

УДК 539.3:62-50

ОБ УПРАВЛЕНИИ РАЗРУШЕНИЕМ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ

ФИЛЬШТИНСКИЙ В. А., ФИЛЬШТИНСКИЙ Л. А.

На примере анизотропной полуплоскости с трещинами-разрезами даются постановки и решения некоторых задач оптимизации коэффициентов интенсивности напряжений, а также потока энергии в вершину трещины. В качестве управления принимается интенсивность нагрузки, действующей на участках границы полуплоскости. По существу отрабатываются подходы к оптимальному (в том или ином смысле) управлению функционалами, отвечающими за разрушение тела внешними полями различной физической природы.

1. Прямая задача. Рассмотрим анизотропную полуплоскость $y \geq 0$, ослабленную трещинами-разрезами L_j ($j=1, 2, \dots, n$). Пусть к участкам границы полуплоскости U и V приложены соответственно нормальные $P(x)$ и касательные $Q(x)$ распределенные усилия, а берега разрезов свободны от сил. Прямая задача теории упругости заключается в определении характеристик напряженно-деформированного состояния и параметров, регламентирующих разрушение тела в вершине трещины: коэффициентов интенсивности напряжений, потока энергии в вершину и т.п.

Задача, близкая к поставленной выше, рассматривалась в [1]. Ее решение можно представить в виде

$$r_1(t) = \Omega_0(\beta) (1 - \beta^2)^{-1/2} (t = t(\beta), -1 \leq \beta \leq 1) \quad (1.1)$$

$$\Omega_0(\beta) = \int_U P(x) \Omega_0^{(2)}(\beta, x) dx + \int_V Q(x) \Omega_0^{(1)}(\beta, x) dx$$

где функции $\Omega_0^{(k)}(\beta, x)$ определяются системой уравнений [1]. Коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах L_j на основании [2] и (1.1) определяются как линейные функционалы вида

$$K_i^{(j)\pm} = \int_U P(x) f_i^{(j)}(\pm 1, x) dx + \int_V Q(x) g_i^{(j)}(\pm 1, x) dx \quad (1.2)$$

$$f_i^{(j)}(\pm 1, x) = \text{Im} \{R_i \Omega_0^{(2)}(\pm 1, x)\}, g_i^{(j)}(\pm 1, x) = \text{Im} \{R_i \Omega_0^{(1)}(\pm 1, x)\}$$

$$R_i = \mp 2\sqrt{\pi s'(\pm 1)} (\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1) (\mu_2 - \bar{\mu}_2)^{-1} a_1(\psi_0) a_2(\psi_0 + 1/2\pi\delta_2^i),$$

$$\delta_2^1 = 0, \delta_2^2 = 1 \quad (i=1, 2; j=1, 2, \dots, n)$$

Верхний знак соответствует $c=t(1)=b$, нижний — вершине $c=t(-1)=-a$; индекс j у величин $\Omega_0^{(i)}$ и R_i опущен.

Поток энергии в вершину трещины [3] определяется с учетом асимптотики полей напряжений и перемещений в окрестности вершины [2] следующим квадратичным функционалом (по повторяющимся индексам здесь и далее производится суммирование):

$$G = A d_{km} x_k x_m \quad (k, m=1, 2), \alpha = \mu_1 - \bar{\mu}_2, \beta = \mu_2 - \mu_1 \quad (1.3)$$

$$d_{11} = |\alpha|^2 + \text{Re}(\alpha\beta), d_{22} = |\alpha|^2 - \text{Re}(\alpha\beta), d_{12} = d_{21} = -\text{Im}(\alpha\beta)$$

$$A = 1/4\pi a_{11} |\mu_2 - \mu_1|^2 (\text{Im } \mu_2)^{-1}, \text{Im } \mu_1 > 0, \text{Im } \mu_2 > 0$$

$$x_m = \int_U P(x) r_m(\pm 1, x) dx + \int_V Q(x) h_m(\pm 1, x) dx$$

$$r_1 + ir_2 = a_1(\psi_c) \Omega_0^{(2)}(\pm 1, x), \quad h_1 + ih_2 = a_1(\psi_c) \Omega_0^{(1)}(\pm 1, x).$$

