

УДК 539.379

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ СРЕДЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ СО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ
ПОВЕРХНОСТЯМИ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

ГОЛЬДШТЕЙН Р. В., ЖИТНИКОВ Ю. В.

Рассматривается трехмерная квазистатическая задача о напряженном состоянии упругого пространства, ослабленного эллиптической трещиной со взаимодействующими поверхностями при сложном нагружении. В этом случае напряжения являются функционалом траектории нагружения [1]. Показано, что процесс скольжения поверхностей трещины определяется направлением скольжения, являющимся решением полученного обыкновенного дифференциального уравнения. Рассмотрены конкретные примеры траекторий нагружения, дана геометрическая интерпретация условий начала процесса скольжения, его монотонности и перехода в состояние сцепления поверхностей трещины.

Анализ равновесия плоских трещин произвольной формы в плане при сложном нагружении в трехмерном случае проведен в [1], где установлены условия начала скольжения, его монотонности и перехода в состояние сцепления. В [2-5] рассматривались двумерные задачи о разрывах со взаимодействующими берегами при сложном нагружении, а в [6] — о круговой трещине.

1. Рассмотрим деформацию упругого пространства, ослабленного эллиптической трещиной под действием напряжений, заданных на бесконечности $\sigma_{ik}^\infty(\theta)$, θ — параметр нагружения. Эллиптическая трещина в системе координат $x_1x_2x_3$ (ось x_3 — нормальна плоскости трещины) занимает область $G: x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 \leq 1$, где a, b — большая и малая полуоси эллипса. Поверхности трещины при скольжении взаимодействуют по закону сухого трения Кулона: $F_i = -\rho\sigma V_i/V$, где ρ — коэффициент трения, $\sigma \geq 0$ — давление, $V_i = \partial u_i / \partial \theta$, $u_i = u_i^- - u_i^+$ — скачок смещения, θ — параметр нагружения. Перейдем методом суперпозиции к напряжениям, заданным на поверхностях трещины [1]: $\sigma_{13}^0 = \tau_1(\theta)$, $\sigma_{23}^0 = \tau_2(\theta)$, $\sigma_{33}(\theta) = -\sigma(\theta) \leq 0$. Сдвиговые и нормальные напряжения на трещине определяются через тензор σ_{ik}^∞ .

Задача сводится к определению напряженного состояния тела с эллиптической трещиной под действием однородных вдоль трещины касательных напряжений $\tau_1 = \tau_1(\theta)$, $\tau_2 = \tau_2(\theta)$ и давления $\sigma = \sigma(\theta)$, изменяющихся в процессе нагружения. Краевая задача в этом случае имеет вид [1]:

$$\sigma_{i3} = \tau_i + F_i, \quad F_i = -\rho\sigma V_i/V = -\rho\sigma(\cos \psi, \sin \psi), \quad (x_1, x_2) \in G \quad (1.1)$$

где ψ — угол скольжения, определяемый соотношением $\operatorname{tg} \psi = V_2/V_1$. Компоненты смещения поверхностей эллиптической трещины при касательной нагрузке $\tau_i = (\tau_1, \tau_2)$ равны [7] (приводится только выражение для u_1):

$$U_1 = 2B_1x_3\tau_1\{[2(1-\nu) - (k'/k)^2]E(U) + (k'/k)^2U - \\ - 2(1-\nu)\operatorname{sn} U \operatorname{dn} U / \operatorname{cn} U - ab^2x_1^2[\xi(b^2+\xi)]^{1/2}[(\xi-\eta)(\xi-\zeta)(a^2+\xi)^{1/2}]^{-1} - \\ - 2B_2x_1x_2x_3\xi^{1/2}[(\xi-\eta)(\xi-\zeta)(a^2+\xi)^{1/2}(b^2+\xi)^{1/2}]^{-1} \quad (1.2)$$

$$4\mu B_1 = -k^2[(k^2-\nu)E(k) + \nu k'^2K(k)]^{-1}$$

$$4\mu B_2 = -k^2[(k^2+\nu k'^2)E(k) - \nu k'^2K(k)]^{-1}$$

$$E(U) = \int_0^U \operatorname{dn}^2 \beta \, d\beta, \quad \xi = a^2(\operatorname{sn}^2 U - 1)$$

