

УДК 539.3

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ
ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ
С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

ЗЕЛЕНЯК В. М., САВРУК М. П.

Методом сингулярных интегральных уравнений ранее исследовались задачи термоупругости для однородной плоскости, ослабленной периодической системой трещин [1-3] или отверстий и трещин [1, 3, 4], а также для кусочно-однородной плоскости с конечной системой трещин [5]. В публикуемой работе на основе этого метода рассмотрены задачи теплопроводности и термоупругости для бесконечной плоскости с периодической системой включений и криволинейных разрезов. Аналогичные задачи теории упругости изучены в [6].

1. **Задача теплопроводности.** Рассмотрим бесконечную область, состоящую из матрицы S и периодической системы включений и трещин, причем в основной полосе периодов шириной d (вдоль оси Ox) содержатся M включений S_j , ограниченных гладкими замкнутыми контурами L_j ($j=\overline{1, M}$), и $N-M$ криволинейных разрезов L_j ($j=\overline{M+1, N}$), находящихся как в матрице, так и в включениях. Контур L_j ($j=\overline{1, N}$) не имеют общих точек. Каждый контур L_j ($j=\overline{1, N}$) связан с локальной системой координат $x_j O_j y_j$, ось $O_j x_j$ которой образует с осью Ox угол α_j , а точки O_j определяются в системе xOy комплексными координатами z_j^0 . При обходе контуров L_j ($j=\overline{1, M}$) в положительном направлении область S_j остается слева (фиг. 1).

Будем считать, что вдоль замкнутых контуров L_j ($j=\overline{1, M}$) заданы условия идеального теплового контакта

$$\lambda_j \partial T^+ / \partial n = \lambda \partial T^- / \partial n, \quad T^+ = T^- \quad (j=\overline{1, M}) \quad (1.1)$$

а на берегах трещин заданы тепловые потоки

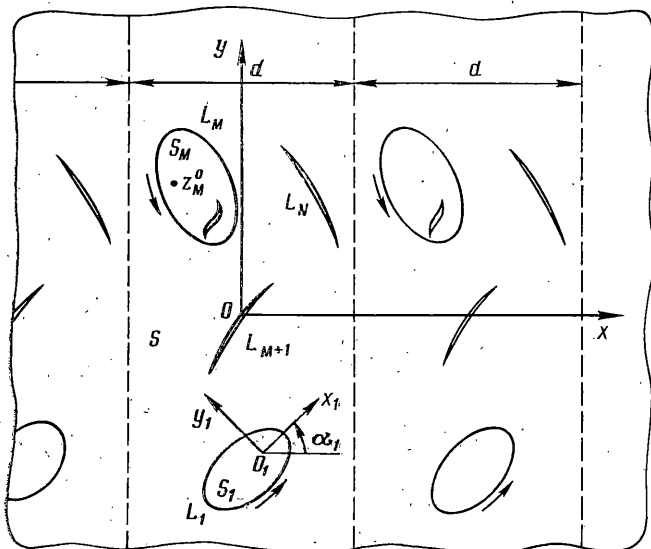
$$\lambda_j^* \partial T^\pm / \partial n = \tau_j(t_j) \pm \mu_j(t_j) \quad (j=\overline{M+1, N}) \quad (1.2)$$

$$\sum_{k=M+1}^N \int_{L_k} \mu_k(t_k) ds_k = 0 \quad (1.3)$$

Здесь n — внешняя нормаль к замкнутому контуру L_j ($j=\overline{1, M}$) или к левому берегу разреза L_j ($j=\overline{M+1, N}$); $\lambda(\lambda_j)$ — коэффициент теплопроводности матрицы (включения S_j); $T(x, y)$ — температура; t_j — аффиксы точек на контурах L_j в локальной системе координат; s_k — дуговая абсцисса точки t_k ; $\lambda_j^* = \lambda$, если L_j лежит в матрице; $\lambda_j^* = \lambda_j$, если L_j лежит во включении S_j ; индексы плюс и минус указывают на предельные значения соответствующих величин слева и справа от контура L_j .

Согласно условию (1.3), суммарное количество тепла, выходящее через контур $L = \cup L_j$ ($j=\overline{M+1, N}$), равно нулю.