Квадратичная форма (1.3) строго положительно-определенная. Это следует из положительности главных миноров $d_{11} = 2 \operatorname{Im} \alpha \operatorname{Im} \mu_1 > 0$, $d_{11}d_{22} - d_{12}^2 = 4|\alpha|^2 \operatorname{Im} \mu_1 \operatorname{Im} \mu_2 > 0$. Отметим также, что, как следует из (1.2), для фиксированной трещины существуют отличные от нуля распределения $P(x)$ и $Q(x)$, для которых параметры разрушения во всех вершинах L_j равны нулю. В дальнейшем такие нагрузки исключаются из рассмотрения.

2. Оптимизация. При воздействии на конструкцию механических нагрузок или вообще полей различной физической природы все характеристики напряженно-деформированного состояния являются функционалами, определенными на допустимом множестве внешних воздействий. Это позволяет поставить и решить ряд простейших оптимизационных задач, иллюстрирующих возможности управления разрушением за счет внешних полей.

Пусть $\alpha_{ij} \geq 0$ заданы. Рассмотрим функционал

$$J(P, Q) = \sum_{j=1}^n (\alpha_{ij}^+ K_i^{(j)+} + \alpha_{ij}^- K_i^{(j)-}) \quad (i=1, 2) \quad (2.1)$$

где $K_i^{(j)\pm}$ определены в (1.2), $J: M \rightarrow R$, M — пространство кусочно-непрерывных функций.

Введем подпространства (A, B, C, D — заданные функции):

$$M_p = \{P(x) \in M : 2A(x) \leq P(x) \leq 2B(x), \quad x \in U\}$$

$$M_q = \{Q(x) \in M : 2C(x) \leq Q(x) \leq 2D(x), \quad x \in V\}$$

Задача A_1 . Найти точку $(P^0, Q^0) \in M_p \times M_q$, такую, что $|J(P, Q)| \leq |J(P^0, Q^0)|$, $V(P, Q) \in M_p \times M_q$.

Решение. Учитывая (1.2), запишем функционал $J(P, Q)$ в виде

$$J(P, Q) = \int_U f(x) P(x) dx + \int_V g(x) Q(x) dx \quad (2.2)$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^n (\alpha_{ij}^+ f_i^{(j)}(1, x) + \alpha_{ij}^- f_i^{(j)}(-1, x)) \quad (i=1, 2)$$

$$g(x) = \sum_{j=1}^n (\alpha_{ij}^+ g_i^{(j)}(1, x) + \alpha_{ij}^- g_i^{(j)}(-1, x)) \quad (i=1, 2)$$

Введем функции $P_1(x) = P(x) - (A+B)$, $|P_1(x)| \leq B-A=B_1(x)$, $Q_1(x) = Q(x) - (C+D)$, $|Q_1(x)| \leq D-C=D_1(x)$. Оценка левой части (2.2) дает

$$|J| \leq |\gamma| + \int_U B_1(x) |f(x)| dx + \int_V D_1(x) |g(x)| dx$$

$$\gamma = \int_U (A+B) f(x) dx + \int_V (C+D) g(x) dx \quad (2.3)$$

Точное равенство в (2.3) достигается на функциях $P_1^0(x) = B_1(x) \operatorname{sign}(\gamma f(x))$, $Q_1^0(x) = D_1(x) \operatorname{sign}(\gamma g(x))$. Следовательно, решение имеет вид

$$P^0(x) = A(x) + B(x) + [B(x) - A(x)] \operatorname{sign}(\gamma f(x)) \quad (x \in U)$$

$$Q^0(x) = C(x) + D(x) + [D(x) - C(x)] \operatorname{sign}(\gamma g(x)) \quad (x \in V)$$

В случае симметричных ограничений $A=-B$, $C=-D$ в чебышевской метрике $|P(x)| \leq 2B$, $|Q(x)| \leq 2D$ имеем $P^0(x) = 2B(x) \operatorname{sign} f(x)$, $Q^0(x) = 2D(x) \operatorname{sign} g(x)$. Аналогичные соображения имеют место и в других функциональных пространствах.

