

УДК 539.214

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

ШВАБ А. А.

В практике обработки экспериментальных данных или при диагностике действующих объектов возникают задачи, связанные с оценкой напряженно-деформированного состояния исследуемого объекта. Решение таких задач в рамках известных постановок вызывает определенные трудности из-за отсутствия экспериментальных данных, необходимых для формулировки краевых (классических) условий. Подобные ситуации возникают, например, в задачах геомеханики, когда восстанавливается поле напряжений около подземных сооружений по измерениям смещений на внутренней, свободной от нагрузок поверхности; в контактных задачах, когда по экспериментальным замерам перемещений около штампа оценивается поле напряжений в зоне контакта. Перечисленные примеры объединяет переопределенность краевых условий на части границы.

В предлагаемой работе рассматривается класс неклассических упругопластических задач с переопределенными условиями на части границы и неопределенными на другой ее части.

1. Рассмотрим упругопластическое тело, занимающее область V с поверхностью S . На части поверхности $S_{u\sigma}$ будем считать заданными \mathbf{P} — вектор нагрузки и \mathbf{U} — вектор смещения

$$\mathbf{U}(t) = (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbf{P}(t) = (p_1, p_2, p_3) \quad (x \in S_{u\sigma}) \quad (1.1)$$

где t — параметр нагружения, $x = (x_1, x_2, x_3)$ — точка в декартовой системе координат. Полагаем, что поверхность S кусочно-гладкая, $\mathbf{U}, \mathbf{P} \in C^2$. Пусть $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3)$ ($i=1, 2, 3$) — ортогональные криволинейные координаты, такие, что поверхность $a_3(x_1, x_2, x_3) = 0$ совпадает с $S_{u\sigma}$ и $|\partial u_i / \partial x_j| \neq 0$ ($i, j=1, 2, 3$). Введем

Определение. Назовем задачей (\mathbf{U}, \mathbf{P}) задачу определения полей напряжений и деформаций в теле при условиях (1.1).

Ввиду переопределенности условий на $S_{u\sigma}$ рассмотрим задачу о построении полей напряжений и деформаций на поверхности $S_{u\sigma}$, исходя только из условий (1.1).

В системе координат a_i из условия (1.1) могут быть определены части компонент тензоров деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} . Так, дифференцируя $\mathbf{U}(t)$ вдоль $S_{u\sigma}$, находятся производные $\partial u_j / \partial a_j, \partial u_j / \partial a_i$ ($i=1, 2; j=1, 2, 3$), подставляя которые в соотношения Коши для деформаций [1], найдем значения $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$. Здесь и в дальнейшем точка сверху означает дифференцирование по t . Записывая $\mathbf{P}(t)$ как $P_i = \sigma_{ij} n_j$ на $S_{u\sigma}$, где n_j — компоненты вектора нормали \mathbf{n} к $S_{u\sigma}$, на $S_{u\sigma}$ получим $\sigma_{i3} = P_i(t)$ ($i=1, 2, 3$). Следовательно, на $S_{u\sigma}$ остаются неопределенными $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$. Будем полагать, что $\varepsilon_{ij} = 0$ при $t=0$, а при $0 \leq t \leq t_0$ пластические деформации в точке отсутствуют, т. е. $\varepsilon_{ij}^p = 0$. Значение t_0 определяет начало пластического течения.

