt{2}}\right) z_{mnij}^{-1/2} \times \\ &\quad \times \begin{cases} \sin(z_{mnij}/\sqrt{2} + 1/8\pi) \\ \cos(z_{mnij}/\sqrt{2} + 1/8\pi) \end{cases} \end{aligned}$$

Величины  $|S_1|$  и  $|S_2|$  не превышают значения

$$S = (2\sqrt{2\pi})^{-1} \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \exp(-1z_{mnij}/\sqrt{2})$$

которое можно оценить с помощью неравенства Коши — Буняковского  $z_{mnij} \geq (|\xi_{mn}| + |\eta_{nj}|)/\sqrt{2}$  и формулы суммирования геометрической прогрессии (суммирование по  $m$  от  $M$  до  $\infty$ ):  $\sum e^{-mh} = e^{-Mh} (1 - e^{-h})^{-1}$ . В результате получаем

$$S < \sqrt{2/\pi} \exp[(\xi_1 + \eta_1)/2] \operatorname{ch}(\xi_1/2) \operatorname{ch}(\eta_1/2) \exp[-(Mk_1 + Nk_2)] [1 - \exp(-k_1)]^{-1} [1 - \exp(-k_2)]^{-1} \quad (2.6)$$

Анализ асимптотического поведения рядов (2.4) при больших отрицательных  $m$  и  $n$  проводится аналогично. Конечный результат отличается от (2.6) только знаком перед  $\xi$  и  $\eta$ . Таким образом, остатки рядов (2.4) при  $M \rightarrow \infty$  и  $N \rightarrow \infty$  стремятся к нулю, что подтверждает их сходимость. Поэтому функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  не имеют особенностей в указанной области.

3. Вычислим функции  $F'_{1,2} = 100F_{1,2}$  двумя способами (См. табл. 1-4). Расчет

проводился для сферической панели, опертой на квадратный план ( $k_1 = k_2$ ), при действии единичной силы в ее вершине  $\xi_1 = \eta_1 = 0,5k_1$ . Значения функций определены на меридиане в точках с координатами  $\xi = 1/2(1 + \xi)k_1$ ,  $\eta = \eta_1$ . Числа в трех первых колонках таблиц получены по формулам (1.6), где в каждом ряде удерживалось количество членов, указанное в скобках при  $F'_1$  или  $F'_2$ . В четвертых колонках таблиц приведены значения функций, вычисленные по формулам (2.3). Суммирование рядов (2.4) проводилось по  $m$  и  $n$  от  $-2$  до  $2$ , что обеспечивало стабилизацию трех значащих цифр. Данные в пятых колонках соответствуют расчету по формулам (2.3), в которых принималось  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , т. е. учитывалось только первое слагаемое. Для вычисления функций Томсона использовались асимптотические представления (2.5). Первые слагаемые выражений (2.3) брались из таблиц [7].

Результаты расчетов в табл. 1, 2 соответствуют значению  $k_1 = 2$ . Малые отличия чисел в третьей и четвертой колонках показывают, что даже при небольших размерах плана панели ( $l_1 = l_2 = 2b^{-1}$ ) вычисление функций Томсона в рядах (2.4) можно проводить по асимптотическим формулам (2.5). Это существенно упрощает вычисление слагаемых  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , вклад которых при малых размерах плана имеет принципиальное значение. Из-за логарифмической особенности ряд (1.6) для  $F_2$  расходится в точке приложения внешней силы. Это учитывается при вычислении  $F_2$  методом двумерных отображений, так как функция  $\ker(z)$  сингулярна при  $z=0$ .

В табл. 3, 4 содержатся результаты аналогичных расчетов при  $k_1 = 10$ . Здесь наблюдается хорошее совпадение приближенных значений функций в третьей, четвертой и пятой колонках. Учет слагаемых  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  не имеет существенного значения вплоть до  $\xi = 0,8$ . Это позволяет сделать вывод о том, что при удалении нагрузки и расчетной точки от контура сферической оболочки более, чем на  $2b^{-1}$  вкладом  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  можно пренебречь. В результате ряды (1.6) сводятся к функциям Томсона и существенно упрощается вычисление функций Грина в опертых панелях произвольной кривизны.

Таким образом, изложенный метод эффективен при расчете панелей большого плана, когда  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  приходится вычислять только в пограничной зоне шириной  $2b^{-1}$ . За пределами этой зоны вкладом  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в значения прогибов можно пренебречь.