Задача A_2 . Максимизировать $|J(P, Q)|$ при ограничениях

$$\|P\|_{L^p(U)} \leq I_1, \quad \|Q\|_{L^{p'}(V)} \leq I_2 \quad (p, p' > 1) \quad (2.4)$$

Решение. К правой части неравенства $|J(P, Q)| \leq \int_U |f(x)| |P(x)| dx + \int_V |g(x)| |Q(x)| dx$ применим неравенство Гельдера [4]. Получим

$$|J(P, Q)| \leq \|f\|_{L^q(U)} I_1 + \|g\|_{L^{q'}(V)} I_2 \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1, p'^{-1} + q'^{-1} = 1) \quad (2.5)$$

Точное равенство, как легко проверить, достигается на функциях

$$P^0(x) = I_1 \|f\|_{L^q(U)}^{-q/p} |f|^{q-1} \operatorname{sign} f(x), \quad Q^0(x) = I_2 \|g\|_{L^{q'}(V)}^{-q'/p'} |g|^{q'-1} \operatorname{sign} g(x) \quad (2.6)$$

При этом ограничения (2.4) выполняются. Следовательно, экстремальными являются функции (2.6), $\max |J(P, Q)| = |J(P^0, Q^0)|$ дается правой частью неравенства (2.5).

В рассмотренных задачах максимизируется линейная комбинация коэффициентов интенсивности напряжений по всем трещинам при определенных ограничениях на управляющие функции $P(x)$, $Q(x)$. Ниже рассмотрим два варианта двойственной задачи, в которых минимизируются «энергетические» затраты на управление при заданной линейной комбинации (2.4).

Задача A_3 . Найти (константы γ, δ, c заданы):

$$\min_{(P, Q) \in (I_2)} \left[\gamma \int_U P^2(x) dx + \delta \int_V Q^2(x) dx \right] \quad (\gamma \geq 0, \delta \geq 0) \\ (I_2) = \{(P, Q) : P \in L^2(U), Q \in L^2(V), \alpha + \beta = c\} \quad (2.7)$$

$$\alpha = \int_U P(x) f(x) dx, \quad \beta = \int_V Q(x) g(x) dx$$

Решение. Разложим $L^2(U)$ (соответственно $L^2(V)$) в ортогональную сумму одномерного подпространства с базисом $\{f\}$ (соответственно $\{g\}$) и его ортогонального дополнения. Тогда [4]:

$$P(x) = af(x) + h, \quad Q(x) = bg(x) + h^*, \quad (f, h) = (g, h^*) = 0 \quad (2.8)$$

$$a\|f\|^2 + b\|g\|^2 = c, \quad \mu(P, Q) = \gamma\|P\|^2 + \delta\|Q\|^2 = \gamma(a^2\|f\|^2 + \|h\|^2) + \\ + \delta(b^2\|g\|^2 + \|h^*\|^2) \geq \gamma a^2\|f\|^2 + \delta b^2\|g\|^2 \quad (\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2})$$

Отсюда следует, что

$$\min_{(P, Q) \in (I_2)} \mu(P, Q) = \min \Phi(a, b), \quad \Phi(a, b) = \mu(af, bg), \quad a\|f\|^2 + b\|g\|^2 = c$$

Таким образом, необходимо найти минимум функции двух переменных $\Phi(a, b)$ при наличии связи (2.8). Решение этой элементарной задачи имеет вид

$$\min_{(P, Q) \in (I_2)} \mu(P, Q) = \mu(P^0, Q^0) = \gamma\delta c^2 D$$

$$P^0(x) = c\delta D f(x) \quad (x \in U), \quad Q^0(x) = c\gamma D g(x) \quad (x \in V)$$

$$D = (\delta\|f\|^2 + \gamma\|g\|^2)^{-1}, \quad \|f\| = \|f\|_{L^2(U)}, \quad \|g\| = \|g\|_{L^2(V)}$$