где $E(k)$, $K(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $k^2=1-b^2/a^2$, $k'=b/a$, ξ , η , ζ — эллиптические координаты, определяемые соотношениями [8]:

$$\begin{aligned} a^2(a^2-b^2)x_1^2 &= (a^2+\xi)(a^2+\eta)(a^2+\zeta) \\ b^2(b^2-a^2)x_2^2 &= (b^2+\xi)(b^2+\eta)(b^2+\zeta) \\ a^2b^2x_3^2 &= \xi\eta\zeta \end{aligned}$$

Условиям (ξ или $\zeta=0$) соответствуют в плоскости области, расположенные внутри и вне эллипса $x_1^2/a^2+x_2^2/b^2=1$ [8]. Используя соотношения для эллиптических функций $\operatorname{dn}^2 u=1-k^2 \operatorname{sn}^2 u$, $\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{cn}^2 u=1$, получим, устремляя $x_3 \rightarrow 0$, выражение для скачка смещений на трещине (1.2):

$$u_i = 8B_{(i)} \sigma_{i3} \Phi(x_1, x_2), \quad \Phi(x_1, x_2) = b(1-x_1^2/a^2-x_2^2/b^2)^{1/2} \quad (1.3)$$

В этих соотношениях компоненты скачка смещения и сдвигового напряжения разделяются: компонента скачка смещения вдоль одной из главных осей эллипса определяется составляющей сдвигового напряжения вдоль этой же оси.

Поскольку в рассматриваемом случае нормальные напряжения не зависят от координат x_1 , x_2 , можно предположить, исходя из зависимости (1.3), что угол скольжения ψ ($\operatorname{tg} \psi = V_2/V_1$) также не будет зависеть от этих координат. Действительно, используя (1.3), получим

$$u_i = 8B_{(i)}(1-\nu)(\tau_i + F_i)\Phi(x_1, x_2) \quad (1.4)$$

$$V_i = \partial u_i / \partial \theta = u_i'$$

где F_i — сила трения, $F_i = -\rho\sigma(\cos \psi, \sin \psi)$. Дифференцирование по θ для нахождения скорости возможно, поскольку скачок смещения является непрерывно дифференцируемой функцией параметра нагружения θ [1].

Подставляя выражение (1.4) для скорости скольжения V_i в формулу, определяющую угол скольжения, с учетом (1.1) получим

$$\operatorname{tg} \psi = f[\tau_2' - \rho(\sigma \sin \psi)'] [\tau_1' - \rho(\sigma \cos \psi)']^{-1}, \quad f = B_2/B_1 \quad (1.5)$$

Выражение (1.5) подтверждает предположение о том, что угол ψ действительно не зависит от координаты (x_1, x_2) . Следовательно, при наличии скольжения на трещине единственной неизвестной является функция $\psi = \psi(\theta)$. Разрешая (1.5) относительно производной ψ' , приходим к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\psi' = (\tau_2' f \cos \psi - \tau_1' \sin \psi + \rho\sigma'(1-f) \cos \psi \sin \psi) [\rho\sigma(\sin^2 \psi + f \cos^2 \psi)]^{-1} \quad (1.6)$$

где $\tau_1 = \tau_1(\theta)$, $\tau_2 = \tau_2(\theta)$, $\sigma = \sigma(\theta)$ — заданные функции параметра θ . Это уравнение при скольжении поверхностей трещины описывает изменение угла скольжения и полей скоростей смещений на трещине при нагружении. В частности, при $a \rightarrow \infty$ $b = \text{const}$, $f = 1 - \nu$, что соответствует разрезу при продольно-поперечном сдвиге. При $a = b$ имеем $f = 1$, что соответствует круговой трещине при сложном сдвиге.

Для описания режима скольжения необходимо указать условия, определяющие возникновение процесса скольжения и его непрерывность [1] (γ — угол между векторами $\delta\tau_i$ и δu_i):

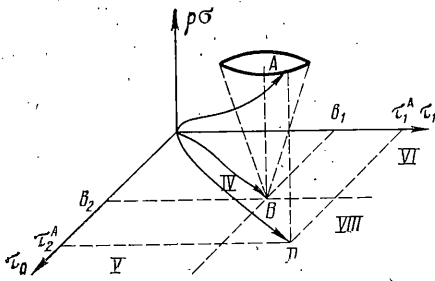
$$\delta\tau \cos \gamma \geq \rho\delta\sigma \quad (1.7)$$

$$[(\sigma_{13} - \tau_1)^2 + (\sigma_{23} - \tau_2)^2]^{1/2} \geq \rho\sigma \quad (1.8)$$

