

УДК 531.36

## ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА НИТИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

ЗОЛОТЕНКО Г. Ф.

Исследуются движения твердого тела, подчиненного нестационарной голономной связи в виде нити переменной длины. Задача связана с вопросами поведения различных объектов, поднимаемых и опускаемых с помощью подъемно-транспортных средств. Ранее [1-5] изучались случаи движения твердого тела, подвешенного на нити постоянной длины. В публикуемой работе приводятся уравнения пространственных движений твердого тела, подвешенного на нити переменной длины к подвижному основанию. Исследуются условия существования маятниковых колебаний системы нить — тело, при которых центр масс тела в любой момент лежит на одной прямой с нитью. Доказана неустойчивость нижнего положения равновесия тела при равномерном уменьшении длины нити.

1. Рассмотрим произвольное твердое тело массы  $m$ , подвешенное на нити переменной длины  $l(t)$  к некоторому, в общем случае подвижному, основанию. Движения основания рассматриваются относительно неподвижной системы координат  $O^*\xi\eta\zeta$ , ось  $\zeta$  которой направлена по восходящей вертикали. Считается, что нить является абсолютно гибкой, нерастяжимой, невесомой, шарнирно крепится к телу в произвольной точке  $O$  и все время проходит через точку  $O_1$  основания. Радиус-вектор  $f(t)$  точки  $O_1$  относительно начала  $O^*$  неподвижной системы координат является известной функцией времени. Движение нити и тела рассматривается относительно поступательно перемещающейся системы координат  $O_1\xi\eta\zeta$ , оси которой параллельны соответствующим осям неподвижной системы координат. Полус тела выбирается в точке  $O$  крепления нити к телу.

Уравнения движения твердого тела относительно системы координат  $O_1\xi\eta\zeta$  представимы в виде [6]:

$$m[\ddot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c)] = \mathbf{F} + \mathbf{R} - m\mathbf{f}'' \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r}_c \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{M} - m\mathbf{r}_c \times \mathbf{f}'' \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки  $O$  относительно точки  $O_1$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  — мгновенная угловая скорость тела,  $\mathbf{r}_c$  — радиус-вектор центра масс  $C$  тела относительно точки  $O$ ,  $\mathbf{F}$  — главный вектор активных сил, действующих на тело,  $\mathbf{R}$  — реакция (натяжение) нити,  $\boldsymbol{\theta}$  — тензор инерции тела в точке  $O$ ,  $\mathbf{M}$  — главный момент активных сил относительно полюса тела. Уравнение (1.2) не содержит момента реакции связи, поскольку эта сила приложена в точке  $O$ . Связь, которая в данном случае является голономной, идеальной и нестационарной, представляется соотношением

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2(t) \quad (1.3)$$

где  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  — координаты конца нити  $O$  в системе координат  $O_1\xi\eta\zeta$ .

Система уравнений (1.1)–(1.3) является замкнутой относительно искомых величин  $\mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{R}$ . Покажем, что при известном законе изменения длины нити  $l(t)$  реакция нити  $\mathbf{R}$  может быть исключена из уравнений движения.

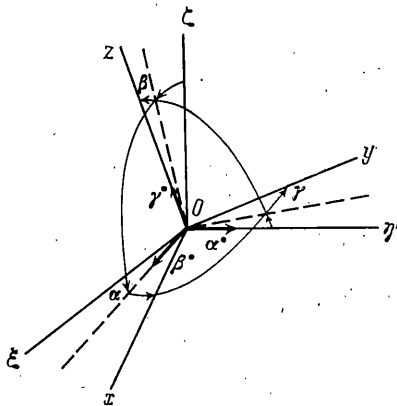
Введем сферические координаты точки  $O$  по формулам  $\xi = \rho \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $\eta = \rho \sin \vartheta \sin \varphi$ ,  $\zeta = \rho \cos \vartheta$  и рассмотрим локальный базис сферической системы координат в точке  $O$ . Элементы  $\zeta_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) матрицы перехода

