МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1988

УДК 539.3

ОБ УСРЕДНЕНИИ СЛОИСТЫХ УПРУГИХ КОМПОЗИТОВ

ИОСИФЬЯН Г. А., ОЛЕЙНИК О. А., ШАМАЕВ А. С.

Вопросам усреднения упругих композиционных материалов посвящено большое число работ (см. [1–7]). Важное значение для приложений имеет изучение слоистых упругих композитов, упругие свойства которых резко меняются лишь в одном направлении. В этом случае коэффициенты системы теории упругости для усредненного материала находятся в явном виде через коэффициенты системы, соответствующей слоистому упругому композиту. Это позволяет в явном виде получить многие эффективные характеристики слоистого композита.

В публикуемой работе рассматриваются задачи для упругого слоистого композита без предположения о его периодической структуре. Даны необходимые и достаточные условия на коэффициенты системы теории упругости, соответствующей слоистому композиту, при которых существует усредненная система и указаны явные формулы для коэффициентов этой системы. Даны также оценки отклонения для смещения, интеграла энергии, тензора напряжений, частот собственных колебаний и собственных функций слоистого материала от соответствующих величин, характеризующих усредненный материал, при одинаковых граничных условиях и внешних силах. Одновременно рассматриваются плоские и пространственные задачи. Поэтому предполагается, что число независимых переменных в системе теории упругости равно n. Рассматриваются слоистые структуры со слоями, расположенными на поверхностях уровня некоторой функции $\varphi(x)$.

Рассмотрим систему уравнений теории упругости для слоистого композита

$$L_\varepsilon u \equiv \partial_{x_i}\left(C_\varepsilon^{ij}(\varphi(x), x_1, \ldots, x_n)\,\partial_{x_j} u\right) = f(x) \tag{1}$$

где $C_\varepsilon^{ij}(\varphi(x), x)$ — $(n\times n)$-матрицы, элементы которых $c_{\varepsilon,hl}^{ij}(t, y)$ являются измеримыми ограниченными равномерно по ε функциями $t\in R^1$, непрерывными по $y=(y_1, \ldots, y_n)$ и обладающими ограниченными равномерно по ε производными первого порядка по y, $\varepsilon\in(0, 1]$ — параметр, $u=(u_1, \ldots, u_n)^*$ — вектор-столбец с компонентами $u_1, \ldots, u_n$, $\varphi(x)$ — скалярная функция из C^3, $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$, $|\nabla\varphi(x)|\geqslant \mathrm{const}>0$. Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до n.

Как обычно, элементы матриц C_ε^{ij} удовлетворяют условиям

$$c_{\varepsilon,hl}^{ij} \equiv c_{\varepsilon,lh}^{ji} \equiv c_{\varepsilon,il}^{hj}, \qquad \varkappa_1 \eta_l^i \eta_l^i \leqslant c_{\varepsilon,hl}^{ij} \eta_h^i \eta_l^j \leqslant \varkappa_2 \eta_l^i \eta_l^i \tag{2}$$

где $\varkappa_1$, $\varkappa_2=\mathrm{const}>0$ и не зависят от ε, t, y, η; $\eta=\{\eta_j^i\}$ — любая симметрическая $(n\times n)$-матрица.

Рассмотрим также систему уравнений теории упругости

$$L_0 u \equiv \partial_{x_i}\left(C_0^{ij}(\varphi(x), x_1, \ldots, x_n)\,\partial_{x_j} u\right) = f(x) \tag{3}$$

коэффициенты которой c $(\varphi(x), x)$ удовлетворяют условиям вида (2) и являются гладкими функциями t и y. Решения систем (1) и (3) рассматриваются в ограниченной гладкой области Ω с граничными условиями

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{4}$$

Ставится вопрос, при каких условиях на коэффициенты системы (1), описывающей слоистые упругие композиты, решения задач (1), (4) сходятся при $\varepsilon\to 0$ в норме $L^2(\Omega)$ к решению задачи (3), (4), соответствующей материалу с медленно меняющимися упругими свойствами.