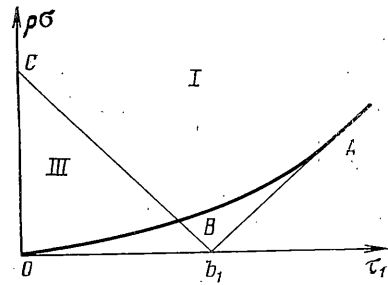
Условие (1.7) удобно записать через угол наклона φ вектора касательной нагрузки $\delta\tau_i = \delta\tau(\cos \varphi, \sin \varphi)$ и угол скольжения ψ

$$\delta\tau \cos(\varphi - \psi) \geq \rho\delta\sigma \quad (1.9)$$

Для решения уравнения (1.6) нужно задать начальное условие: $\psi(0) = \psi_0$. При $\tau_1 = \tau_2 = \rho\sigma = 0$ в правой части уравнения (1.6) возникает



Фиг. 1



Фиг. 2

особенность. Действительно, пусть числитель в правой части (1.6) стремится к const при $(\tau_1, \tau_2, \rho\sigma) \rightarrow 0$. Тогда $\psi = \text{const} \ln \sigma \rightarrow \pm\infty$ при $\sigma \rightarrow 0$. При этом ψ принимало бы и такие значения, для которых $\cos \psi < 0$, $\sin \psi < 0$ и, следовательно, направление действия силы было бы противоположно направлению смещения, что невозможно. Поэтому при $(\tau_1, \tau_2, \rho\sigma) \rightarrow 0$ числитель в (1.6) должен стремиться к нулю и в (1.6) возникает неопределенность типа «ноль делить на ноль». Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, определим асимптотическое поведение $\psi(\theta)$ при $\theta \sim 0$. Предположим, что $\tau_1(\theta) \approx A_1 \theta^n$, $\tau_2(\theta) = A_2 \theta^m$, $\sigma = A_3 \theta^l$, $m < n$. Согласно (1.8), скольжение поверхностей трещины возникает при $(\tau_1^2 + \tau_2^2)^{1/2} \geq \rho\sigma$, откуда $m < l$. В противном случае процесс скольжения на трещине не возникает, а угол ψ определится из уравнения $\tau_i = -F_i$, где F_i — сила трения. При выполнении условия $m < l$ из (1.6) определяем асимптотику $\psi(\theta)$ при $\theta \sim 0$, $\psi_0 = \pi/2$. Если же $m > n$, то $n < l$ и $\psi_0 = 0$. В случае $m = n = l$ из (1.6) следует, что $\psi = \text{const}$ и определяется из уравнения: $A_2 f \cos \psi - A_1 \sin \psi + \rho A_3 \cos \psi \sin \psi (1-f) = 0$.

Таким образом, определив начальное условие $\psi = \psi_0$, можно интегрировать (1.6) при условиях (1.8), (1.9). При невыполнении (1.8), (1.9) поверхности трещины находятся в состоянии сцепления $\psi = \psi(\theta_A) = \text{const}$. Если (1.8), (1.9) будут выполняться, то начнется подвижка (θ_A — значение параметра нагружения, при котором происходит переход в состояние сцепления).

2. Рассмотрим геометрическую интерпретацию режимов скольжения поверхностей трещины при нагружении вдоль траектории $\tau_1 = \tau_1(\theta)$, $\tau_2 = \tau_2(\theta)$, $\sigma = \sigma(\theta)$, $\rho = \text{const}$ в пространстве $(\tau_1, \tau_2, \rho\sigma)$ (фиг. 1). Пусть точка $A(\tau_1^A, \tau_2^A, \rho\sigma^A)$ (фиг. 1) соответствует данным параметрам нагружения на заданной траектории. Тогда условие скольжения в этой точке нагружения имеет вид [4]:

$$(\tau_1 - b_1)^2 + (\tau_2 - b_2)^2 \geq \rho^2 \sigma^2 \quad (2.1)$$

$$b_1 = \tau_1^A - \rho\sigma^A \cos \psi_A, \quad b_2 = \tau_2^A - \rho\sigma^A \sin \psi_A$$