Задача A_4 . Найти $\min_{(P, Q) \in (I_\infty)} \{\max [\gamma \sup_U |P(x)|, \delta \sup_V |Q(x)|]\}$ ($\gamma, \delta \geq 0$), $(I_\infty) = \{(P, Q) : P \in L^\infty(U), Q \in L^\infty(V), \alpha + \beta = c\}$, где γ, δ, c — заданные константы.

Решение проведем для случая $c > 0$. Величины α и β определены в (2.7), неравенство Гельдера в этом случае дает $|\alpha| \leq \|P\|_\infty \|f\|_1$, $|\beta| \leq \|Q\|_\infty \|g\|_1$ ($\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{L^\infty}$, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{L^1}$).

Следовательно

$$v(P, Q) = \max\{\gamma \|P\|_\infty, \delta \|Q\|_\infty\} \geq \max\{\gamma_1 |\alpha|, \delta_1 |c - \alpha|\} = \\ = v_1(\alpha), \quad \gamma = \gamma_1 \|f\|_1, \quad \delta = \delta_1 \|g\|_1$$

Функция $v_1(\alpha) \geq 0$ кусочно линейна, поэтому ее минимальное значение должно достигаться в угловой точке α^0 , определяемой равенством $\gamma_1 |\alpha^0| = \delta_1 |c - \alpha^0|$. Здесь следует рассмотреть два случая: $\gamma_1 = \delta_1$ и $\gamma_1 \neq \delta_1$. После соответствующего анализа приходим к результату

$$P^0(x) = \alpha^0 \operatorname{sign} f(x) / \|f\|_1, \quad Q^0(x) = (c - \alpha^0) \operatorname{sign} g(x) / \|g\|_1 \\ \min_{(P, Q) \in (I_\infty)} v(P, Q) = v(P^0, Q^0) = c \gamma \delta (\delta \|f\|_1 + \gamma \|g\|_1)^{-1} \\ \alpha^0 = c \delta_1 (\delta_1 + \gamma_1)^{-1}$$

Выше рассматривалась линейная комбинация коэффициентов интенсивности, что не давало возможности контролировать условия разрушения в вершине каждой трещины. Между тем представляет интерес создание, например, таких условий когда трещина «запирается» в вершине.

Обозначим

$$K_1^{(j)+} = \lambda_j, \quad K_2^{(j)+} = \lambda_{n+j}, \quad K_1^{(j)-} = \lambda_{2n+j}, \quad K_2^{(j)-} = \lambda_{3n+j}, \quad f_1^{(j)+} = f_j, \quad f_2^{(j)+} = f_{n+j}, \\ f_1^{(j)-} = f_{2n+j}, \quad f_2^{(j)-} = f_{3n+j} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

и положим $Q(x) = 0$. Тогда формулы (1.2) можно представить в виде уравнений связи $\lambda_m = (P, f_m)$ ($m=1, 2, \dots, 4n$). Будем предполагать, что система $\{f_m\}$ линейно независима.

Задача B₁. Найти $\min \|P\|$ на множестве $(I) = \{P : P \in L^2(U), (P, f_m) = \lambda_m, m=1, 2, \dots, 4n\}$. Физически это означает, что необходимо найти такое управление $P(x)$, при котором коэффициенты интенсивности напряжений принимали бы заданные значения λ_m . При этом норма управления, характеризующая энергетические затраты, должна быть минимальной.