Определим неизвестные компоненты $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ на $S_{u\sigma}$. Согласно ассоциированному закону пластического течения, связь между компонентами ε_{ij} и σ_{ij} представим в форме [2]:

$$\varepsilon_{ij}^* = A_{ijdq} \sigma_{dq} + \lambda \partial f / \partial \sigma_{ij}, \quad f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (i, j, d, q=1, 2, 3) \quad (1.2)$$

Здесь $f(\sigma_{ij})$ — пластический потенциал, A_{ijdq} — тензор модулей упругости. Используя (1.2), для деформаций запишем $\varepsilon_{kl} = A_{klmn} \sigma_{mn} + A_{klq3} \sigma_{q3} +$

$\pm \lambda \partial f / \partial \sigma_{kl}$ ($k, l, m, n=1, 2; q=1, 2, 3$). Заметим, что A_{klmn} ($k, l, m, n=1, 2$) образуют матрицу положительно-определенной квадратичной формы. Следовательно, матрица $\|B_{klmn}\| = \|A_{klmn}\|^{-1}$ также является матрицей положительно-определенной квадратичной формы. Для неизвестных компонент σ_{kl} ($k, l=1, 2$) на S_{uc} получим

$$\begin{aligned} \sigma_{kl} &= B_{klmn} (\varepsilon_{mn} - A_{nmq3} \sigma_{q3}) - \lambda B_{nmkl} \partial f / \partial \sigma_{nm} \\ f(\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, \sigma_{kl}) &= 0 \quad (k, l, m, n=1, 2; q=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Разрешим (1.3) относительно σ_{kl} . При развитии пластического течения $f = (\partial f / \partial \sigma_{q3}) \sigma_{q3} + (\partial f / \partial \sigma_{kl}) \sigma_{kl} = 0$. Домножая первое соотношение (1.3) на $\partial f / \partial \sigma_{kl}$, затем суммируя по k, l и подставляя в $f = 0$, получим

$$\lambda = \left(B_{nmkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{nm}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{q3}} \sigma_{q3} + B_{nmkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} (\varepsilon_{nm} - A_{nmq3} \sigma_{q3}) \right] \quad (1.4)$$

Из свойств матрицы $\|B_{nmkl}\|$ следует, что $B_{nmkl} \partial f / \partial \sigma_{nm} \partial f / \partial \sigma_{kl} > 0$, кроме случая, когда $\partial f / \partial \sigma_{kl} = 0$ ($k, l, m, n=1, 2$). Подставляя λ в (1.3), для неизвестных компонент σ_{kl} будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{kl}(t) &= B_{nmkl} (\varepsilon_{nm} - A_{nmq3} \sigma_{q3}) - F_{kl}(t, \sigma_{nm}) \\ F_{kl}(t, \sigma_{nm}) &= B_{nmkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{nm}} \left(B_{nmkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{nm}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{q3}} \sigma_{q3} + \right. \\ &\left. + B_{nmkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} (\varepsilon_{nm} - A_{nmq3} \sigma_{q3}) \right] \quad (k, l, m, n=1, 2; q=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для изотропной среды коэффициенты B_{nmkl}, A_{nmq3} принимают значения: $B_{1111} = B_{2222} = E / (1 - \nu^2)$, $B_{1122} = B_{2211} = \nu E / (1 - \nu^2)$, $B_{1212} = E / (1 + \nu)$, $A_{1133} = A_{2233} = -\nu / E$, где E — модуль упругости Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Остальные несимметричные с перечисленными коэффициенты B_{nmkl}, A_{nmq3} равны нулю. Условия разрешимости (1.5) следуют из теоремы Пикара и в данном случае соответствуют ограниченности функций $\partial^2 f / \partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{ij}$. Начальные условия для (1.5) берутся с момента t_0 . При $t \leq t_0$, σ_{kl} ($k, l=1, 2$) находятся из (1.3) при $\lambda = 0$. Момент t_0 определяется условием $f = 0$.

Интегрирование (1.5) ведется при $\lambda \geq 0$. Если с момента t_1 $\lambda < 0$, т. е. происходит разгрузка, то для σ_{kl} приходим к соотношениям, следующим из закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{kl}(t) &= B_{nmkl} [\varepsilon_{nm}(t) - \varepsilon_{nm}(t_1) + A_{nmq3} (\sigma_{q3}(t_1) - \sigma_{q3}(t))] + \sigma_{kl}(t_1) \\ &\quad (k, l, m, n=1, 2; q=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Если с момента t_2 $\lambda(t) > 0$, то приходим к (1.5) с начальными условиями при $t = t_2$.