от осей  $\xi, \eta, \zeta$  к осям локального базиса определяются соотношениями

$$\begin{aligned} s_{11} &= \sin \vartheta \cos \varphi, & s_{12} &= \sin \vartheta \sin \varphi, & s_{13} &= \cos \vartheta \\ s_{21} &= \cos \vartheta \cos \varphi, & s_{22} &= \cos \vartheta \sin \varphi, & s_{23} &= -\sin \vartheta \\ s_{31} &= -\sin \varphi, & s_{32} &= \cos \varphi, & s_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

С твердым телом жестко свяжем систему координат  $Oxyz$ , ориентацию которой относительно системы координат  $O_1\xi\eta\zeta$  определим углами  $\alpha, \beta, \gamma$  (фигура). Элементы  $a_{ik}$  ( $i, k=1, 2, 3$ ) матрицы перехода от осей  $x, y, z$  к осям  $\xi, \eta, \zeta$  представляются выражениями

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma, \\ a_{12} &= \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \\ a_{13} &= \sin \alpha \cos \beta, & a_{21} &= \cos \beta \sin \gamma, \\ a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma \\ a_{23} &= -\sin \beta, & a_{31} &= \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \\ & \quad - \sin \alpha \cos \gamma \\ a_{32} &= \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma, \\ a_{33} &= \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (1.5)$$



В дальнейшем тензор инерции и векторы, входящие в уравнения (1.1), (1.2), в проекциях на оси  $x, y, z$  представляются следующим образом:  $\theta = \|\theta_{ik}\|$  ( $i, k=1, 2, 3$ ),  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ,  $r_c = (x_c, y_c, z_c)$ ,  $\omega \times r_c + \dot{\omega} \times (\omega \times r_c) = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $r^* = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $f^* = (w_x, w_y, w_z)$ .

Спроектировав векторное равенство (1.1) на оси локального базиса, а (1.2) — на оси  $x, y, z$ , после некоторых преобразований получаем следующую систему уравнений, описывающих пространственные движения твердого тела, подвешенного на нити переменной длины к подвижному основанию (принимается соглашение о суммировании по повторяющимся индексам  $i$  и  $k$  от 1 до 3):

$$\begin{aligned} m(\rho \ddot{\rho} - \rho \dot{\vartheta}^2 - \rho \varphi^2 \sin^2 \vartheta + s_{1k} a_{ki} u_i) &= F_\rho + R_\rho - m w_\rho & (1.6) \\ m(\rho \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} + 2\rho \dot{\vartheta} \dot{\varphi} - \rho \varphi^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + s_{2k} a_{ki} u_i) &= F_\vartheta + R_\vartheta - m w_\vartheta \\ m[(\rho \varphi \ddot{\varphi} + 2\rho \dot{\varphi} \dot{\vartheta}) \sin \vartheta + 2\rho \varphi \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \vartheta + s_{3k} a_{ki} u_i] &= F_\varphi + R_\varphi - m w_\varphi \\ \theta_{1k} \omega_k + (\omega_2 \theta_{3k} - \omega_3 \theta_{2k}) \omega_k + m(y_c b_3 - z_c b_2) &= M_x - m(y_c w_z - z_c w_y) \\ \theta_{2k} \omega_k + (\omega_3 \theta_{1k} - \omega_1 \theta_{3k}) \omega_k + m(z_c b_1 - x_c b_3) &= M_y - m(z_c w_x - x_c w_z) \\ \theta_{3k} \omega_k + (\omega_1 \theta_{2k} - \omega_2 \theta_{1k}) \omega_k + m(x_c b_2 - y_c b_1) &= M_z - m(x_c w_y - y_c w_x) \end{aligned}$$

где индексы  $\rho, \vartheta, \varphi$  и  $x, y, z$  обозначают проекции соответствующих векторов на оси локального базиса и  $x, y, z$ , а величины  $u_k, b_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) определяются равенствами