Представив температуру $T(x, y)$ в виде вещественной части некоторой аналитической функции $f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$: $T(x, y) = \text{Re } f(z)$, воспользуемся интегральным представлением комплекс-



Фиг. 1

ного потенциала $F(z) = f'(z)$ для периодической задачи [1]:

$$F(z) = F_0(z) + \frac{1}{id} \sum_{k=1}^N \int_{L_k} H_k(t_k) \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{d} (T_k - z) \right] dt_k \quad (1.4)$$

$$H_k(t_k) = \gamma_k'(t_k) + i\mu_k(t_k) \exp(-i\theta_k)$$

$$\gamma_k'(t_k) = 0 \quad (k = \overline{1, M})$$

где $T_k = t_k \exp(i\alpha_k) + z_k^0$, θ_k — угол между положительной касательной к контуру L_k в точке t_k с осью $O_k x_k$, $F_0(z)$ определяет в сплошной однородной плоскости без включений температурное поле $T_0(x, y)$, причем функция $T_0(x, y)$ является периодической по координате x с периодом d .

Удовлетворяя с помощью соотношения (1.4) граничным условиям (1.1), (1.2), приходим к системе N интегральных уравнений для N функций $\mu_k(t_k)$ ($k = \overline{1, M}$) и $\gamma_k'(t_k)$ ($k = \overline{M+1, N}$):

$$i\delta_j H_j(t_j') \exp[i(\theta_j' + \alpha_j)] - \frac{1}{d} \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \operatorname{Im}[K_{jk}(t_k, t_j') H_k(t_k) dt_k] = \\ = \Delta_j \operatorname{Im}\{F_0(T_j') \exp[i(\theta_j' + \alpha_j)]\} + (\delta_j - 1) \tau_j(t_j') / \lambda_j^* \quad (1.5)$$

$$t_j' \in L_j \quad (j = \overline{1, N}); \quad \delta_j = 1 \quad (j = \overline{1, M}), \quad \delta_j = 0 \quad (j = \overline{M+1, N})$$

$$K_{jk}(t_k, t_j') = (\Delta_j / i) \operatorname{ctg} [\pi(T_k - T_j') / d] \exp[i(\theta_j' + \alpha_j)]$$

$$\Delta_j = [(\lambda_j - \lambda) / (\lambda_j + \lambda)] \delta_j + 1, \quad T_j' = t_j' \exp(i\alpha_j) + z_j^0$$

Система (1.5) при $\lambda_j \neq 0$ имеет решение при любой правой части, и это решение единственно при условиях

$$\int_{L_j} \gamma_j'(t_j) dt_j = 0 \quad (j = \overline{M+1, N}) \quad (1.6)$$

которые обеспечивают непрерывность температуры при обходе контуров трещин. В случае отверстий ($\lambda_j = 0$) для разрешимости системы в левую часть необходимо прибавить некоторые нулевые функционалы [1, 3].

2. Задача термоупругости. Рассмотрим бесконечную изотропную плоскость, содержащую периодическую систему изотропных включений и кри-

волинейных трещин. Предположим, что на линиях сцепления включений и матрицы напряжения непрерывны, а смещения терпят разрыв

$$[N_j(t_j) + iT_j(t_j)]^+ = [N_j(t_j) + iT_j(t_j)]^-, \quad t_j \in L_j \quad (j = \overline{1, M})$$

$$(u_j + iv_j)^+ - (u_j + iv_j)^- = g_j^*(t_j), \quad t_j \in L_j \quad (j = \overline{1, M}) \quad (2.1)$$

Пусть также плоскость находится под воздействием стационарного температурного поля $T(x, y)$, определяющегося потенциалом (1.4), а берега трещин не контактируют и на них задана самоуравновешенная нагрузка

$$[N_j(t_j) + iT_j(t_j)]^\pm = p_j(t_j), \quad t_j \in L_j \quad (j = \overline{M+1, N}) \quad (2.2)$$

В соотношениях (2.1), (2.2) $N_j(t_j)$ и $T_j(t_j)$ — нормальная и касательная компоненты усилий, u_j, v_j — компоненты смещений.