Через $H^m(\Omega)$ $(H_0^m(\Omega))$ будем обозначать пополнение пространства вектор-функций $v=(v_1,\dots,v_n)^*$ с компонентами из $C^\infty(\bar\Omega)$ $(C_0^\infty(\Omega))$ по норме

$$\|v\|_m=\Big(\sum_{|\gamma|\leqslant m}\int_\Omega |D^\gamma v|^2\,dx\Big)^{1/2} \qquad \gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$$

$$|\gamma|=\gamma_1+\dots+\gamma_n; \qquad D^\gamma v=\partial^{|\gamma|}v/\partial x_1^{\gamma_1}\dots\partial x_n^{\gamma_n}$$

Сопряженное к $H_0^1(\Omega)$ пространство обозначается $H^{-1}(\Omega)$, скалярное произведение в $H^m(\Omega)-(u,\ v)_m$.

Рассмотрим задачи Дирихле $(f\in L^2(\Omega))$:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon=f\,(x\in\Omega),\ \ u_\varepsilon|_{\partial\Omega}=0 \tag{5}$$

$$L_0u=f\,(x\in\Omega),\ \ u|_{\partial\Omega}=0 \tag{6}$$

Определим матрицы $N_j^\varepsilon(t,\ y)$, $M_{ij}^\varepsilon(t,\ y)$ по формулам

$$N_s^\varepsilon(t,y)=\int_0^t [\varphi_l(y)\varphi_k(y)C_\varepsilon^{kl}(\tau,y)]^{-1}\varphi_p(y)\,(C_0^{ps}(\tau,y)-C_\varepsilon^{ps}(\tau,y))\,d\tau \tag{7}$$

$$M_{is}^\varepsilon(t,y)=\int_0^t \{\varphi_j(y)C_\varepsilon^{ij}(\tau,y)\,[\varphi_l(y)\varphi_k(y)C^{kl}(\tau,y)]^{-1}\varphi_p(y)\,(C_0^{ps}(\tau,y)-$$
$$-C_\varepsilon^{ps}(\tau,y))+C_\varepsilon^{is}(\tau,y)-C_0^{ic}(\tau,y)\}\,d\tau$$

где $\varphi_j=\partial_{y_j}\varphi$ $(j=1,\dots,n)$, A^{-1} — матрица, обратная к A. Далее будет показано, что матрица $[\varphi_l(y)\varphi_k(y)C_\varepsilon^{kl}(\tau,\ y)]^{-1}$ существует и имеет равномерно по ε ограниченные элементы. Положим

$$\delta_\varepsilon=\max\{|M_{ij}^\varepsilon(\varphi(x),\ x)|,\ |\partial_{y_l}M_{ij}^\varepsilon(\varphi(x),\ x)|,\ |N_j^\varepsilon(\varphi(x),\ x)|,$$
$$|\partial_{y_l}N_j^\varepsilon(\varphi(x),\ x)|\}$$

где максимум берется по $x\in\overline{\Omega}$ и $l,\ i,\ j=1,\dots,n$. Для матрицы $A=\{a^{kl}\}$ через $|A|$ обозначается $(a^{kl}a^{kl})^{1/2}$.

Под решением задач (5), (6) понимаются вектор-функции из $H_0^1(\Omega)$, которые удовлетворяют системам (1), (3) в смысле теории обобщенных функций. Всюду далее через c_j будем обозначать постоянные, не зависящие от ε.

Теорема 1. Пусть $f\in L^2(\Omega)$. Тогда для решений задач (5), (6) справедливы оценки

$$\|u_\varepsilon-u-N_s^\varepsilon\partial_{x_s}u\|_1\leqslant c_0\delta_\varepsilon^{1/2}\|f\|_0 \tag{8}$$

$$\|\gamma_\varepsilon^i-\gamma_0^i-\partial_tM_{is}^\varepsilon\partial_{x_s}u\|_0\leqslant c_1\delta_\varepsilon^{1/2}\|f\|_0 \tag{9}$$

$$\gamma_\varepsilon^i\equiv C_\varepsilon^{ij}\partial_{x_j}u_\varepsilon, \qquad \gamma_0^i\equiv C_0^{ij}\partial_{x_j}u$$

Доказательство. Определим вектор-функцию v_ε как решение задачи

$$L_\varepsilon v_\varepsilon=0\ (x\in\Omega),\ v\in H^1(\Omega),\ v_\varepsilon|_{\partial\Omega}=N_j^\varepsilon(\varphi(x),x)\,\partial_{x_j}u \tag{10}$$

