

УДК 531.36

ДВИЖЕНИЕ НЕСУЩЕГО ТЕЛА С ГРУЗОМ НА ВНЕШНЕЙ ПОДВЕСКЕ

ВОЛОДКО А. М., СЕРОВ А. Я.

Рассматривается задача о движении в атмосфере системы твердых тел, состоящей из основного несущего тела (вертолета) и носимого тела (груза) массой m_n , соединенных двухзвеновой подвесной системой (внешней подвеской). Исследуется влияние динамики груза на движение механической системы.

1. Введем связанную с несущим телом координатную систему $OXYZ$, центр O которой помещен в его центре масс. С носимым телом свяжем систему $O_nX_nY_nZ_n$, центр O_n которой также помещен в его центре масс. Движение исследуемой механической системы определяется относительно нормальной земной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ вектором скорости V_0 центра масс несущего тела и вектором его угловой скорости вращения ω_0 . Положение базиса $OXYZ$ относительно системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ задается углами рыскания ψ_0 , тангажа ϑ_0 и крена γ_0 .

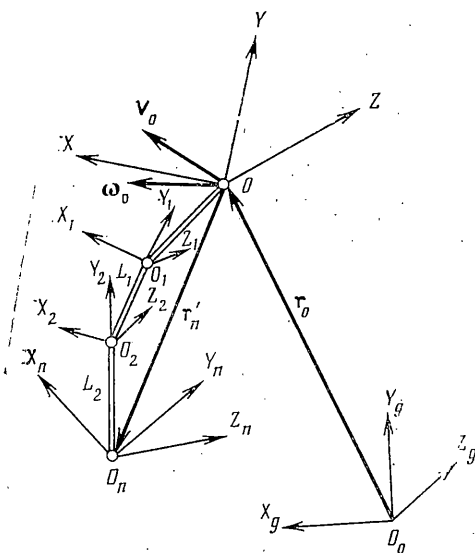
Полагаем, что соединение верхнего и нижнего звеньев подвесной системы между собой, а также с несущим и носимым телами — шарнирное. Точка подвеса O_1 верхнего звена расположена неподвижно относительно центра масс вертолета (фиг. 1). Введем системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и $O_2X_2Y_2Z_2$, связанные с верхним (длиной L_1) и нижним (длиной L_2) звеньями подвесной системы соответственно. Центр O_1 системы $O_1X_1Y_1Z_1$ помещен в узле подвеса верхнего звена к несущему телу, а ось O_1Y_1 направлена вверх и проходит через узел подвеса O_2 нижнего звена к верхнему звену. Центр O_2 системы $O_2X_2Y_2Z_2$ помещен в узле подвеса нижнего звена к верхнему, а ось O_2Y_2 направлена вверх и проходит через центр масс O_n носимого тела. Положение носимого тела относительно несущего тела определяется координатами x_n, y_n и z_n точки O_n в системе координат $OXYZ$ и углами $\psi_n, \vartheta_n, \gamma_n$. Положение узла подвеса O_1 верхнего звена относительно несущего тела определяется координатами $x_1=a, y_1=-B, z_1=0$ в системе координат $OXYZ$. Положение базисов $O_1X_1Y_1Z_1$ и $O_2X_2Y_2Z_2$ относительно системы координат $OXYZ$ задается углами $\psi_1, \vartheta_1, \gamma_1$ и $\psi_2, \vartheta_2, \gamma_2$ соответственно.

Подвесная система носимого тела принимается невесомой, не имеющей аэродинамического сопротивления, нерастяжимой, не работающей на кручение. За обобщенные координаты принимаются переменные $\psi_1, \vartheta_1, \gamma_1, \psi_2, \vartheta_2, \gamma_2, \psi_n, \vartheta_n, \gamma_n$.

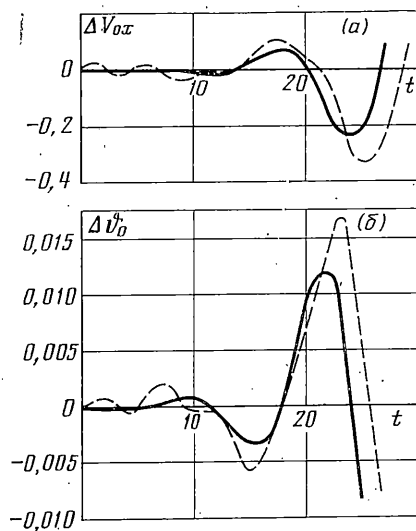
Кинетическая энергия T механической системы при относительном движении определяется выражением [1]:

$$T = \frac{1}{2} [(m_0 + m_n) |V_0|^2 + 2(m_0 + m_n) (V_0 \times \omega_0) \cdot r_c' + \\ + \omega_0 \cdot A^0 \cdot \omega_0] + V_0 \cdot Q_r + \omega_0 \cdot K_r^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |V_i'|^2$$