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_c(\omega_2^2 + \omega_3^2) - y_c(\omega_3 \dot{\omega}_1 - \omega_1 \dot{\omega}_2) + z_c(\omega_2 \dot{\omega}_1 + \omega_1 \dot{\omega}_2) \\ u_2 &= x_c(\omega_3 \dot{\omega}_1 + \omega_1 \dot{\omega}_2) - y_c(\omega_1^2 + \omega_3^2) - z_c(\omega_1 \dot{\omega}_2 - \omega_2 \dot{\omega}_1) \\ u_3 &= -x_c(\omega_2 \dot{\omega}_1 - \omega_1 \dot{\omega}_2) + y_c(\omega_1 \dot{\omega}_2 + \omega_2 \dot{\omega}_1) - z_c(\omega_1^2 + \omega_2^2) \\ b_j &= p_i s_{ik} a_{kj} - p_i (a_{1j} \cos \varphi + a_{2j} \sin \varphi) \quad (j=1, 2, 3) \\ p_1 &= \rho \ddot{\rho} - \rho \dot{\vartheta}^2, & p_2 &= \rho \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} + 2\rho \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \\ p_3 &= (\rho \varphi \ddot{\varphi} + 2\rho \dot{\varphi} \dot{\vartheta}) \sin \vartheta + 2\rho \varphi \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \vartheta, & p_4 &= \rho \varphi^2 \sin \vartheta \end{aligned} \quad (1.7)$$

Уравнение связи (1.3) в сферических координатах приобретает вид  $\rho = l(t)$ . Поскольку реакция  $R$  нити направлена вдоль нити, то  $R_\vartheta = R_\varphi = 0$ .

Из равенств (1.4), (1.5), (1.7), а также известных [6] соотношений

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \alpha \sin \gamma \cos \beta + \beta \cos \gamma, \quad \omega_2 = \alpha \cos \gamma \cos \beta - \beta \sin \gamma \\ \omega_3 &= \gamma - \alpha \sin \beta\end{aligned}\quad (1.8)$$

следует, что система уравнений (1.6) замкнута относительно величин  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $R_0$ , если длина  $l(t)$  нити является известной функцией времени. В этом случае аналогично случаю систем со стационарными идеальными связями задача сводится к интегрированию уравнений движения, не содержащих реакции связи, и последующему определению величины реакции. Первое из уравнений (1.6) приводит к следующей формуле для натяжения нити:

$$R_0 = m(\rho'' - \rho\vartheta'^2 - \rho\varphi'^2 \sin^2 \vartheta + s_{1h} a_{hi} u_i) - F_0 + m w_0$$

2. Будем полагать, что тело подвержено действию только силы тяжести, основание совершает движение по вертикали, а центр масс  $C$  тела лежит на оси  $Oz$ . Тогда с помощью равенств (1.4), (1.5) получаем следующие выражения для проекций силы тяжести и ее момента:

$$F_\rho = -m(g + \xi_0'') \cos \vartheta, \quad F_\varphi = m(g + \xi_0'') \sin \vartheta, \quad F_\gamma = 0 \quad (2.1)$$

$$M_x = m(g + \xi_0'') z_C (\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma)$$

$$M_y = m(g + \xi_0'') z_C (\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma), \quad M_z = 0$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\xi_0''$  — ускорение основания по вертикали.

Рассмотрим маятниковые движения нити и тела, при которых центр масс тела все время остается на одной линии с нитью. Уравнения движения системы в вертикальной плоскости, т. е. при  $\beta = \varphi = \gamma = 0$ , с помощью формул (1.4), (1.5), (1.7), (1.8) и (2.1) представляются в виде

$$\rho\vartheta'' + 2\rho\vartheta'\dot{\vartheta} + z_C [\alpha'' \cos(\vartheta - \alpha) + \alpha'^2 \sin(\vartheta - \alpha)] = (g + \xi_0'') \sin \vartheta \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}\theta_{22}\alpha'' + m z_C [(\rho'' - \rho\vartheta'^2) \sin(\vartheta - \alpha) + (\rho\vartheta'' + 2\rho\vartheta'\dot{\vartheta}) \cos(\vartheta - \alpha)] = \\ = m(g + \xi_0'') z_C \sin \alpha, \quad \theta_{12}\alpha'' + \theta_{32}\alpha'^2 = 0, \quad \theta_{32}\alpha'' - \theta_{12}\alpha'^2 = 0\end{aligned}$$