Комплексные потенциалы напряжений во всей плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ представим в виде [1, 5]:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^N \int_{L_k} Q_k(t_k) \exp(i\alpha_k) \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{d} (T_k - z) \right] dt_k \quad (2.3)$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^N \int_{L_k} \left\{ \overline{Q_k(t_k)} \exp(-i\alpha_k) \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{d} (T_k - z) \right] dt_k - \left\{ \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{d} (T_k - z) \right] + \frac{\pi}{d} (\overline{T_k} - T_k + z) \operatorname{cosec}^2 \left[\frac{\pi}{d} (T_k - z) \right] \right\} Q_k(t_k) \exp(i\alpha_k) dt_k \right\}$$

$$Q_k(t_k) = g_k'(t_k) \quad (k = \overline{1, M})$$

$$Q_k(t_k) = g_k'(t_k) + i\beta_* [f^+(t_k) - f^-(t_k)] / (1 + \kappa_*) \quad (k = \overline{M+1, N})$$

Неизвестные функции $g_k'(t_k)$ ищутся в классе гельдеровых функций, имеющих на концах разрезов L_k ($k = \overline{M+1, N}$) интегрируемые особенности: $g_k'(t_k) \in H$ ($k = \overline{1, M}$), $g_k'(t_k) \in H^*$ ($k = \overline{M+1, N}$); $\beta_* = \beta^t$, $\kappa_* = \kappa$, если L_k ($k = \overline{M+1, N}$) принадлежит S ; $\beta_* = \beta_k^t$, $\kappa_* = \kappa_k$, если L_k ($k = \overline{M+1, N}$) принадлежит S_k ($k = \overline{1, M}$); $\kappa = 3 - 4\nu$ ($\kappa_k = 3 - 4\nu_k$), $\beta^t = \alpha^t E$ ($\beta_k^t = \alpha_k^t E_k$) для плоской деформации; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ($\kappa_k = (3 - \nu_k)/(1 + \nu_k)$), $\beta^t = \alpha^t E / (1 + \nu)$ ($\beta_k^t = \alpha_k^t E_k / (1 + \nu_k)$) для плоского напряженного состояния; α^t, E, ν (α_k^t, E_k, ν_k) — коэффициент линейного теплового расширения, модуль упругости, коэффициент Пуассона матрицы (включения S_k); $f^\pm(t_k)$ — граничные значения потенциала $f(z)$, который на основе равенства (1.4) представим в виде

$$f(z) = f_0(z) + \frac{1}{d} \sum_{k=1}^M \exp(i\alpha_k) \int_{L_k} r_k(t_k) \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{d} (T_k - z) \right] dt_k -$$

$$- \frac{1}{\pi i} \sum_{k=M+1}^N \exp(i\alpha_k) \int_{L_k} H_k(t_k) \left\{ \ln \left| \sin \left[\frac{\pi}{d} (T_k - z) \right] \right| + \right.$$

$$\left. + i \arg \left[\sin \left[\frac{\pi}{d} (T_k - z) \right] \right] \right\} dt_k + C + iC_1, \quad r_k(t_k) = \int \mu_k(t_k) ds_k + C_2$$

где C — действительная постоянная интегрирования, определяемая через известную температуру на бесконечности (постоянные интегрирования C_1 и C_2 , не влияющие на напряженное состояние тела, в дальнейшем положим равными нулю).

Условие (1.3) обеспечивает ограниченность на бесконечности функции $f(z)$ и компонент напряжений.

Удовлетворяя граничным условиям (2.1), (2.2) с помощью представлений (2.3), получаем систему N сингулярных интегральных уравнений относительно N функций $Q_k(t_k)$:

$$A_j Q_j(t_j') + \frac{1}{2d} \sum_{h=1}^N \int_{L_h} [K_{jh}(t_h, t_j') Q_h(t_h) dt_h + L_{jh}(t_h, t_j') \overline{Q_h(t_h)} \overline{dt_h}] = R_j(t_j'), \quad (2.4)$$

$$t_j' \in L_j \quad (j=\overline{1, M})$$

$$K_{jh}(t_h, t_j') = \exp(i\alpha_h) [B_j \operatorname{ctg} T_{hj} - D_j (\overline{dt_j'} / dt_j')] \exp(-2i\alpha_j) \operatorname{ctg} \overline{T_{hj}}$$