При $\tau_i \approx \tau_i^A$, $\sigma \approx \sigma^A$ это условие переходит [4] в условие $\delta\tau \cos \gamma = \delta\tau_1 \cos \psi_A + \delta\tau_2 \sin \psi_A \geq \rho\delta\sigma$, определяющее монотонность скольжения. Области изменения параметров нагружения, в которой выполняется неравенство (2.1), при заданных $\tau_1^A, \tau_2^A, \rho\sigma^A, \psi = \psi^A$ соответствует область вне конуса скольжения

$$(\tau_1 - b_1)^2 + (\tau_2 - b_2)^2 = \rho^2 \sigma^2 \quad (2.2)$$

Точка A лежит на поверхности конуса. Если условие непрерывности скольжения $\delta\tau_1 \cos \psi + \delta\tau_2 \sin \psi \geq \rho\delta\sigma$ не выполняется, то траектория из точки A выходит внутрь конуса скольжения с фиксированными (b_1, b_2) , определяемыми в точке A , и поверхности трещины переходят в состояние сцепления в этой области (фиг. 1). Подвижка возникает, когда траектория нагружения выходит за пределы конуса скольжения в область, определяемую неравенством (2.1).

Таким образом, для траектории нагружения в каждой ее точке можно указать конус скольжения (2.2), который определяет непрерывность процесса скольжения и переход в состояние сцепления.

Рассмотрим случай, когда траектория лежит в одной из плоскостей, например $(\tau_1, \rho\sigma)$, а $\tau_2(\theta) \equiv 0$ (фиг. 2). Вершина конуса скольжения лежит на оси τ_1 ($b_2 \equiv 0$), а на плоскости $(\tau_1, \rho\sigma)$ след от пересечения конуса скольжения и плоскости $(\tau_1, \rho\sigma)$ имеет вид ломаной ABC с вершиной $b_1 = \tau_1 - \rho\sigma \cos \psi$ (для одноосного нагружения $\psi = 0$ или $\psi = \pi$). Области II, III вне ломаной ABC соответствуют скольжению, область I — сцеплению (фиг. 2). В этих областях выполняются условия скольжения при одноосном нагружении. Области II, III возникают для разрезов при плоской деформации [2, 3] и круговой трещины [6]. Однако в отличие от разрезов в общем случае в характерные области скольжения II, III можно попасть выходя в пространство $(\tau_1, \tau_2, \rho\sigma)$ (фиг. 2).

Рассмотрим снова трехмерный случай нагружения в пространстве $(\tau_1, \tau_2, \rho\sigma)$. Предположим, что в процессе нагружения компоненты скачка смещения $u_i \geq 0$. Введем определения режимов нагрузки и разгрузки. Будем считать, что вдоль оси $x_1(x_2)$ имеет место режим нагрузки или разгрузки, если $u_1 > 0$ ($u_2 > 0$) или $u_1 < 0$ ($u_2 < 0$). Выделение этих режимов важно для анализа процессов скольжения и разрушения. Дадим геометрическую интерпретацию соответствующим областям в пространстве $(\tau_1, \tau_2, \rho\sigma)$ (фиг. 1). Пусть кривая OD — проекция траектории нагружения на плоскость (τ_1, τ_2) , а OB — траектория движения вершины конуса скольжения (фиг. 1). Введем области: IV ($0 \leq \tau_1 \leq b_1, 0 \leq \tau_2 \leq b_2$), V ($0 \leq \tau_1 \leq b_1, b_2 \leq \tau_2 < \infty$), VI ($b_1 \leq \tau_1 < \infty, 0 \leq \tau_2 \leq b_2$), VII ($b_1 \leq \tau_1 < \infty, b_2 \leq \tau_2 < \infty$) (фиг. 1). Расположению точки $D(\tau_1, \tau_2)$ в этих областях отвечают приводимые ниже комбинации режимов:

IV: по оси x_1 — разгрузка, по оси x_2 — разгрузка, $\pi \leq \psi \leq 3\pi/2$;

V: по оси x_1 — разгрузка, по оси x_2 — нагрузка, $\pi/2 \leq \psi \leq \pi$;

VI: по оси x_1 — нагрузка, по оси x_2 — разгрузка, $3\pi/2 \leq \psi \leq 2\pi$;

VII: по оси x_1 — нагрузка, по оси x_2 — нагрузка, $0 \leq \psi \leq \pi/2$.