Из последних двух уравнений (2.2) вытекает, что рассматриваемые колебательные движения возможны только при  $\theta_{32} = \theta_{12} = 0$ . Считая эти равенства выполненными, проанализируем случай, когда центр масс тела все время остается на одной линии с нитью и, следовательно,  $\alpha = \vartheta - \pi$ . Система уравнений (2.2) приводит к двум уравнениям относительно одной переменной  $\vartheta$ . Последние уравнения совместны, если выполняется условие

$$m z_C (z_C - \rho) / (\theta_{22} - m z_C \rho) = 1 \quad (2.3)$$

При конечных значениях величины  $\rho$  условие (2.3) не выполняется, так как из него следует равенство нулю центрального момента инерции тела, что невозможно. Однако при  $\rho \rightarrow \infty$  выражение, стоящее слева в (2.3), имеет предел единицу. Следовательно, при достаточно большой длине нити условие (2.3) выполняется сколь угодно точно. Это означает, что если нить достаточно длинна и в начальный момент времени центр масс тела лежит на одной линии с нитью и имеет соответствующую начальную скорость, то и в последующие моменты времени он будет оставаться практически на одной линии с нитью.

Таким образом, при плоских маятниковых колебаниях твердого тела на нити центр масс тела смещается относительно линии нити, но при больших длинах нити эти смещения малы.

3. Проанализируем характер движения тела и нити при равномерном уменьшении длины нити. Положим

$$\rho = l_0 - vt, \quad v = \pi + x_1, \quad \alpha = x_2, \quad \vartheta' = x_3, \quad \alpha' = x_4 \quad (3.1)$$

Здесь  $l_0$  — начальная длина нити,  $v = \text{const}$  — скорость изменения длины нити,  $x_i$  ( $i=1, 4$ ) — вариации координат  $\vartheta$ ,  $\alpha$  и угловых скоростей  $\vartheta'$ ,  $\alpha'$ . При  $\theta_{32} = \theta_{12} = 0$

с учетом соотношений (3.1) из (2.2) получаем следующие уравнения малых колебаний твердого тела на нити около нижнего положения равновесия (основание совершает ускоренное движение по вертикали):

$$\begin{aligned}x_1^{\cdot} &= x_3, & x_2^{\cdot} &= x_4 \\x_3^{\cdot} &= [-(g + \zeta_0^{\cdot\cdot})(1 + mz_c^2/B)x_1 + (g + \zeta_0^{\cdot\cdot})(mz_c^2/B)x_2 + 2vx_3](l_0 - vt)^{-1} \\x_4^{\cdot} &= (g + \zeta_0^{\cdot\cdot})(mz_c/B)(-x_1 + x_2)\end{aligned}\quad (3.2)$$

где  $B$  — центральный момент инерции тела относительно оси  $Cy$ . Уравнения (3.2) представляют собой однородную систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, имеющими особенность в точке  $t = l_0/v$ . Пусть  $\Phi(t)$  — определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнений (3.2). Тогда, применяя формулу Ливуилля, находим, что

$$\Phi(t) = \Phi(0) \exp\left(\int_0^t \frac{2v}{l_0 - v\tau} d\tau\right) = \Phi(0) \left(\frac{l_0}{l_0 - vt}\right)^2 \quad (3.3)$$

Как видно из формулы (3.3), определитель  $\Phi(t)$  при  $t \rightarrow l_0/v$  стремится к бесконечности, из чего следует, что существует по крайней мере одно решение в фундаментальной системе решений, стремящееся при  $t \rightarrow l_0/v$  к бесконечности. Отсюда на основании того, что любое решение линейной системы дифференциальных уравнений является линейной комбинацией фундаментальных решений, а также в силу непрерывной зависимости решений от начальных условий заключаем, что в любой окрестности положения равновесия найдется точка, которой будет соответствовать траектория в фазовом пространстве, уходящая при  $t \rightarrow l_0/v$  в бесконечность. Таким образом, нижнее положение равновесия тела, подвешенного на нити, при равномерном уменьшении длины нити, т. е. при равномерном подъеме тела, является неустойчивым.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сулов Г. К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат. 1946. 655 с.
2. Ишлицкий А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е. О движении осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 6. С. 3–16.
3. Румянцев В. В. К динамике твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 5–15.
4. Рубановский В. Н., Румянцев В. В. О стационарных движениях тяжелого симметричного твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 3–7.
5. Иванов А. П. Об устойчивости перманентных вращений тела, подвешенного на струне, при наличии ударных взаимодействий // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 47–50.
6. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз. 1961. 824 с.

Киев

Поступила в редакцию  
9.VII.1986