Решение. Разложим $L^2(U)$ в ортогональную сумму конечномерного подпространства с базисом $\{f_m\}$ и его ортогонального дополнения. Имеет место представление

$$P(x) = c_m f_m(x) + h, \quad (h, f_m) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, 4n) \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в уравнения связи, приходим к системе линейных уравнений относительно коэффициентов c_m :

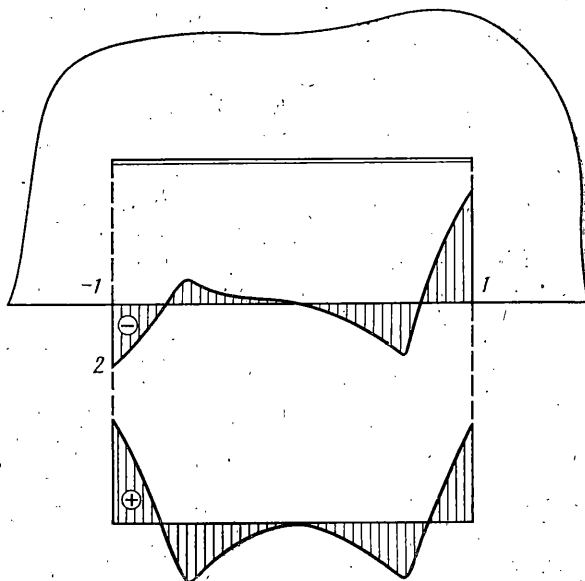
$$\sum_{m=1}^{4n} c_m (f_m, f_k) = \lambda_k \quad (k=1, 2, \dots, 4n) \quad (2.10)$$

Эта система однозначно разрешима, так как определитель Грама отличен от нуля. Далее имеем $\|P\|^2 = \|c_m f_m\|^2 + \|h\|^2 \rightarrow \min$ ($m=1, 2, \dots, 4n$). Отсюда заключаем, что $h=0$. Таким образом, экстремальный элемент $P^0(x)$ вычисляется по формуле (2.9) с коэффициентами c_m , определяемыми из системы (2.10).

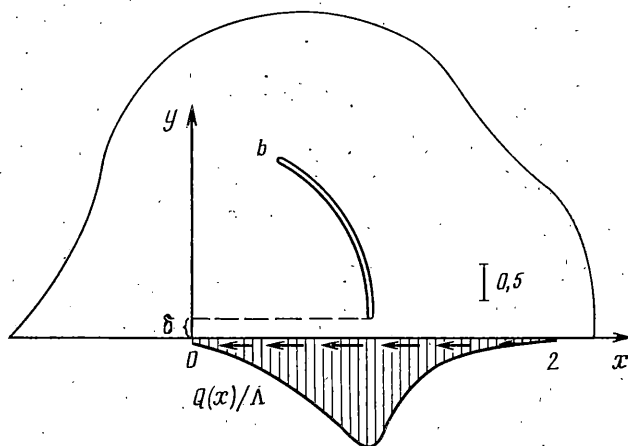
В условиях сложного нагружения целесообразно оптимизировать не коэффициенты интенсивности напряжений, а поток энергии в вершину трещины. Положим, что $P(x) \equiv 0$ и имеется лишь одна трещина.

Задача C₁. Найти $\max G(Q)$ на множестве $(I) = \{Q : Q \in L^2(V), \|Q\| \leq \Lambda\}$. Физически это означает максимизацию потока энергии в одну из вершин трещины при указанных ограничениях на управление.

Решение. Согласно теореме Куна — Таккера [5], в седловой точке (Q^0, λ^0) функционала Лагранжа имеют место соотношения $F'(Q^0, \varphi) = 0, \forall \varphi \in$



Фиг. 1



Фиг. 2

$\in L^2(V)$, $\lambda^0(\|Q^0\| - \Lambda) = 0$, $\lambda^0 \geq 0$, $F(Q) = -G(Q) + \lambda(\|Q\| - \Lambda)$. Здесь $F'(Q, \varphi)$ — производная по Гато [5].