Вектор $BD = -\rho\sigma(\cos \psi, \sin \psi)$ соответствует силе трения и определяет ее направление. Движение точки A относительно выделенных областей и конуса характеризует смену режимов скольжения и сцепления. Переход из состояния сцепления в состояние скольжения при выходе траектории нагружения за пределы конуса сопровождается нарушением равенства $\Delta\tau_i = -\Delta F_i$, определяющего направление скольжения. Анализ общей ситуации (фиг. 1) показывает, что при движении изображающей точки в плоскости $(\tau_1, \rho\sigma)$ (фиг. 2) области III соответствует режим разгрузки $u_1 < 0$, области II — нагрузки $u_1 > 0$.

Таким образом, рассмотренные геометрические представления позволяют до решения задачи указать возможный режим скольжения, направление силы трения и начальные условия при переходе из состояния сцепления к скольжению, а также выделить участки траектории, определяющие характерные режимы нагружения.

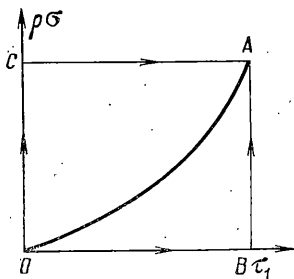
Геометрическая интерпретация проведена для случая эллиптической трещины, в котором углы скольжения ψ и напряжения не зависят от (x_1, x_2) . Аналогично можно проанализировать и случай, когда имеется зависимость от координат (x_1, x_2) напряжений и угла скольжения, если рассмотрение проводить локально в данной точке (x_1, x_2) .

Замечание. Зависимость скачков смещения от траектории нагружения определяют предельное состояние эллиптической трещины через коэффициенты интенсивности напряжений: $K_3 = \lim_{r \rightarrow 0} \mu u_\gamma (2\sqrt{2r})^{-1}$, $K_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \mu u_n [2(1-\nu)\sqrt{2r}]^{-1}$, u_γ, u_n — компоненты скачка смещения в системе координат (γ, n) , где γ — касательная к контуру трещины, n — нормаль к контуру трещины, $n \geq 0$ соответствует области вне трещины; $r = |n|$, $n \leq 0$. Скачок смещения на трещине определяется (1.3). В локальной системе координат выражения скачков смещения и коэффициентов интенсивности напряжения имеют вид [7]:

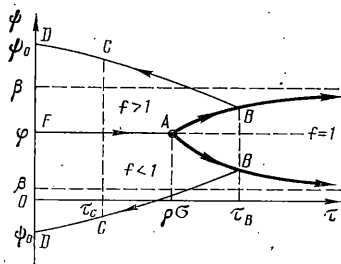
$$K_2 = 4(C_1 b^2 x_1 + C_2 a^2 x_2) R / (ab)$$

$$K_3 = 4(C_2 b^2 x_2 - C_1 a^2 x_1) R (1-\nu) / (ab)$$

$$R = (a^4 x_2^2 + b^4 x_1^2)^{-1/4} \mu b$$



Фиг. 3



Фиг. 4

где $C_1 = \sigma_{13} B_1$, $C_2 = \sigma_{23} B_2$, B_1 , B_2 определены в (1.2). Предельное равновесие трещины определяется через комбинацию K_2 , K_3 [7]: $f(K_2, K_3) = f_*$ и в рассматриваемой задаче зависит от траектории нагружения. Наиболее просто эта зависимость выглядит для траекторий, расположенных в плоскости $(\tau_1, \rho\sigma)$, $\tau_2 = 0$ или $(\tau_2, \rho\sigma)$, $\tau_1 = 0$. В этом случае $C_1 = B_1(\tau_1(\theta) - \rho\sigma(\theta))$ и для различных траекторий изменяется в пределах от $C_1 = B_1\tau_1^A$ (траектория OAB на фиг. 3) до $C_1 = B_1(\tau_1^A - \rho\sigma^A)$ (ломаная OCA на фиг. 3). В общем случае произвольного пути нагружения максимальный коэффициент интенсивности напряжений на этом пути нагружения определится выражением $C_1 = \max_{\theta} (\tau_1(\theta) - \rho\sigma(\theta)) B_1$.