Тогда

$$L_\varepsilon(u_\varepsilon-u-N_s^\varepsilon(\varphi(x),x)\,\partial_{x_s}u+v_\varepsilon)=F_\varepsilon\equiv\partial_{x_j}[(C_0^{is}-C_\varepsilon^{is}-C_\varepsilon^{ij}\partial_{x_j}N_s^\varepsilon)\,\partial_{x_s}u]-$$
$$-\partial_{x_i}(C_\varepsilon^{ij}N_s^\varepsilon\partial^2_{x_s x_j}u) \tag{11}$$

Это равенство понимается в смысле теории обобщенных функций. Можно проверить, что

$$\partial_tM_{is}^\varepsilon(\varphi(x),\ x)=\varphi_k|\nabla\varphi|^{-2}\partial_{x_k}M_{is}^\varepsilon(\varphi(x),\ x)+\beta_{is}(x,\ \varepsilon) \tag{12}$$

где β_{is} — матрицы, элементы которых ограничены по модулю величиной

$c_2\delta_\varepsilon$. Из формул (7) имеем, учитывая определение δ_ε

$$\partial_{x_i} M_{is}^\varepsilon(\varphi(x),\ x) = \alpha_s(x,\ \varepsilon) \tag{13}$$

$$C_0^{is}(\varphi(x),\ x) - C_\varepsilon(\varphi(x),\ x) - C_\varepsilon^{ij}(\varphi(x),\ x)\partial_{x_j} N_s^\varepsilon(\varphi(x),\ x) = \tag{14}$$
$$= -\partial_t M_{is}^\varepsilon + \alpha_{is}(x,\ \varepsilon),\ |\alpha_s(x,\ \varepsilon)| \leqslant c_3\delta_\varepsilon,\ |\alpha_{is}(x,\ \varepsilon)| \leqslant c_4\delta_\varepsilon$$

Легко видеть, что правая часть (11) является элементом пространства $H^{-1}(\Omega)$. Оценим его норму в $H^{-1}(\Omega)$. Для вектор-функций u, v положим $(u,\ v) = u_i v_i$. Пусть $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)^* \in C_0^\infty(\Omega)$. Имеем, учитывая (14), (12):

$$\int_\Omega ((C_0^{is} - C_\varepsilon^{is} - C_\varepsilon^{ij}\partial_{x_j} N_s^\varepsilon)\partial_{x_s} u, \partial_{x_j}\psi)\,dx = -\int_\Omega (\partial_{x_i} M_{is}^\varepsilon \varphi_k |\nabla\varphi|^{-2}\partial_{x_s} u, \partial_{x_k}\psi)\,dx -$$
$$-\int_\Omega (M_{is}^\varepsilon \partial_{x_i}(\varphi_k |\nabla\varphi|^{-2}\partial_{x_s} u), \partial_{x_k}\psi)\,dx + \int_\Omega (M_{is}\partial_{x_k}|\nabla\varphi|^{-2}\partial_{x_s} u), \partial_{x_i}\psi)\,dx +$$
$$+\int_\Omega ((\alpha_{is} - \beta_{is})\partial_{x_s} u, \partial_{x_i}\psi)\,dx$$

Отсюда, принимая во внимание (13) и определение δ_ε, получаем

$$\int_\Omega ((C_0^{is} - C_\varepsilon^{is} - C_\varepsilon^{ij}\partial_{x_j} N_s^\varepsilon)\partial_{x_s} u, \partial_{x_i}\psi)\,dx \leqslant c_5\delta_\varepsilon \|u\|_2 \|\psi\|_1 \tag{15}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (11) по норме $H^{-1}(\Omega)$. Пользуясь определением δ_ε, получаем

$$\left|\int_\Omega (C_\varepsilon^{ij} N_s^\varepsilon \partial^2_{x_s x_j} u, \partial_{x_j}\psi)\,dx\right| \leqslant c_6\delta_\varepsilon \|u\|_2 \|\psi\|_1 \tag{16}$$

Таким образом, из (15), (16) следует, что

$$\|F_\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant c_7\delta_\varepsilon \|u\|_2 \tag{17}$$