$$L_{jh}(t_h, t_j') = -D_j \exp(i\alpha_h) [(1 - \overline{dt_j'} / dt_j') \operatorname{ctg} T_{hj} - (\overline{dt_j'} / dt_j') \exp(-2i\alpha_j) (\pi/d) (T_h - \overline{T_h} + \overline{T_j'} - T_j') \operatorname{cosec}^2 \overline{T_{hj}}]$$

$$A_j = 1/2 i \delta_j [1 + \kappa_j + \Gamma_j (1 + \kappa)], \quad B_j = (\kappa_j - \Gamma_j \kappa - 1) \delta_j + 1$$

$$D_j = (2 - \Gamma_j) \delta_j - 1, \quad T_{hj} = \pi (T_h - T_j') / d$$

$$R_j(t_j') = [\Gamma_j \beta^t f(T_j') - \beta_j^t f^+(T_j') + 2G_j g_j^*(t_j')] \delta_j + (1 - \delta_j) p_j(t_j')$$

$$\Gamma_j = G_j / G, \quad f^\pm(T_j') = \pm r_j(t_j') + f(T_j')$$

Здесь G , G_j — модули сдвига матрицы и включения S_j , $f(T_j')$ — прямое значение потенциала $f(z)$.

Система (2.4) решается при следующих дополнительных условиях, обеспечивающих однозначность смещений при обходе контуров трещин:

$$\int_{L_j} g_j'(t_j) dt_j = 0 \quad (j = \overline{M+1, N}) \quad (2.5)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} у вершин разреза L_k находим по формуле [1]:

$$K_I^\pm - i K_{II}^\pm = \mp \lim_{t_k \rightarrow l_k^\pm} [(2\pi |t_k - l_k^\pm|)^{1/2} Q_k(t_k)] \quad (k = \overline{M+1, N})$$

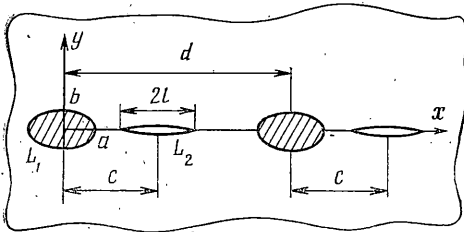
где нижние знаки относятся к началу (l_k^-), а верхние — к концу (l_k^+) трещины.

При $\Gamma_j = 0$ (отверстие) для разрешимости системы (2.4), как и в случае задачи теплопроводности, необходимо прибавить к левой части j -го

уравнения ($j = \overline{1, M}$) некоторые нулевые функционалы [1, 3]. При $\Gamma_j \neq 0$ (упругое включение) устойчивое численное решение может быть получено и без этих слагаемых.

3. Бесконечная плоскость с периодической системой эллиптических включений и прямолинейных термоизолированных трещин. Пусть в основной полосе периодов имеется эллиптическое включение, ограниченное контуром L_1 , вдоль которого имеют место условия идеального механического контакта

($g_1^*(t_1) = 0$), и ненагруженный термоизолированный прямолинейный разрез L_2 ($p_2(t_2) = \tau_2(t_2) = \mu_2(t_2) = 0$) длины $2l$. Контур L_1 в системе координат xOy определяется уравнением $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ($z_1^0 = \alpha_1 = 0$). Трещина расположена вдоль оси Ox ($z_2^0 = c$, $\alpha_2 = 0$), а ее центр находится в точке $(c, 0)$. На бесконечности задано температурное поле $T_\infty = -q(x \cos \gamma + y \sin \gamma) + T_0$, $F_0(z) = q \exp(-i\gamma)$, где T_0 — постоянная температура (при $T_0 = 0$ и отсутствии других тепловых воздействий напряжения



Фиг. 2

во всей кусочно-однородной плоскости равны нулю); q — однородный тепловой поток, направленный под углом γ к оси Ox (фиг. 2).