В [7] получены выражения для напряжений и смещений на большом расстоянии от трещины. Эти выражения определяются через коэффициенты $C_1 = B_1\sigma_{13}(\theta)$, $C_2 = B_2\sigma_{23}(\theta)$. Используя проведенный анализ зависимости $\sigma_{13} = \tau_1 - \rho\sigma \cos \psi$, $\sigma_{23} = \tau_2 - \rho\sigma \sin \psi$ от способа нагружения, можно изучать изменение полей смещений и напряжений в дальней зоне. При этом, если $\sigma_{13} < \tau_1$ ($i=1, 2$), то по соответствующей оси происходит увеличение скачка смещения (режим нагрузки), а если $\sigma_{13} > \tau_1$, то уменьшение скачка смещения (режим разгрузки). Выявление режима нагружения по анализу распределения полей смещений и напряжений в дальней зоне может быть использовано, в частности, для анализа предельного равновесия разлома в геофизических исследованиях.

3. Рассмотрим поведение трещины при различных траекториях нагружения.

Пример 1. Проанализируем изменение скачка смещений при нагружении по следующей траектории: сначала сжимающей нагрузкой до величины σ , а затем сдвиговой $\tau_i = \tau(\theta) (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\tau(\theta) \geq 0$, $\varphi = \text{const}$. Эта траектория нагружения обычно предполагается в контактных задачах.

Уравнение скольжения (1.6) для этого случая примет вид

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{d\tau}{d\theta} \frac{\sin(\beta - \psi)a}{\rho\sigma(\sin^2 \psi + f \cos^2 \psi)} \quad (3.1)$$

$$a = (f^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^{1/2}, \quad \tau(0) = 0 \quad (3.2)$$

$$\text{tg } \beta = f \text{tg } \varphi, \quad f > 1, \quad \beta > \varphi; \quad f < 1, \quad \beta < \varphi$$

Так как в начальный момент $\tau(0) = 0$, то рассмотрим случай $d\tau/d\theta > 0$. В состоянии сцепления $\tau_i = -F_i$, начало подвижки определится из условия $\tau > \rho\sigma$ и, следовательно, начальное условие запишется так:

$$\psi(0) = \varphi. \quad (3.3)$$

Рассмотрим изменение угла ψ ; в начале процесса скольжения $\tau \geq \rho\sigma$, $\psi \sim \varphi$. В этом случае, подставляя в уравнение (3.1) $\psi \sim \varphi$, получим $\delta\psi \sim \delta\tau a \sin(\beta - \varphi) [\rho\sigma(\sin^2 \varphi + f \cos^2 \varphi)]^{-1}$. Из этого соотношения с учетом (3.2) следует, что $\delta\psi > 0$ при $\delta\tau > 0$, если $f > 1$, $\beta > \varphi$ и $\delta\psi < 0$ при $\delta\tau > 0$, если $f < 1$, $\beta < \varphi$. Таким образом, если $f > 1$, то угол ψ согласно (3.1) монотонно возрастает на участке траектории $\delta\tau > 0$, а если $f < 1$, то ψ монотонно убывает при $\delta\tau > 0$. В случае $f = 1$ из (3.1) имеем решение $\psi = \varphi = \text{const}$.

Полное решение (3.1) можно выписать с учетом начальных условий (3.3) в квадратурах

$$\int_{\varphi}^{\psi} \frac{d\eta (\sin^2 \eta + f \cos^2 \eta)}{\sin(\beta - \eta)} = \frac{a}{\rho\sigma} (\tau - \rho\sigma) \quad (3.4)$$

Рассмотрим асимптотику при $\tau \rightarrow \infty$ ($\tau \gg \rho\sigma$). Из (3.4) имеем в этом случае $\psi \rightarrow \beta \pm 0$ (знаки плюс и минус соответствуют $f < 1$ и $f > 1$). Интегрируя уравнение (3.4) в окрестности точки $\tau \rightarrow \infty$ и $\psi \sim \beta$, получим следующее асимптотическое представление: $|\beta - \psi| = \exp\{a\tau[\rho\sigma(\sin^2 \beta + f \cos^2 \beta)]^{-1}\}$. На фиг. 4 изображена качественная картина изменения угла скольжения ψ с ростом τ (участок FAB соответственно для $f > 1$ и $f < 1$). При $\varphi \rightarrow 0$ (или $\pi/2$), что соответствует скольжению вдоль одной из главных осей, $\beta \rightarrow \varphi$ и скольжение происходит вдоль направления действия нагрузки с $\psi = \varphi = \text{const}$, $u_2 = 0$, $u_1 = B_1(\tau_1 - \rho\sigma)\Phi(x_1, x_2)$.