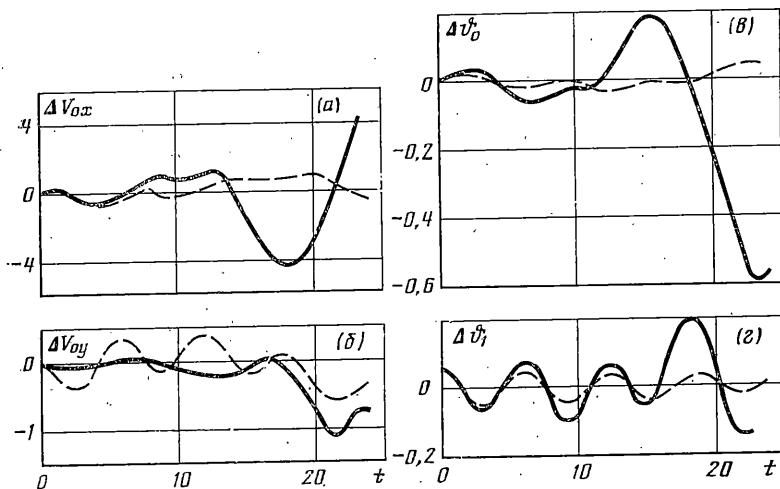
где r_c' — радиус-вектор центра масс системы, A^0 — тензор инерции системы относительно точки O , Q_r — главный вектор относительных количеств движения, а K_r^0 — их главный момент относительно точки O , m_i и V_i' — масса и относительная скорость i -й точки носимого тела.



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

Поскольку за полюс принимается центр масс несущего тела, выражение радиуса-вектора центра масс изучаемой системы имеет вид

$$\mathbf{r}_c' = m_n \mathbf{r}_n' (m_0 + m_n) \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r}_n' = (x_n, y_n, z_n)$ — радиус-вектор центра масс O_n носимого тела в системе координат $OXYZ$.

Учитывая направляющие косинусы углов $\psi_1, \vartheta_1, \gamma_1, \psi_2, \vartheta_2, \gamma_2$, в соответствии с Фиг. 1 получим

$$\begin{aligned} x_n &= a + L_1 (\cos \psi_1 \sin \vartheta_1 \cos \gamma_2 - \sin \psi_1 \sin \gamma_1) + \\ &\quad + L_2 (\cos \psi_2 \sin \vartheta_2 \cos \gamma_2 - \sin \psi_2 \sin \gamma_2) \\ y_n &= -(B + L_1 \cos \vartheta_1 \cos \gamma_1 + L_2 \cos \vartheta_2 \cos \gamma_2) \\ z_n &= -L_1 (\cos \psi_1 \sin \gamma_1 + \sin \psi_1 \sin \vartheta_1 \cos \gamma_1) - \\ &\quad - L_2 (\cos \psi_2 \sin \gamma_2 + \sin \psi_2 \sin \vartheta_2 \cos \gamma_2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\omega_{nx}' = \gamma_n \dot{\psi}_n + \psi_n \dot{\vartheta}_n \sin \vartheta_n, \quad \omega_{ny}' = \psi_n \dot{\vartheta}_n \cos \vartheta_n \cos \gamma_n + \vartheta_n \dot{\psi}_n \sin \gamma_n$$

$$\omega_{nz}' = \vartheta_n \dot{\psi}_n \cos \gamma_n - \psi_n \dot{\vartheta}_n \sin \gamma_n$$

Тензор инерции A° изучаемой системы с учетом формулы преобразования тензора инерции [1] определяется выражением

$$A^\circ = I + \Theta + m_n(Er_n' \cdot r_n' - r_n' r_n') \quad (1.3)$$

где I и Θ — тензоры инерции несущего и носимого тел, E — единичный тензор.

Главный вектор и главный момент относительных количеств движения Q_r системы соответственно равны

$$Q_r = m_n r_n'', K_r^\circ = r_n' \times m_n r_n'' + \Theta \cdot \omega_n' \quad (1.4)$$

где ω_n' — вектор угловой скорости вращения носимого тела относительно несущего тела.