Поскольку коэффициенты оператора L_0 — гладкие функции, имеет место оценка

$$\|u\|_{m+2} \leqslant c_8 \|f\|_m \tag{18}$$

Из (11), (17) следует, что

$$\|u_\varepsilon - u - N_s^\varepsilon \partial_{x_s} u + v_\varepsilon\|_1 \leqslant c_9\delta_\varepsilon \|f\|_0 \tag{19}$$

Оценим теперь величину $\|v_\varepsilon\|_1$. Положим $w_\varepsilon = v_\varepsilon - \theta_\varepsilon$, где $\theta_\varepsilon = \psi_\varepsilon N_j^\varepsilon \partial_{x_j} u$, $\psi_\varepsilon = 1$ в δ_ε-окрестности границы Ω и $\psi_\varepsilon = 0$ вне $2\delta_\varepsilon$-окрестности границы Ω, $0 \leqslant \psi_\varepsilon \leqslant 1$, $\psi_\varepsilon \in C^\infty(\bar\Omega)$. Из системы (10) получим систему уравнений для w_ε. Умножим ее на w_ε, проинтегрируем по области Ω и преобразуем левую часть интегрированием по частям. Пользуясь неравенством Корна, получим $\|w_\varepsilon\|_1 \leqslant c_{10}\|\theta_\varepsilon\|_1$.

Оценим $\|\theta_\varepsilon\|_1$. Имеем

$$\partial_{x_k}\theta_\varepsilon = \psi_\varepsilon \partial_{x_k} N_j^\varepsilon \partial_{x_k} u + \psi_\varepsilon N_j^\varepsilon \partial^2_{x_j x_k} u + \partial_{x_k}\psi_\varepsilon N_j^\varepsilon \partial_{x_k} u$$

и, значит

$$\|\theta_\varepsilon\|_1^2 \leqslant c_{11}\delta_\varepsilon^2 \|u\|_2^2 + c_{12}\int_{\omega_1} |\nabla u|^2 dx$$

где ω_1 — $2\delta_\varepsilon$-окрестность $\partial\Omega$. Очевидно, что $\int_{\omega_1} |\nabla u|^2 dx \leqslant c_{13}\delta_\varepsilon \|u\|_2^2$, так как из теоремы вложения вытекает, что $\int_\Gamma |\nabla u|^2 dS \leqslant c\|u\|_2^2$ ($c = \mathrm{const}$) для любой гладкой поверхности Γ, лежащей в окрестности $\partial\Omega$. Следовательно

$$\|v_\varepsilon\|_1 \leqslant c_{14}\delta_\varepsilon^{1/2}\|f\|_0 \tag{20}$$

Из (19), (20) вытекает (8). Получим оценку (9). Согласно (8), имеем

$$\partial_{x_j} u_\varepsilon = \partial_{x_j} u + \partial_{x_j} N_s^\varepsilon \partial_{x_j} u + q_j^\varepsilon; \quad \|q_j^\varepsilon\|_0 \leqslant c_{15}\delta_\varepsilon^{1/2}\|f\|_0 \tag{21}$$

Учитывая (14), находим, что

$$C_\varepsilon^{ij}\partial_{x_j}u_\varepsilon - C_0^{ij}\partial_{x_j}u = \partial_l M_{is}\partial_{x_s}u - \alpha_{is}(x,\varepsilon)\partial_{x_s}u + C_\varepsilon^{ij}q_j^\varepsilon$$

и значит, справедлива оценка (9). Теорема доказана.

Пусть ω — подобласть области Ω с гладкой границей. В ω определим энергию решений u_ε и u задач (5), (6) с помощью формул

$$E_\omega^\varepsilon(u_\varepsilon) = \int\limits_\omega (C_\varepsilon^{ij}\partial_{x_j}u_\varepsilon, \partial_{x_i}u_\varepsilon)\,dx, \qquad E_\omega^0(u) = \int\limits_\omega (C_0^{ij}\partial_{x_j}u, \partial_{x_i}u)\,dx$$