Неизвестные компоненты ε_{ij} определяются из соотношения (1.2), а при разгрузке — из соотношения

$$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(t_1) + A_{ijdq} [\sigma_{dq}(t) - \sigma_{dq}(t_1)] \quad (i, j, d, q=1, 2, 3) \quad (1.7)$$

Пусть $\partial f / \partial \sigma_{kl} = 0$ ($k, l=1, 2$). Очевидно, в этом случае уравнения (1.5) нельзя использовать. Из (1.3) имеем $\sigma_{kl} = B_{nmkl} (\varepsilon_{nm} - A_{nmq3} \sigma_{q3})$ ($k, l, m, n=1, 2; q=1, 2, 3$). После определения σ_{kl} из (1.2) восстанавливаются неизвестные ε_{ij} .

Следует отметить, что в угловых точках поверхности $f = 0$, если они существуют, система уравнений (1.5) неразрешима.

Отметим, что, задавая $U(t), P(t)$ на S_{uc} , можно проследить за изменением $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ и эволюцией зон пластичности на S_{uc} . Если S_{uc} соответствует границе концентратора, то вполне возможно, что информация о $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ на S_{uc} окажется исчерпывающей, т. е. не потребуются решения задачи в целом.

2. Рассмотрим постановку краевой задачи (U, P) и некоторые методы ее решения. Сформулируем условия на $S_{u\sigma}$ для ε_{ij} , σ_{ij} для задачи (U, P). Как было отмечено в п. 1, из (1.1) восстанавливаются $\varepsilon_{ij}(t)$, $\sigma_{ij}(t)$, а следовательно, и $\partial^N \sigma_{ij} / \partial a_k^N$, $\partial^N \varepsilon_{ij} / \partial a_k^N$ ($k=1, 2$; $N=1, 2, \dots$). Найдем $\partial \sigma_{ij} / \partial n$, $\partial \varepsilon_{ij} / \partial n$. Учитывая, что $\partial \sigma_{ij} / \partial n = H_3^{-1} \partial \sigma_{ij} / \partial a_3$, $\partial \varepsilon_{ij} / \partial n = H_3^{-1} \partial \varepsilon_{ij} / \partial a_3$, где H_3 — параметр Ламе, достаточно восстановить $\partial \sigma_{ij} / \partial a_3$, $\partial \varepsilon_{ij} / \partial a_3$ на $S_{u\sigma}$.

Предварительно определим значения $\partial \sigma_{ij} / \partial a_3$, $\partial \varepsilon_{ij} / \partial a_3$ на $S_{u\sigma}$ на момент $t \leq t_0$, т. е. до начала пластического течения. Так, из соотношений Коши для деформаций ε_{q3} ($q=1, 2, 3$) могут быть получены зависимости вида $\partial u_i / \partial a_3 = f_i(\varepsilon_{ij}, u_j, \partial u_j / \partial a_k)$ ($i, j=1, 2, 3$; $k=1, 2$). Значения функций f_i на $S_{u\sigma}$ определяются условиями (1.1). Представим уравнения Ламе теории упругости для перемещений в форме $\partial^2 u_i / \partial a_3^2 = F_i(u_j, \partial u_j / \partial a_q, \partial^2 u_j / \partial a_l^2)$ ($i, j, q=1, 2, 3$; $l=1, 2$). Видно, что значения функций F_i на $S_{u\sigma}$ могут быть выражены через f_i и условия (1.1). Следовательно, на $S_{u\sigma}$ из уравнений равновесия находятся $\partial^2 u_i / \partial a_3^2$ ($i=1, 2, 3$). Дифференцируя по a_3 компоненты ε_{ij} и σ_{ij} , представленные через функции u_k ($k=1, 2, 3$), получим соотношение для $\partial \sigma_{ij} / \partial a_3$, $\partial \varepsilon_{ij} / \partial a_3$ на момент $t \leq t_0$.