После замены переменных $t_1 = \omega(\theta) = a \cos \theta + ib \sin \theta$, $t_1' = \omega(\beta)$, $t_2 = l\xi$, $t_2' = l\eta$ систему уравнений (1.5), (1.6), (2.4), (2.5) с учетом представления потенциала $F(z)$ в виде

$$F(z) = d^{-1} \int_{L_1} \mu_1(t_1) \exp(-i\theta_1) \operatorname{ctg}[\pi(t_1 - z)/d] dt_1 + \\ + (id)^{-1} \int_{L_2} \gamma_2'(t_2) \operatorname{ctg}[\pi(t_2 + d - z)/d] + q \exp(-i\gamma)$$

приведем к нормализованной форме:

$$\varphi_1^0(\beta) + \int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) K_1(\theta, \beta) d\theta + \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) K_2(\xi, \beta) d\xi = \tau(\beta) \quad (0 \leq \beta \leq 2\pi) \quad (3.1)$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta) K_3(\theta, \eta) d\theta + \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) K_4(\xi, \eta) d\xi = \sigma(\eta) \quad (|\eta| < 1) \\ \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) d\xi = 0 \quad (3.2)$$

$$A_1 \varphi_1^0(\beta) + \int_0^{2\pi} [H_1(\theta, \beta) \varphi_1(\theta) + H_2(\theta, \beta) \overline{\varphi_1(\theta)}] d\theta + \\ + \int_{-1}^1 [H_3(\xi, \beta) \varphi_2(\xi) + H_4(\xi, \beta) \overline{\varphi_2(\xi)}] d\xi = P(\beta) \quad (0 \leq \beta \leq 2\pi) \quad (3.3)$$

$$\int_0^{2\pi} [H_5(\theta, \eta) \varphi_1(\theta) + H_6(\theta, \eta) \overline{\varphi_1(\theta)}] d\theta + \\ + 2l \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{d} l(\xi - \eta) \right] d\xi = 0 \quad (|\eta| < 1) \\ \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) d\xi = - \frac{2il\beta_*}{1 + \kappa_*} \int_{-1}^1 \xi \varphi_2(\xi) d\xi \quad (3.4)$$

$$\varphi_1(\theta) = \mu_1(t_1) |\omega'(\theta)|, \quad \varphi_2(\xi) = \gamma_2'(l\xi), \quad \varphi_1^0(\beta) = \varphi_1(\beta) d$$

$$\psi_1(\theta) = Q_1(\omega(\theta)), \quad \psi_2(\xi) = Q_2(l\xi), \quad \psi_1^0(\beta) = 2\psi_1(\beta) d$$

$$K_1(\theta, \beta) = \lambda_0 \operatorname{Im} [\omega'(\beta) \operatorname{ctg} \omega_1], \quad K_2(\xi, \beta) = \lambda_0 l \operatorname{Im} [\omega'(\beta) \operatorname{ctg} \omega_2 / i]$$

$$K_3(\theta, \eta) = \operatorname{Im} (\operatorname{ctg} \omega_3), \quad \lambda_0 = (\lambda_1 - \lambda) / (\lambda_1 + \lambda)$$

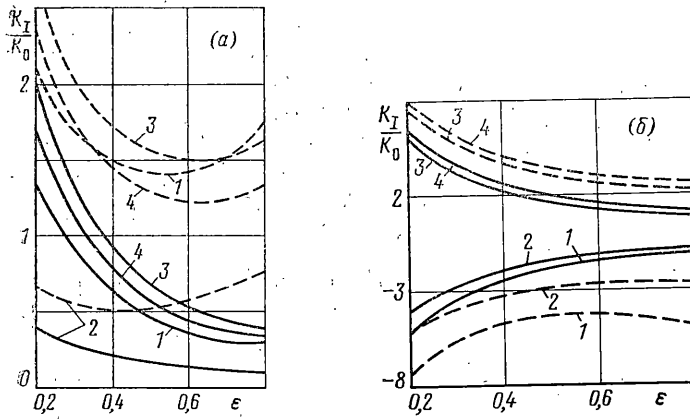
$$K_4(\xi, \eta) = l \operatorname{Im} \{ (1/i) \operatorname{ctg} [\pi l(\xi - \eta)/d] \}$$

$$\tau(\beta) = -dq \lambda_0 \operatorname{Im} [\omega'(\beta) \exp(-i\gamma)]$$

$$\sigma(\eta) = -dq \operatorname{Im} [\exp(-i\gamma)]$$

$$H_1(\theta, \beta) = \omega'(\theta) [B_1 \operatorname{ctg} \omega_1 - D_1 \omega_1 \operatorname{ctg} \overline{\omega_1}]$$

$$H_2(\theta, \beta) = -D_1 \overline{\omega'(\theta)} \{ (1 - \omega_1) \operatorname{ctg} \overline{\omega_1} - \\ - (\pi/d) [\omega(\theta) - \overline{\omega(\theta)} + \omega(\beta) - \omega(\beta)] \omega_1 \operatorname{cosec}^2 \overline{\omega_1} \}$$