Теорема 2. Пусть $f \in L^2(\Omega)$. Тогда

$$|E_\omega^\varepsilon(u_\varepsilon) - E_\omega^0(u)| \leqslant c_1(\omega)\delta_\varepsilon^{1/2}\|f\|_0^2 \tag{22}$$

Доказательство. Пользуясь оценкой (9), выводим

$$\left|\int\limits_\omega [(\gamma_\varepsilon^i, \partial_{x_i}u) - (\gamma_0^i, \partial_{x_i}u) - (\partial_l M_{is}^\varepsilon \partial_{x_s}u, \partial_{x_i}u_\varepsilon)]\,dx\right| \leqslant c_2\delta_\varepsilon^{1/2}\|f\|_0^2$$

Далее, используя формулы (12), (13), (21) интегрируя по частям и учитывая теорему вложения $\|\nabla u\|^2_{L^2(\partial\omega)} \leqslant c\|u\|^2_{H^2(\omega)}$ для любой $u \in H^2(\Omega)$, получаем оценку (22).

Рассмотрим вопрос о сильной G-сходимости операторов L_ε к L_0 при $\varepsilon \to 0$.

Последовательность операторов $\{L_\varepsilon\}$ называется сильно G-сходящейся к оператору L_0, если для любой $f \in H^{-1}(\Omega)$ последовательность $\{u_\varepsilon\}$ решений задачи (5) слабо в $H_0^1(\Omega)$ сходится к решению u задачи (6) и, кроме того, $\gamma_\varepsilon^i \equiv C_\varepsilon^{ij}\partial_{x_j}u_\varepsilon$ слабо в $L^2(\Omega)$ сходится к $\gamma_0^i \equiv C_0^{ij}\partial_{x_j}u$ при $\varepsilon \to 0$ ($i=1,\ldots,n$) (см. [8, 9]).

Обозначим $C^{0,\beta}$ пространство функций $g(t, y)$, имеющих конечную норму

$$\|g\|_{0,\beta} = \sup_{t,y}|g(t,y)| + \sup_{t,y',y''}|g(t,y') - g(t,y'')|\,|y'-y''|^{-\beta}$$

$$t \in [0,1];\ y, y', y'' \in \bar\Omega,\ y' \neq y'',\ 0 < \beta \leqslant 1$$

Лемма 1. Пусть $C^{ij}(x)$ — матрицы, элементы которых удовлетворяют условиям

$$c_{hl}^{ij} = c_{il}^{hj} = c_{lh}^{ji};\quad \varkappa_1\eta_h^i\eta_h^i \leqslant c_{hl}^{ij}\eta_h^i\eta_l^j \leqslant \varkappa_2\eta_h^i\eta_h^i \tag{23}$$

для любой симметрической матрицы $\{\eta_h^i\}$, где $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — положительные постоянные, не зависящие от x. Пусть $\varphi(x) \in C^1(\bar\Omega)$, $|\nabla\varphi| \geqslant \text{const} > 0$, $\nabla\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Тогда найдутся постоянные $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ зависящие только от $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, φ и такие, что для любого $\xi \in R^n$:

$$\varkappa_3|\xi|^2 \leqslant ([\varphi_p(x)\varphi_l(x)C^{pl}(x)]^{-1}\xi, \xi) \leqslant \varkappa_4|\xi|^2 \tag{24}$$

Доказательство. Положим $\eta_h^i = \varphi_i\xi_h + \varphi_h\xi_i$. Тогда, пользуясь (23), получим

$$c_{hl}^{ij}\eta_h^i\eta_l^j = 4\varphi_p\varphi_q c_{ij}^{pq}\xi_i\xi_j,\ (\varphi_i\xi_h + \varphi_h\xi_i)(\varphi_i\xi_h + \varphi_h\xi_i) =$$
$$= \eta_h^i\eta_h^i = 2\varphi_i\varphi_i\xi_j\xi_j + 2(\varphi_i\xi_i)^2 \geqslant c_0|\xi|^2$$