Пусть $t \geq t_0$, т. е. развивается пластическое течение. Запишем уравнения равновесия в форме $\partial \sigma_{q3} / \partial a_3 = \Phi_q(\sigma_{ij}, \partial \sigma_{ij} / \partial a_k)$ ($i, j, q=1, 2, 3$; $k=1, 2$). Ввиду определенности Φ_q на $S_{u\sigma}$ следует, что из уравнений равновесия могут быть восстановлены $\partial \sigma_{q3} / \partial a_3$ ($q=1, 2, 3$) на $S_{u\sigma}$. Из соотношений Коши для ε_{q3} ($q=1, 2, 3$), представленных в форме $\partial u_i / \partial a_3 = f_i(\varepsilon_{ij}, u_j, \partial u_j / \partial a_l)$ ($i, j=1, 2, 3$; $l=1, 2$), следуют значения для $\partial u_i / \partial a_3$, $\partial^2 u_i / \partial a_3 \partial a_k$ ($k=1, 2$) на $S_{u\sigma}$. Таким образом, на $S_{u\sigma}$ из (1.1) находятся $\partial \sigma_{q3} / \partial a_3$, $\partial \varepsilon_{kl} / \partial a_3$ ($q=1, 2, 3$; $k, l=1, 2$).

Продифференцируем (1.5) по a_3 :

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial a_3} = B_{nmkl} \left(\frac{\partial \varepsilon_{nm}}{\partial a_3} - A_{nmq3} \frac{\partial \sigma_{q3}}{\partial a_3} \right) - \frac{\partial F_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a_3} \quad (2.1)$$

$$(k, l, m, n=1, 2; \quad i, j, q=1, 2, 3)$$

Соотношения (2.1) представляют систему уравнений относительно $\partial \sigma_{kl} / \partial a_3$ на $S_{u\sigma}$. Условие разрешимости для (2.1) совпадает с условием для (1.5). Начальные условия для $\partial \sigma_{kl} / \partial a_3$ берутся на момент $t=t_0$. Разрешая (2.1), а затем дифференцируя (1.2) по a_3 и интегрируя по t , получим выражение для неизвестных $\partial \varepsilon_{q3} / \partial a_3$ ($q=1, 2, 3$) на $S_{u\sigma}$.

Таким образом, задача (U, P) эквивалентна задаче Коши для соотношений относительно ε_{ij} или σ_{ij} , т. е. задаче восстановления полей ε_{ij} , σ_{ij} в теле по значениям σ_{ij} , $\partial \sigma_{ij} / \partial n$, ε_{ij} , $\partial \varepsilon_{ij} / \partial n$ на $S_{u\sigma}$.

Рассмотрим вопрос о продолжении решения с $S_{u\sigma}$. Все соотношения при нахождении σ_{ij} , ε_{ij} на $S_{u\sigma}$ выписаны для бесконечно малого объема, при этом нигде не накладывалось условие согласования на функции U, P, необходимые для корректной разрешимости задачи (U, P) в целом. Очевидно, что в общем случае функции U, P не могут быть произвольны на $S_{u\sigma}$. Так, например, если $S_{u\sigma}$ совпадает с S, то из соображений, приведенных в [2], на основании постулата Друккера должно быть выполнено условие $\int_S U \cdot P dS \geq 0$, которое естественно ограничивает произвол в задании функций U, P на $S_{u\sigma}$, но никак не влияет на локальную разрешимость на $S_{u\sigma}$. Аналогично в случае гиперболичности исходных уравнений (плоская задача), если характеристики уравнений пластичности пересекают $S_{u\sigma}$ более одного раза, то функции U, P также должны быть связаны на $S_{u\sigma}$. В общем случае получение необходимых ограничений не представляется возможным ввиду явной зависимости свойств исходных уравнений от условия пластичности и вида напряженного состояния. Поэтому ограничения на U, P следуют из рассмотрения особенностей конкретной задачи.