Кинетическая энергия относительных движений изучаемой системы определяется выражением

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |V_i'|^2 = \frac{1}{2} (m_n r_n'' \cdot r_n'' + \omega_n' \cdot \Theta \cdot \omega_n') \quad (1.5)$$

Выражение кинетической энергии механической системы через проекции величин ω_0 , V_0 , ω_n' с учетом соотношений (1.1), (1.3)–(1.5) запишем в виде

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} (m_0 + m_n) (V_{0x}^2 + V_{0y}^2 + V_{0z}^2) + m_n \{ V_{0x} (\omega_{0y} z_n - \omega_{0z} y_n) + V_{0y} (\omega_{0z} x_n - \omega_{0x} z_n) + \\ & + V_{0z} (\omega_{0x} y_n - \omega_{0y} x_n) + \frac{1}{2} [(y_n^2 + z_n^2) \omega_{0x}^2 + (x_n^2 + z_n^2) \omega_{0y}^2 + (x_n^2 + y_n^2) \omega_{0z}^2] + \\ & + (V_{0x} + \omega_{0y} z_n - \omega_{0z} y_n) x_n' + (V_{0y} + \omega_{0z} x_n - \omega_{0x} z_n) y_n' + (V_{0z} + \omega_{0x} y_n - \omega_{0y} x_n) z_n' + \\ & + \frac{1}{2} [(x_n')^2 + (y_n')^2 + (z_n')^2] - \omega_{0x} \omega_{0y} x_n y_n - \omega_{0x} \omega_{0z} x_n z_n - \omega_{0y} \omega_{0z} y_n z_n \} + \frac{1}{2} [(I_x + \\ & + \Theta_x) \omega_{0x}^2 + (I_y + \Theta_y) \omega_{0y}^2 + (I_z + \Theta_z) \omega_{0z}^2 - 2(I_{xy} + \Theta_{xy}) \omega_{0x} \omega_{0y} - 2(I_{xz} + \Theta_{xz}) \omega_{0x} \omega_{0z} - \\ & - 2(I_{yz} + \Theta_{yz}) \omega_{0y} \omega_{0z}] + \Theta_x \omega_{0x} \omega_{nx}' + \Theta_y \omega_{0y} \omega_{ny}' + \Theta_z \omega_{0z} \omega_{nz}' - \Theta_{xy} (\omega_{0x} \omega_{ny}' + \omega_{0y} \omega_{nx}' + \\ & + \omega_{nx}' \omega_{ny}') - \Theta_{xz} (\omega_{0x} \omega_{nz}' + \omega_{0z} \omega_{nx}' + \omega_{nx}' \omega_{nz}') - \Theta_{yz} (\omega_{0y} \omega_{nz}' + \omega_{0z} \omega_{ny}' + \omega_{ny}' \omega_{nz}') + \\ & + \frac{1}{2} [\Theta_x (\omega_{nx}')^2 + \Theta_y (\omega_{ny}')^2 + \Theta_z (\omega_{nz}')^2] \end{aligned}$$

Используя уравнения Эйлера — Лагранжа [1], получим векторные уравнения поступательного и вращательного движений несущего тела с учетом относительного движения носимого тела

$$(m_0 + m_n) (\dot{V}_0 + \omega_0 \times V_0) + m_n [\omega_0' \times r_n' + \omega_0 \times (\omega_0 \times r_n') + 2\omega_0 \times r_n'' + r_n'''] = F_0 + F_n \quad (1.6)$$

$$I \cdot \dot{\omega}_0 + \omega_0 \times I \cdot \omega_0 + \Theta \cdot (\dot{\omega}_0 + \omega_n'') + (\omega_0 + \omega_n') \times \Theta \cdot (\omega_0 + \omega_n') + m_n r_n' \times [\dot{V}_0 + \omega_0 \times V_0 + \omega_0' \times r_n' + \omega_0 \times (\omega_0 \times r_n') + 2\omega_0 \times r_n'' + r_n'''] = M_0 + M_n + r_n' \times F_n$$

где F_0 и F_n — результирующие внешние силы несущего и носимого тел, M_0 и M_n — внешние моменты сил несущего и носимого тел относительно их центров масс соответственно. К внешним силам несущего и носимого тел относятся силы тяжести и аэродинамические силы.

Используя уравнение Лагранжа второго рода и принимая во внимание соотношения (1.2), получим векторные уравнения относительного движения центра масс носимого тела

$$\begin{aligned} m_n a_{na} \cdot \frac{\partial r_n'}{\partial \psi_1} &= F_n \cdot \frac{\partial r_n'}{\partial \psi_1}, & m_n a_{na} \cdot \frac{\partial r_n'}{\partial \theta_1} &= F_n \cdot \frac{\partial r_n'}{\partial \theta_1} \\ m_n a_{na} \cdot \frac{\partial r_n'}{\partial \gamma_1} &= F_n \cdot \frac{\partial r_n'}{\partial \gamma_1}, & m_n a_{na} \cdot \frac{\partial r_n'}{\partial \psi_2} &= F_n \cdot \frac{\partial r_n'}{\partial \psi_2} \\ m_n a_{na} \cdot \frac{\partial r_n'}{\partial \theta_2} &= F_n \cdot \frac{\partial r_n'}{\partial \theta_2}, & m_n a_{na} \cdot \frac{\partial r_n'}{\partial \gamma_2} &= F_n \cdot \frac{\partial r_n'}{\partial \gamma_2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