Положим $A(x) = \varphi_p(x)\varphi_l(x)C^{pl}(x)$. Таким образом, для любого $\xi \in R^n$ имеем согласно (23): $c_1|\xi|^2 \leqslant \varkappa_1\eta_h^i\eta_h^i \leqslant 4(A\xi, \xi)$, $(A\xi, A\xi) \leqslant M_1|\xi|^2$, где постоянные c_1, M_1 зависят только от $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, φ. Отсюда следует, что матрица A обратима. Полагая $\xi = A^{-1}\zeta$, получим $c_1|A^{-1}\zeta|^2 \leqslant 4(\zeta, A^{-1}\zeta) \leqslant 4|\zeta||A^{-1}\zeta|$, $|\zeta|^2 \leqslant M_1|A^{-1}\zeta|^2$. Из этих неравенств вытекает (24). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть семейство функций $\psi_\varepsilon(t, y)$ имеет ограниченные равномерно по ε нормы в $C^{0,\beta}$. Тогда существует последовательность $\varepsilon' \to 0$ и функция $\psi \in C^{0,\beta}$, такие, что $\psi_{\varepsilon'}(t, y) \to \psi(t, y)$ при $\varepsilon' \to 0$ слабо в $L^2(0, 1)$ при каждом $y \in \bar\Omega$.

Следствие. Пусть $\psi_\varepsilon(t, y)$ и $\partial_{y_l}\psi_\varepsilon(t, y)$ имеют равномерно по ε ограниченные нормы в $C^{0,\beta}$. Тогда для некоторой подпоследовательности $\varepsilon'\to 0$ имеем $\psi_{\varepsilon'}(t, y)\to\psi(t, y)$, $\partial_{y_l}\psi_{\varepsilon'}(t, y)\to\partial_{y_l}\psi(t, y)$ при $\varepsilon'\to 0$ слабо в $L^2(0, 1)$ при каждом $y\in\bar\Omega$, где ψ, ∂_{y_l}, $\psi\in C^{0,\beta}$.

Лемма 3. Пусть последовательность $\psi_\varepsilon(t, y)$ такая, как в лемме 2, и $\psi_\varepsilon(t, y)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ слабо в $L^2(0, 1)$ при каждом y. Тогда $\Phi_\varepsilon = \int\limits_0^t \psi_\varepsilon(\tau, y)d\tau\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно на $[0, 1]\times\bar\Omega$ и $\Phi_\varepsilon(\varphi(x), x)\to 0$ слабо в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0$.

Введем следующие обозначения:

$$B_\varepsilon^0(t, y)\equiv[\varphi_l(y)\varphi_k(y)C_\varepsilon^{kl}(t, y)]^{-1},$$

$$B_\varepsilon^s(t, y)\equiv[\varphi_l(y)\varphi_k(y)C_\varepsilon^{kl}(t, y)]^{-1}\varphi_p(y)C_\varepsilon^{ps}(t, y)$$

$$B_\varepsilon^{is}(t, y)\equiv\varphi_j(y)C_\varepsilon^{ij}(t, y)[\varphi_l(y)\varphi_k(y)C_\varepsilon^{kl}(t, y)]^{-1}\varphi_p(y)C_\varepsilon^{ps}(t, y)- -C_\varepsilon^{is}(t, y)$$

Через $B_0^0(t, y)$, $B_0^s(t, y)$, $B_0^{is}(t, y)$ обозначим матрицы, получающиеся из $B_\varepsilon^0(t, y)$, $B_\varepsilon^s(t, y)$, $B_\varepsilon^{is}(t, y)$ заменой C_ε^{ij} на C_0^{ij}.

Теорема 3. Пусть элементы матриц C_ε^{ij} таковы, что $c^{ij}_{\varepsilon,hl}(t, y)$, $\partial_{y_p}c^{ij}_{\varepsilon,hl}(t, y)$ $(p=1,\dots,n)$ имеют равномерно по ε ограниченные нормы в $C^{0,\beta}$. Тогда для того чтобы последовательность $\{L_\varepsilon\}$ сильно G-сходилась к оператору L_0, заданному матрицами C_0^{ij}, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{gathered}B_\varepsilon^0(t, y)\to B_0^0(t, y),\ B_\varepsilon^s(t, y)\to B_0^s(t, y),\ B_\varepsilon^{is}(t, y)\to B_0^{is}(t, y)\\ \partial_{y_l}B_\varepsilon^0(t, y)\to\partial_{y_l}B_0^0(t, y),\ \partial_{y_l}B_\varepsilon^s(t, y)\to\partial_{y_l}B_0^s(t, y)\\ \partial_{y_l}B_\varepsilon^{is}(t, y)\to\partial_{y_l}B_0^{is}(t, y)\ (l, i, j=1,\dots,n)\end{gathered}\tag{25}$$

при $\varepsilon\to 0$ слабо в $L^2(0, 1)$ при каждом фиксированном $y\in\bar\Omega$.