Рассмотрим режим скольжения при уменьшении сдвигового напряжения после достижения значений $\tau = \tau_B$, $\psi = \psi_B$ в режиме нагрузки. В этом случае согласно (1.7), поверхности трещины переходят в состояние сцепления. При этом из (1.8) имеем

$$(\tau_B - \tau) \cos \varphi = \rho\sigma \cos \psi_B + F_1 \quad (3.5)$$

$$(\tau_B - \tau) \sin \varphi = \rho\sigma \sin \psi_B + F_2$$

где F_i — сила трения в состоянии сцепления. Обозначая $F_i = -\bar{F}(\cos \psi, \sin \psi)$, имеем $\bar{F}^2 = (\tau_B - \tau)^2 - 2(\tau_B - \tau)\rho\sigma \cos(\varphi - \psi_B) + \rho^2\sigma^2$, $\text{tg } \psi = [(\tau_B - \tau) \times \cos \varphi - \rho\sigma \cos \psi_B]^{-1} [(\tau_B - \tau) \sin \varphi - \rho\sigma \sin \psi_B]$. Непосредственно можно убедиться, что при $\delta\tau < 0$, $f < 1$, $\delta\psi < 0$ и угол ψ уменьшается, а при $\delta\tau < 0$, $f > 1$, $\delta\psi > 0$ — возрастает, т. е. в состоянии сцепления угол скольжения либо убывает, либо возрастает. Подвижка поверхностей трещины возникает, когда $\bar{F} = \rho\sigma$. Из этих уравнений имеем

$$\tau_c = \tau_B - 2\rho\sigma \cos(\psi_B - \varphi), \quad \psi_c = 2\varphi - \psi_B \pm \pi \quad (3.6)$$

где плюс соответствует случаю $f > 1$, а минус — $f < 1$. Тогда из уравнения скольжения получим, что $\delta\psi > 0$ при $\delta\tau < 0$ и $f > 1$ и $\delta\psi < 0$ при $\delta\tau < 0$ и $f < 1$. На фиг. 4 участок BC соответствует изменению угла в состоянии сцепления, а DC — скольжению; соответственно при $f > 1$ или $f < 1$.

Таким образом, решение в режиме разгрузки с учетом начальных условий (3.6) имеет вид

$$\int_{\psi}^{\psi_c} \frac{d\eta (\sin^2 \eta + f \cos^2 \eta)}{\sin(\beta - \eta)} = \frac{a}{\rho\sigma} (\tau_c - \tau) \quad (3.7)$$

В конечной точке нагружения ($\tau = 0$) угол скольжения $\psi = \psi_0$ определяется из (3.7) при $\tau = 0$, а остаточное поле смещений — формулами $u_{(i)} = 8(1 - \nu)\rho\sigma(\cos \psi_0, \sin \psi_0)\Phi(x_1, x_2)B_{(i)}$. В случае $\varphi = 0$ имеем $\tau_1 = \tau - 2\rho\sigma$, $\psi_1 = \pi$, $u_1 = 8(1 - \nu)(\tau + \rho\sigma)\Phi(x_1, x_2)B_1$.

Таким образом, в рассмотренном примере наблюдается нелинейная зависимость направления скольжения от значения касательного напряжения фиксированного направления. Такая зависимость характерна для пространственной задачи о трещине и в двумерных задачах о разрезах не наблюдается.