Фиг. 3

$$H_3(\xi, \beta) = l[B_1 \operatorname{ctg} \omega_2 - D_1 \omega_1 \operatorname{ctg} \bar{\omega}_2]$$

$$H_4(\xi, \beta) = -D_1 l \{ (1 - \omega_1) \operatorname{ctg} \bar{\omega}_2 - \\ - (\pi/d) [T_\xi - \bar{T}_\xi + \overline{\omega(\beta)} - \bar{\omega}(\beta)] \omega_1 \operatorname{cosec}^2 \bar{\omega}_2 \}$$

$$H_5(\theta, \eta) = \omega'(\theta) [B_2 \operatorname{ctg} \omega_3 - D_2 \operatorname{ctg} \bar{\omega}_3]$$

$$H_6(\theta, \eta) = D_2 \overline{\omega'(\theta)} (\pi/d) [\omega(\theta) - \overline{\omega(\theta)} + \bar{T}_\eta - T_\eta] \operatorname{cosec}^2 \bar{\omega}_3$$

$$P(\beta) = 2d[\Gamma_1 \beta' f_{*+}(\beta) - \beta_1' f_{*-}(\beta)], \quad f_{* \pm}(\beta) = f_{\pm}(\omega(\beta))$$

$$f_{* \pm}(\beta) = \pm i r_*(\beta) + \frac{1}{d} \int_0^{2\pi} r_*(\theta) \omega'(\theta) \operatorname{ctg} \omega_1 d\theta -$$

$$- \frac{1}{id} \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) [\ln |\sin \omega_2| + i \arg(\sin \omega_2)] d\xi + q \omega(\beta) \exp(-i\gamma) + T_0,$$

$$\omega_1 = \operatorname{ctg} \{ \pi [\omega(\theta) - \omega(\beta)] / d \}$$

$$\omega_2 = \operatorname{ctg} \{ \pi [T_\xi - \omega(\beta)] / d \}, \quad T_\xi = l\xi + d$$

$$\omega_3 = \operatorname{ctg} \{ \pi [\omega(\theta) - T_\eta] / d \}, \quad T_\eta = l\eta + d$$

$$\omega_4 = \overline{\omega'(\beta)} / \omega'(\beta)$$

Функция $r_*(\theta) = \int \varphi_1(\theta) d\theta$, определяемая численным интегрированием с помощью интерполяционной формулы [7]:

$$\varphi_1(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N \varphi_1(\theta_k) \sin \frac{n(\theta - \theta_k)}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_k}{2}$$

где $\theta_k = 2\pi k/n$ (n — четное натуральное число), равна

$$r_*(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N \varphi_1(\theta_k) \left\{ \theta - \frac{2}{n} \sin \frac{n(\theta_k - \theta)}{2} - 2 \sum_{m=1}^{n/2-1} \frac{\sin[m(\theta_k - \theta)]}{m} \right\}$$

Здесь $\varphi_1(\theta_k)$ — известные решения системы алгебраических уравнений, к которой приводятся уравнения (3.1), (3.2) при их численном решении методом механических квадратур [4]. Этим методом получено также решение уравнений (3.3), (3.4).

Численные результаты для коэффициентов интенсивности температурных напряжений $K_{I \pm}$ и $K_{II \pm}$, отнесенных к $K_0 = q\beta^2 l / \pi l (1 + \nu)$, получены при различных значениях параметров задачи для $\nu_1 = \nu_2 = 2$ в случае плоского напряженного состояния.

G_1/G	1	2	3	4
0,2	-1,740/0,916	-1,879/0,863	-0,812/0,907	-1,584/0,905
0,5	-1,754/1,006	-2,181/0,984	-0,740/0,969	-1,401/0,974
2	-2,216/1,175	-3,726/1,283	-0,583/1,086	-1,164/1,023
5	-2,921/1,348	-5,795/1,601	-0,509/1,223	-1,078/0,971
20	-3,844/2,044	-9,556/2,888	-0,145/1,903	-1,192/0,558

Когда тепловой поток направлен перпендикулярно линии трещины ($\gamma=\pi/2$), то $K_I^{\pm}=0$, $K_{II}^{\pm}\neq 0$; при $\gamma=0$, наоборот, $K_I^{\pm}\neq 0$, $K_{II}^{\pm}=0$.