Отметим также, что функции U, P, определяющие краевые условия для задачи (U, P), для конкретных расчетов восстанавливаются из экспериментальных данных, т. е. измеренные значения U, P на $S_{u\sigma}$ не являются произвольными, а соответствуют реальному напряженно-деформи-

рованному состоянию тела. Другими словами, их можно считать согласованными в смысле существования решения задачи (U, P) . Если при решении (на базе экспериментальных данных), тем не менее, возникнут противоречия математического характера, то их следует отнести к неадекватности модели реальному поведению среды или к неточности измерений значений U, P на S_{uc} . В данной работе полагается, что подобные противоречия отсутствуют. Из сказанного следует, что целесообразно понимать в дальнейшем под корректностью задачи (U, P) корректность по А. Н. Тихонову [3].

Согласно [3], с целью упрощения нахождения решения условно корректных задач можно из разумных предположений заранее выделить класс искомых решений. В подтверждение сказанного рассмотрим случай, когда искомое решение принадлежит классу аналитических функций. Докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть $U, P \in C^\infty$, тогда на любой момент $t > 0$ из (1.1) определяются $\partial^N \sigma_{ij} / \partial a_3^N$, $\partial^N \epsilon_{ij} / \partial a_3^N$ ($i, j = 1, 2, 3$; $N = 1, 2, \dots$) на S_{uc} .

Доказательство. 1. Покажем, что из условий теоремы следует, что для чисто упругого состояния, т. е. при $t \leq t_0$, на S_{uc} восстанавливаются $\partial^N \sigma_{ij} / \partial a_3^N$, $\partial^N \epsilon_{ij} / \partial a_3^N$ ($N = 1, 2, \dots$). Так, дифференцируя уравнения Ламе по a_3 , получим $\partial^3 u_i / \partial a_3^3 = \partial F_i / \partial a_3$. Значения $\partial F_i / \partial a_3$ на S_{uc} в силу определения du_i / da_k , $\partial^2 u_i / \partial a_k^2$ ($k = 1, 2, 3$) на S_{uc} из (1.1) могут быть восстановлены. Поэтому из уравнения Ламе находятся $\partial^2 u_i / \partial a_3^2$. Аналогично, последовательным дифференцированием уравнений Ламе по a_3 могут быть определены $\partial^{N+1} u_i / \partial a_3^{N+1}$, а следовательно, и $\partial^N \epsilon_{ij} / \partial a_3^N$, $\partial^N \sigma_{ij} / \partial a_3^N$ ($N = 1, 2, \dots$).

2. Пусть $t \geq t_0$, т. е. появились пластические деформации. Для нахождения $\partial^N / \partial a_3^N$ воспользуемся изложенной выше схемой определения $\partial \sigma_{ij} / \partial a_3$, $\partial \epsilon_{ij} / \partial a_3$ при $t \geq t_0$. Можно видеть, что после повторного дифференцирования по a_3 величин ϵ_{q3} ($q = 1, 2, 3$) и уравнений равновесия с учетом определенных $\partial \sigma_{ij} / \partial a_3$, $\partial \epsilon_{ij} / \partial a_3$ на S_{uc} могут быть восстановлены $\partial^2 \sigma_{q3} / \partial a_3^2$, $\partial^2 \epsilon_{kl} / \partial a_3^2$ ($q = 1, 2, 3$; $k, l = 1, 2$) на S_{uc} . Дифференцируя затем (2.1) по a_3 , придем к системе относительно $\partial^2 \sigma_{kl} / \partial a_3^2$ ($k, l = 1, 2$). Для полученной системы условия разрешимости аналогичны условиям для (2.1). Начальные условия при $t = t_0$ находятся согласно п. 1 данной теоремы. Определив $\partial^2 \sigma_{kl} / \partial a_3^2$ и продифференцировав (1.2) по a_3 , найдем неизвестные $\partial^2 \epsilon_{q3} / \partial a_3^2$ ($q = 1, 2, 3$).