Пример 2. Рассмотрим следующую траекторию нагружения: сжатие до значения σ , а затем сдвиг вдоль оси x_1 напряжением τ_1 , возрастающим от нуля до значения τ . После этого сдвиг, постоянный по величине и переменный по направлению, $\tau_i(\theta) = \tau(\cos \beta, \sin \beta)$, $\beta = \beta(\theta)$ (вектор τ_i вращается). Условия непрерывного скольжения (1.8) с учетом $\varphi = \beta + \pi/2$ запишутся в виде $\delta\beta \sin(\psi - \beta) \geq 0$. Если угол β возрастает ($\delta\beta > 0$), то необходимо $\sin(\psi - \beta) > 0$, если $\delta\beta < 0$, то $\sin(\psi - \beta) < 0$. Анализ режима скольжения проведен для $f = 1$ (круговая трещина). В этом случае диф-

дифференциальное уравнение (1.6) существенно упрощается и удается получить аналитическое решение. Начальные условия для решения дифференциального уравнения (1.6) примут вид

$$\beta(\theta)|_{\theta=0}=0, \quad \psi(\theta)|_{\theta=0}=0 \quad (3.8)$$

Решение дифференциального уравнения (1.6) с учетом начальных условий выражается формулой $\operatorname{tg} [1/2(\psi-\beta)] = [(A-1)/(A+1)]^{1/2} \times \operatorname{th}(\alpha\beta/2)$, где $A=\tau/\rho\sigma > 1$, $\alpha=(A^2-1)^{1/2}$. Из (3.8) следует, что $\delta\beta > 0$, $\operatorname{tg} [1/2(\psi-\beta)] > 0$ при $\beta > 0$, и имеет место непрерывное изменение угла скольжения ψ . При этом $\beta=2\pi$ после поворота вектора τ на угол 2π и ψ определяется выражением $\operatorname{tg} (1/2\psi) = [(A-1)/(A+1)]^{1/2} \operatorname{th}(\pi\alpha)$ и отличается от начального $\psi=0$.

Рассмотрим теперь процесс скольжения при уменьшении β ($\delta\beta < 0$). В силу условия непрерывности (1.8) поверхности трещины перейдут в состояние сцепления $\psi = \text{const}$. Условие начала скольжения примет вид

$$\psi_0 - \beta_0 = -(\psi_1 - \beta_1), \quad \beta_0 = \beta_1 - 2 \operatorname{arctg} [\sin(\psi_1 - \beta_1) / (A - \cos(\psi_1 - \beta_1))] \quad (3.9)$$

где ψ_1, β_1 — угол скольжения и направление сдвиговой силы в конечной точке траектории $\delta\beta > 0$, ψ_0, β_0 — угол начала скольжения и направление сдвиговой силы при $\delta\beta < 0$.

С учетом (3.9) решение (1.6) примет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} [1/2(\psi-\beta)] &= R_1/R_2 \\ R_1 &= R_3 [R_3 \operatorname{th} (1/2\alpha(\beta-\beta_0)) + \operatorname{tg} (1/2(\psi_0-\beta_0))] \\ R_2 &= R_3 + \operatorname{tg} [1/2(\psi_0-\beta_0) \operatorname{th} [1/2\alpha(\beta-\beta_0)]] \\ R_3 &= [(A+1)/(A-1)]^{1/2} \end{aligned}$$

Это выражение определяет режим скольжения при $\delta\beta < 0$. Можно показать, используя (1.8), (2.6), что при уменьшении β выполняется условие (1.8) монотонного скольжения. Если угол β изменяется в пределах $\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$, то скачок смещения не изменяется и трещина после процесса нагружения находится в состоянии сцепления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Р. В., Жигников Ю. В. Анализ равновесия плоской трещины с учетом образования в областях налегания зон скольжения и сцепления при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 141–148.
2. Жигников Ю. В., Тулинов Б. М. Взаимодействие между берегами разреза в сложно-напряженном состоянии // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 168–172.
3. Жигников Ю. В., Тулинов Б. М. Деформационные характеристики среды, ослабленной трещинами со взаимодействующими берегами // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 44–54.
4. Беркович П. Е., Массакковский В. И., Рыбка В. М. Влияние истории внешнего нагружения на напряженно-деформированное состояние трещиноватой среды при наличии трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 4. С. 137–142.
5. Walsh J. B. The effect of cracks on the uniaxial elastic compression of rocks // J. Geophys. Res. 1965. V. 70. No. 6. P. 399–411.
6. Жигников Ю. В., Тулинов Б. М. Расчет деформационных свойств твердого тела с закрытой трещиноватостью в сложнонапряженном состоянии // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 117–124.
7. Си Д., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. Т. 2. М.: Мир. 1975. С. 83–203.
8. Уиттеккер Э. Т., Ватсон Дж. М. Курс современного анализа. Ч. 2. М.: Физматгиз. 1963. 515 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.VII.1986.