Учитывая, что самое быстрое затухание локальных возмущений имеет место в сфере [11, 12], приходим к выводу, что в зоне, удаленной от контура на расстояние, меньшее  $2b^{-1}$ , ни при какой форме оболочки функции Грина нельзя заменить фундаментальными решениями. В этой зоне при больших размерах плана следует использовать функции влияния полу- или четвертьбесконечных областей.

Остановимся далее на преобразовании рядов, представляющих компоненты напряжений. Ограничимся рядами для изгибающих моментов  $m_1$ ,  $m_2$ , которые являются основными расчетными величинами при действии локальной нормальной нагрузки. Их получение сводится к преобразованию потенциальной функции оператором [6]:

$$m_j = -c^2 [(\partial^2/\partial x^2 + \nu \partial^2/\partial y^2) \delta_{1j} + (\partial^2/\partial y^2 + \nu \partial^2/\partial x^2) \delta_{2j}] \times \\ \times [\Delta^2 \Phi + \varepsilon \Delta^3 \Phi + \varepsilon^2 c^{-2} (q - \Delta k^2 \Phi)]$$

Подставляя сюда ряд (1.4), с учетом уравнения (1.1) получаем

$$m_j = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(\alpha_m^2 + \nu \beta_n^2) \delta_{1j} + (\beta_n^2 + \nu \alpha_m^2) \delta_{2j}] (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 \Delta_{mn}^{-1} S_{mn} \quad (j = \overline{1, 2})$$

Выделим из этих разложений составляющие медленной сходимости

$$m_{j0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_m^2 (\delta_{1j} + \nu \delta_{2j}) + \beta_n^2 (\delta_{2j} + \nu \delta_{1j})] S_{mn} [(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 + 1]^{-1}$$

которые представляют моменты в рассмотренной выше пластине на упругом основании. Их можно получить двукратным дифференцированием ( $-F_1$ ) по  $\xi$  и  $\eta$ , которое проводится по формуле

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \ker(z_{mni}) = \frac{t_1^2}{z_{mni}^2} \ker(z_{mni}) + \frac{z_{mni}^2 - 2t_1^2}{z_{mni}^3} \frac{d}{dz_{mni}} \ker(z_{mni})$$

полагая  $t = \xi$ ;  $t_1 = \xi_{mi}$  и  $t = \eta$ ,  $t_1 = \eta_{nj}$ .

Скорость сходимости  $F_1$  после дифференцирования будет зависеть от поведения производной  $\text{kei}'(z)$ . Из выражений (2.5) следует, что эта производная, как и сама функция, обладает экспоненциальным убыванием при  $z \rightarrow \infty$ . Поэтому сходимость останется быстрой и после замены  $\text{kei}(z)$  ее вторыми частными производными по  $\xi$  и  $\eta$ , но основной член будет содержать логарифмическую особенность, которую имеют функции  $\text{ker}(z)$  и  $z^{-1} \text{kei}'(z)$  [7]. Эта особенность не связана с учетом деформаций сдвига, т. е. является такой же, как и в классической теории оболочек. Таким образом, преобразование рядов методом двумерных отображений оказывается эффективным и при вычислении изгибающих моментов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение. 1980. 415 с.
2. Даревский В. М. Оболочки под действием локальных нагрузок // Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 2. М.: Машиностроение. 1968. С. 49–96.
3. Максименко В. Н., Фильшинский Л. А. Упругое равновесие анизотропных оболочек, укрепленных ребрами жесткости // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 5. С. 900–908.
4. Нерубайло Б. В. Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение. 1983. 248 с.
5. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 446 с.
6. Пелех Б. Л. Обобщенная теория оболочек. Львов: Вища шк. 1978. 159 с.
7. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. М.: Мир. 1982. 542 с.
8. Шевляков Ю. А., Шевченко В. П. Пологая сферическая оболочка под действием сосредоточенных сил и моментов // Прикл. механика. 1965. Т. 1. Вып. 2. С. 74–77.
9. Ольшанский В. П. Фундаментальные решения уравнений пологих оболочек // Изв. вузов. Математика. 1980. № 6. С. 52–56.
10. Градштейн И. М., Рыжик И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1962. 1400 с.
11. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
12. Чернышев Г. Н. Асимптотические методы в теории оболочек (сосредоточенные нагрузки) // Тр. 6-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука. 1966. С. 799–810.

Харьков

Поступила в редакцию  
22.IV.1986