Таким образом, из выражений, полученных по приведенной схеме многократного дифференцирования соотношений Коши, уравнений равновесия, а также (2.1) и (1.2), могут быть определены значения $\partial^N \sigma_{ij} / \partial a_3^N$, $\partial^N \epsilon_{ij} / \partial a_3^N$ ($N = 1, 2, \dots$) на S_{uc} . При разгрузке последовательность действий сохраняется с заменой (2.1) на (1.6), а (1.2) на (1.7). В заключение заметим, что в теореме предполагалось $f(\sigma_{ij}) \in C^\infty$. Теорема доказана.

Отметим следствия. 1. В классе аналитических функций решение задачи (U, P) сводится к задаче аналитического продолжения. 2. В классе аналитических функций решение задачи (U, P) единственно.

Указанные следствия согласно теореме справедливы при $t \leq t_0$, т. е. для задач (U, P) теории упругости.

В практических задачах аналитическое продолжение можно использовать для нахождения полей ϵ_{ij} , σ_{ij} в приграничной области или в тонком слое (оболочке).

В ряде случаев при известных свойствах уравнений теории идеальной пластичности возможны постановки задач (U, P) , корректные в классическом смысле. Приведем примеры для наиболее известных случаев пространственного и плоского состояний, когда задача является корректной: осесимметричное состояние при соответствии напряженного состояния граням кусочно-линейных условий текучести [4]; сферическое деформированное состояние при условиях Треска, Мизеса [4]. Для случая общей плоской задачи согласно [4], если представить условие пластичности в виде $\tau = \tau(\omega)$, где $\omega = \sigma_1 + \sigma_2$, $\tau = \sigma_1 - \sigma_2$, то при $|\tau/\omega| < 1$ также возможна корректная постановка задачи (U, P) . Соотношение имеет место, например, для кусочно-линейного условия пластичности $\tau = \gamma\omega + b$, $|\gamma| < 1$; для параболического условия $(\sigma_1 - \sigma_2)/k = [a^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)^2 / (2k)^2] / a$;

условия Соколовского $(\sigma_1 - \sigma_2)/k = 2 \sin[\sigma_0/k - (\sigma_1 + \sigma_2)/2k]$, а также для случая плоской деформации при условиях Треска и Мизеса [4].

Перечисленные примеры объединяет возможность раздельного анализа полей напряжений и скоростей деформаций, а также гиперболичность исходных уравнений. Задача (U, P) будет корректной, если граница S_{uc} не является характеристической или огибающей семейства характеристик.

Отметим, что для статически определенных задач решения по жестко-пластической и упругопластической схемам принципиально не отличаются, поскольку тип уравнений для скоростей перемещений при введении в них упругих деформаций, представленных через найденные компоненты напряжений, остается неизменным.

Рассмотрим кратко вопрос о нахождении упругопластической границы. Будем полагать, что в процессе деформирования нигде в пластической области не происходит разгрузки. Нагружение можно рассматривать как следствие изменения условий на поверхности S_{uc} и $S \setminus S_{uc}$. Так, если $P(t) = \text{const}$ на S_{uc} , то для статически определенных задач вытекает, что $\sigma_{ij}(t) = \text{const}$ в пластической области. Интегрируя соотношения (1.2), получим $\epsilon_{ij} = A_{ijq} \sigma_{iq} + \varphi \delta_{ij} / \partial \sigma_{ij}$, где $\varphi = \int \lambda dt$ (интегрирование от 0 до t), т. е. в этом случае теории течения и деформационная совпадают. На упругопластической границе в силу непрерывности процесса деформирования справедлив закон Гука и $\epsilon_{ij}^p = 0$. Очевидно, что этим свойством обладает поверхность $\varphi = 0$.