Выполняя дифференцирование входящих в $F(Q)$ функционалов используя (1.3) и произвольность φ , приходим к соотношению

$$d_{km}h_m(1, x)x_k^{-1/2}\lambda Q(x)(\Lambda\|Q\|)^{-1} = 0 \quad (k, m=1, 2) \quad (2.11)$$

Отсюда следует «энергетическое» равенство

$$\max G = \Lambda d_{km}x_k^0 x_m^0 = 1/2 \lambda^0 \|Q^0\|$$

В силу строгой положительной определенности квадратичной формы (1.3) заключаем, что $\lambda^0 > 0$ и, стало быть, $\|Q^0\| = \Lambda$.

Равенство (2.11) равносильно интегральному уравнению с разделяющимся ядром $\int Q(\xi)g(x, \xi)d\xi - 1/2\lambda Q(x)/(\Lambda\Lambda) = 0$, $g(x, \xi) = d_{km}h_m(1, x)h_k(1, \xi)$ ($k, m=1, 2$), решение которого элементарно. Собственная функция $Q^0(x)$, соответствующая положительному характеристическому числу λ^0 , фиксируется ограничением $\|Q^0\| = \Lambda$.

Задачи семейств A_i , B_i , C_i можно обобщить в различных направлениях, приближая постановку к реальным условиям функционирования элементов конструкций.

3. **Примеры.** Рассмотрим полубесконечную пластинку из борозпоксидного композита (БКМ) с параметрами $\mu_1=0,62i$, $\mu_2=5,12i$, ослабленную дуговой трещиной $\xi=R \cos[0,5(1+\beta)\psi]$, $\eta=\delta+R \sin[0,5(1+\beta)\psi]$, $-1 \leq \beta \leq 1$. В первом случае максимизируется коэффициент интенсивности K_1^- , во втором K_2^- (на нижнем кончике трещины). При этом управление осуществляется только функцией $P(x)$, ($|P(x)| \leq 1$, $Q(x) \equiv 0$), либо функцией $Q(x)$ ($|Q(x)| \leq 1$, $P(x) \equiv 0$). При $R=1$, $\delta=0,1$, $\psi=\pi/3$ и $U, V=[0, 2]$ получаем в первом случае $P(x)=1$ ($0 \leq x \leq 0,9$), $P(x)=-1$ ($0,9 < x \leq 2$), $Q(x)=-1_2$ ($0 \leq x \leq 0,3$), $Q(x)=1_2$ ($0,3 < x \leq 2$). Во втором случае $P(x)$ имеет тот же вид, а $Q(x)$ определяется формулой $Q(x)=-1_2$ ($0 \leq x \leq 0,1$; $1,6 \leq x \leq 2$), $Q(x)=1_2$ ($0,1 < x < 1,6$). Здесь использовалось решение задачи A_1 при $n=1$ и соответствующих значениях коэффициентов α_{ij}^\pm .

Следующий пример относится к задаче B_1 . Пусть в полуплоскости из БКМ имеется горизонтальная трещина длиной $2l=2$ на расстоянии $\delta=2$ от границы. Требуется за счет управления $P(x)$ с минимальной нормой в первом случае «запереть» трещину на левом конце ($K_1^-=K_2^-=0$), а на правом конце получить $K_1^+=0,5$, $K_2^+=0$, во втором $K_1^+=K_1^-=1$, $K_2^\pm=0$. Результаты показаны на фиг. 1. Верхняя эпюра соответствует первому случаю, нижняя – второму.

Наконец, третий пример относится к задаче C_1 . В полуплоскости из БКМ с дуговой трещиной максимизировать поток энергии в вершину трещины b за счет $Q(x)$, причем $\|Q\| \leq \Delta$. Результаты приведены на фиг. 2.

Полученные решения иллюстрируют эффективность управления параметрами разрушения за счет внешних полей.

Авторы благодарят Н. В. Тыркусову за помощь при численной реализации алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фильштинский Л. А. Краевые задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или разрезом // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 72–79.
2. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 5. С. 91–97.
3. Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамическая механика разрушения. М.: Машиностроение. 1985. 263 с.
4. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука. 1965. 520 с.
5. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир. 1973. 244 с.

Харьков, Сумы

Поступила в редакцию
21.V.1987