и уравнения относительного вращения носимого тела вокруг его центра масс (H_n — первый инвариант тензора Θ):

$$\Theta \cdot (\omega_0' + \omega_n'') + \omega_0 \times \Theta \cdot \omega_0 + \omega_n' \times \Theta \cdot \omega_n' + 2\omega_n' \times (\Theta - -1/2 E H_n) \cdot \omega_0 = M_n, \quad H_n = \Theta_x + \Theta_y + \Theta_z \quad (1.8)$$

В уравнения (1.7) входит вектор абсолютного ускорения центра масс a_{na} носимого тела, выражение которого имеет вид

$$a_{na} = V_0' + \omega_0 \times V_0 + \omega_0' \times r_n' + \omega_0 \times (\omega_0 \times r_n') + 2\omega_0 \times r_n'' + r_n'''$$

Система уравнений (1.6) — (1.8) является системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений 24-го порядка, описывающая в общем случае движение изучаемой механической системы.

Если движение несущего тела считается заданным, то движение системы описывается уравнениями (1.7), (1.8).

2. В качестве примера рассмотрим продольное возмущенное движение вертолета Ми-8 с грузом (стандартный контейнер) на внешней подвеске, при котором изменяются параметры ΔV_{0x} , ΔV_{0y} , $\Delta \omega_{0z}$, $\Delta \phi_0$, $\Delta \phi_1$ и $\Delta \phi_2$. Остальные параметры движения равны нулю.

Координатная система $OXYZ$ связана с фюзеляжем вертолета. Ее центр O помещен в центре масс, ось OX расположена в плоскости симметрии и направлена вперед параллельно конструктивной плоскости несущего винта, ось OY направлена вверх параллельно его оси. Центр O_n системы координат $O_n X_n Y_n Z_n$, связанной с грузом, помещен в его центре масс, а направление осей в невозмущенном движении совпадает с направлением осей системы координат $OXYZ$. Массы и моменты инерции несущего и носимого тел связаны соотношениями $m_n = 0,25 m_0$, $\Theta_z = 0,18 I_z$.

На фиг. 2, a — иллюстрируется характер изменения параметров возмущенного движения ΔV_{0x} , ΔV_{0y} (в м/с), $\Delta \phi_0$ (рад) несущего тела и верхнего звена подвески $\Delta \phi_1$ (рад) носимого тела в связанной с несущим телом системе координат в зависимости от времени (в сек.) при соотношении длин верхнего и нижнего звеньев подвески $L_1 = 1,6 L_2$.

Моделирование на ЭВМ проводилось при следующих начальных условиях: $\omega_{0z}(0) = \phi_1'(0) = \phi_2'(0) = 0$, $V_{0x}(0) = V_{nx}(0)$, $V_{0y}(0) = V_{ny}(0)$. Возмущенное движение создается начальным отклонением верхнего и нижнего звеньев подвески от положения равновесия. Результаты моделирования показывают, что свободное продольное возмущенное движение исследуемой системы имеет колебательный характер. Наблюдается короткопериодическая форма колебаний несущего тела, возбуждаемая маятниковыми колебаниями груза на внешней подвеске относительно узла крепления троса на несущем теле (фиг. 2, g). Продольное движение существенно зависит от начальных условий и возмущений. Так, при $V_{0x}(0) = 0$ (сплошные линии) колебания несущего и носимого тел быстро нарастают, а при $V_{0x}(0) = 33$ м/с (штриховые линии) амплитуда колебаний несущего и носимого тел заметно уменьшается. Это объясняется тем, что с ростом скорости полета из-за улучшения демпфирующих свойств несущего тела уменьшается интенсивность его раскачки, соответственно уменьшается и перемещение узла крепления троса (точки подвеса носимого тела), вызванное движением несущего тела. При этом колебания носимого тела становятся затухающими.

На фиг. 3, a , b показано возмущенное движение «свободного» несущего тела, когда носимое тело (груз) жестко закреплено внутри его фюзеляжа (сплошные линии), и несущего тела с носимым телом на внешней подвеске (штриховые линии) при $V_{0x}(0) = 0$.

В качестве возмущения рассматривалось изменение результирующих внешних сил несущего F_0 и носимого F_n тел, вызванное аэродинамическим воздействием в течение 1 с резко ограниченного восходящего порыва ветра со скоростью 5 м/с. Крепление груза на внешней подвеске увеличивает период и амплитуду основной длиннопериодической формы колебаний несущего тела.

Таким образом, результаты моделирования свидетельствуют о существенном влиянии динамики относительного движения носимого тела на движение исследуемой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.IV.1986