В общем случае при $P(t) \neq \text{const}$ на S_{uc} нахождение границы эквивалентно построению поверхности $\lambda(x_1, x_2, x_3, t) = 0$, что, очевидно, совпадает с условием $\varphi = 0$. Таким образом, поверхность $\varphi = 0$ отделяет упругую и пластическую зоны.

3. Для иллюстрации приведенных рассуждений рассмотрим задачу (U, P) для двусвязного тела, находящегося в условиях плоской деформации. На внутренней границе Γ тела заданы напряжения и смещения

$$P = \{\sigma_n, \tau_n\}, \quad U = \{u_0, v_0\} \quad (3.1)$$

Здесь $\sigma_n, \tau_n, u_0, v_0$ — нормальные и тангенциальные усилия и перемещения. Среда считается несжимаемой. В пластической области выполнено условие Мизеса. Полагаем, что в процессе нагружения $P(t) = \text{const}$.

Из условия (3.1) на Γ для $\epsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ имеем

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_0}{\partial a_1} + \frac{u_0}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial a_2}$$

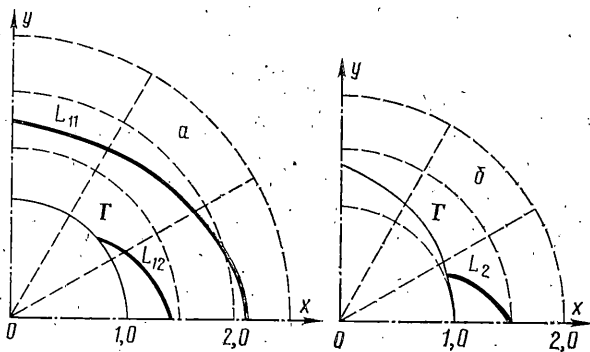
$$\sigma_{22} = \sigma_n, \quad \sigma_{12} = \tau_n$$

где H_1, H_2 — параметры Ламе, a_1, a_2 — криволинейные координаты, такие, что $a_2 = 0$ на Γ . Условие несжимаемости и соотношение закона Гука на Γ дают $\epsilon_{22} = -\epsilon_{11}$, $\epsilon_{12} = \tau/2G$. Подставив напряжения в условия текучести, получим, что при

$$4G \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_0}{\partial a_1} + \frac{u_0}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial a_2} \right]^2 + \tau_n^2 \geq k^2 \quad (3.2)$$

реализуется пластическое состояние. Нарушение (3.2) соответствует упругому состоянию. При выполнении (3.2) для $\sigma_{11}, \epsilon_{12}$ на Γ будем иметь $\sigma_{11} = \sigma_n \pm (k^2 - \tau_n^2)^{1/2}$, $\epsilon_{12} = \sigma_{12} (\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) (\sigma_{11} - \sigma_{12})^{-1} = \pm \tau_n \epsilon_{11} (k^2 - \tau_n^2)^{-1/2}$. Знак в выражениях для $\sigma_{11}, \epsilon_{12}$ устанавливается исходя из анализа предшествующего упругого состояния.

Для восстановления полей напряжений и деформаций внутри тела используется конечно-разностный метод, основанный на построении сетки линий скольжения. Если Γ — контур круга и найдены аналитические выражения для напряжений, то решение можно строить на основе метода Римана — Вольтерра аналогично [5]. Рассматриваемая задача статически определима, причем $\sigma_{ij}(t) = \text{const}$ в пластической области. С учетом этого,