Значения K_{II}^{\pm}/K_0 в зависимости от относительной жесткости $\Gamma_1=G_1/G$ при $b/a=-0,5$, $l/a=0,8$, $c/a=2$, $\gamma=\pi/2$ и различных отношениях λ_1/λ , α_1^t/α^t , d/a даны в таблице. В числителе K_{II}^-/K_0 (левая вершина трещины), в знаменателе K_{II}^+/K_0 (правая вершина). В колонках 1 и 2 $\lambda_1/\lambda=0,5$, $\alpha_1^t/\alpha^t=4$ при $d/a=6$ и $d/a=12$ соответственно; в колонках 3 и 4 $d/a=6$ при $\lambda_1/\lambda=4$, $\alpha_1^t/\alpha^t=4$ и $\lambda_1/\lambda=0,5$, $\alpha_1^t/\alpha^t=0,5$ соответственно. Значения коэффициентов интенсивности в левой вершине трещины больше (меньше), чем в правой, при $\lambda_1/\lambda < 1$ ($\lambda_1/\lambda > 1$) независимо от отношения α_1^t/α^t . В случае однородной плоскости ($G_1=G$) полученные результаты совпадают с известными [1, 2].

На фиг. 3 приведены графики зависимости K_I^{\pm}/K_0 от относительной полудлины трещины $\varepsilon=l/a$ для $\gamma=0$ и $b/a=0,5$ (фиг. 3, а), $b/a=2$ (фиг. 3, б). Кривые 1 ($\Gamma_1=2$), 2 ($\Gamma_1=0,5$) при $\lambda_1/\lambda=0,5$, $\alpha_1^t/\alpha^t=4$; 3 ($\Gamma_1=2$), 4 ($\Gamma_1=0,5$) при $\lambda_1/\lambda=4$, $\alpha_1^t/\alpha^t=4$. Сплошные линии относятся к правой вершине трещины, штриховые — к левой.

Когда тепловой поток направлен параллельно трещинам ($\gamma=0$) и большим осям эллиптических включений ($b < a$), то значения коэффициентов интенсивности у обеих вершин трещины больше для более жестких, чем матрица, включений при $\alpha_1^t/\alpha^t > 1$ независимо от λ_1/λ (фиг. 3, а). Если большие оси включений ($b > a$) перпендикулярны направлению теплового потока, коэффициент интенсивности $K_I < 0$ как в левой, так и в правой вершине трещины (фиг. 3, б).

В заключение отметим, что в данной работе не учитывается возможный контакт берегов трещины. Поэтому в некоторых случаях коэффициент интенсивности напряжений K_I принимает отрицательные значения. Такой результат может быть использован для получения решения задачи методом суперпозиции при действии, кроме заданного температурного поля, других температурных или силовых факторов, которые в совокупности не вызывают смыкания берегов трещины. При необходимости учета контакта берегов трещины задача должна быть сформулирована как смешанная задача на берегах разреза. При этом ее решение существенно усложняется, однако оно также может быть получено методом сингулярных интегральных уравнений [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка: 1981. 324 с.
2. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка. 1983. 277 с.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П. Плоские задачи теплопроводности и термоупругости для тел с трещинами // Успехи механики. 1984. Т. 7. № 2. С. 75—115.
4. Мирсалимов В. М. Решение задачи термоупругости для изотропной среды, ослабленной периодической системой круглых отверстий и прямолинейными трещинами // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 1. С. 64—70.
5. Саврук М. П., Зеленья В. М. Сингулярные интегральные уравнения плоских задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородной плоскости с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. 1986. Т. 22. № 3. С. 82—88.
6. Саврук М. П., Тимошук Н. В. Периодическая задача плоской теории упругости для кусочно-однородной плоскости с трещинами // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 6. С. 125—128.
7. Габдуллаев Б. Г. Об одном общем квадратурном процессе и его применении к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН СССР. (ДАН СССР). 1969. Т. 179. № 3. С. 515—517.

Львов

Поступила в редакцию
3.III.1986