интегрируя кинематические соотношения [6] по t , для перемещений на характеристиках получим уравнения, аналогичные уравнениям Гейрингер. Записав соотношения в конечных разностях [6], численно последовательно строится сетка характеристик, в узлах которой определяются σ_{ij} , а затем численным интегрированием находят значения перемещений в узлах сетки. Отрезки линий скольжения между соседними узлами аппроксимируются прямыми. После нахождения полей перемещений и напряжений определяется упругопластическая граница. Для ее отыскания используется соотношение закона Гука $\epsilon_\theta - \epsilon_r = (\sigma_\theta - \sigma_r)/(2G)$, где ϵ_θ , ϵ_r , σ_θ , σ_r отнесены к полярной системе координат. С учетом несжимаемости из этого уравнения на упругопластической границе получим следующее условие:

$$L(r, \theta) = \text{grad } u_r \cdot e_r(\alpha, \beta) + (\sigma_\theta - \sigma_r)/(4G) = 0$$

где e_r — единичный вектор, соответствующий направлению r , определены в системе (α, β) -линий скольжения. При известных перемещениях u_r в узлах сетки (α, β) находятся разностные аналоги $du_r/d\alpha$, $du_r/d\beta$, на основе которых отыскивается значение $L(r, \theta)$ во всех узлах сетки. Если при движении из одного узла в другой величина $L(r, \theta)$ меняет знак, то граница L проходит между рассматриваемыми узлами.

По указанной схеме численно были получены решения задач о нахождении пластических зон около эллиптического и кругового отверстий по значениям σ_n , τ_n , u_0 , v_0 , заданным на их контурах. Расчеты проводились при $G=7 \cdot 10^2$ МПа, $\nu=0,5$, $k=25$ МПа.

Результаты расчетов представлены на фигуре. Границы L для кругового контура изображены на фигуре для кругового контура Γ . При $\sigma_n = k/2$, $\tau_n = 0$, $v_0 = 0$, $u_0 = 0,02 + 0,006 \cos 2\theta$ на Γ упругопластическая граница L_{11} не полностью охватывает контур. При дальнейшем увеличении u_0 до $0,0606 + 0,003 \cos 2\theta$ граница L_{12} полностью охватывает контур. На фигуре б приведены результаты расчета для эллиптического контура Γ с полуосями $a=1$, $b=1,4$ при $\sigma_n = \tau_n = 0$, $u_0 = 0,02 + 0,006 \cos 2\theta$, v_0 на Γ . В этом случае граница L_2 не полностью охватывает контур.

При задании истории нагружения, т. е. значений $U(t)$, $P(t)$ на Γ , прослеживалось развитие зоны пластичности и выяснилось, не происходило ли разгрузки в процессе нагружения.

Для проверки достоверности полученных результатов было проведено сравнение с известными решениями для прямых задач. Для этого использовались перемещения u_0 , v_0 на контуре Γ , полученные при решении задачи Галина методом малого параметра в [7]. Оказалось, что отклонение найденной зоны от известной находится в пределах 4–6%.

Известно, что задача Коши для гиперболических уравнений является корректной, т. е. доказаны теоремы единственности и существования [8]. Поэтому, несмотря на нетрадиционную постановку, в случае гиперболическости исходных уравнений задача (U, P) является более естественной для теории идеальной пластичности, чем известные краевые задачи. Кроме того, получение решения такой задачи проще, чем соответствующей традиционной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
2. *Koiter W. T.* General theorems for elastic plastic solids // Progress in solid mechanics. Amsterdam: North Holland Publ. 1960. V. 1. P. 165–221. М.: Изд-во иностр. лит. 1961. 79 с.
3. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 285 с.
4. *Иллев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука. 1966. 231 с.
5. *Шваб А. А.* Определение напряженно-деформированного состояния плоскости с отверстием с учетом пластической области по известным смещениям на контуре отверстия // Физ.-техн. пробл. разработки полезн. ископаемых. 1981, № 2. С. 14–19.
6. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат. 1956. 407 с.
7. *Иллев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущения в теории упругопластического тела. М.: Наука. 1978. 208 с.
8. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. 512 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
4.IV.1985