Доказательство. Пусть выполнены условия (25). Покажем, что тогда в теореме $1\delta_\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Действительно, нетрудно проверить, что имеют место равенства

$$N_s^\varepsilon(t,y)=\int\limits_0^t[B_\varepsilon^0(B_0^0)^{-1}B_0^s-B_\varepsilon^s]d\tau\tag{26}$$

$$M_{is}^\varepsilon(t,y)=\int\limits_0^t[(B_\varepsilon^i)^*(B_0^0)^{-1}B_0^s-B_\varepsilon^{is}-(B_0^i)^*(B_0^0)^{-1}B_0^s+B_0^{is}]d\tau$$

Поэтому из условий (25) и леммы 3 вытекает, что $\delta_\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Из оценки (8) следует, что $u_\varepsilon\to u$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0$, если $f\in\in L^2(\Omega)$, поскольку $N_s^\varepsilon(\varphi(x), x)\partial_{x_s}u\to 0$ слабо в $H^1(\Omega)$ по лемме 3. Из оценки (9) вытекает, что $\gamma_\varepsilon^i\to\gamma_0^i$ $(i=1,\dots,n)$ при $\varepsilon\to 0$ слабо в $L^2(\Omega)$, поскольку $\partial_t M_{is}^\varepsilon\to 0$ слабо в $L^2(\Omega)$ в силу (25), (26) и предположений теоремы. Когда $f\in H^{-1}(\Omega)$, сходимость $u_\varepsilon\to u$, $\gamma_\varepsilon^i\to\gamma_0^i$ при $\varepsilon\to 0$ устанавливается с помощью приближения $f\in H^{-1}(\Omega)$ функциями из $L^2(\Omega)$.

Необходимость условий (25) можно доказать, если воспользоваться леммами 2, 3, условием N из [8], [9] и единственностью сильного G-предела (см. [8, 9]).

Таким образом, условия (25) являются условиями существования усредненной системы (2) для слоистого композита, соответствующего системе (1).

Из теоремы 3 вытекает следующее утверждение, которое легко использовать для практических задач.

Теорема 4. Пусть элементы матриц C_ε^{ij} таковы, что $c_{\varepsilon,hl}^{ij}(t, y)$, $\partial_{y_p}c_{\varepsilon,hl}^{ij}(t, y)$ $(p=1,\dots,n)$ имеют равномерно по ε ограниченные нормы в $C^{0,\beta}$. Пусть существуют матрицы $B_0^0(t, y)$, $B_0^s(t, y)$, $B_0^{ij}(t, y)$, такие что для коэффициентов системы (1) имеет место сходимость (25) при

$\varepsilon\to0$ слабо в $L^2(0, 1)$ при каждом $y\in\bar\Omega$. Тогда коэффициенты G-предельной системы (3) выражаются по формулам $C_0^{is}=(B_0^i)^*(B_0^0)^{-1}B_0^s-B_0^{is}$.

Рассмотрим некоторые примеры, когда выполнены условия (25).

Теорема 5. Пусть элементы матриц C_ε^{ij} системы (1) имеют вид $c_{hl}^{ij}(\varepsilon^{-1}x_1)$, причем $c_{hl}^{ij}(\xi)$ являются почти периодическими функциями переменного ξ и выполнены условия (2). Тогда последовательность операторов $\{L_\varepsilon\}$ сильно G-сходится к оператору L_0, матрицы коэффициентов которого определяются по формуле $C_0^{ij}=\langle C^{ij}\rangle-\langle C^{i1}(C^{11})^{-1}C^{1j}\rangle+$ $+\langle C^{i1}(C^{11})^{-1}\rangle\langle(C^{11})^{-1}\rangle^{-1}\langle(C^{11})^{-1}C^{1j}\rangle$, где $\langle C^{ij}\rangle$ — матрицы с элементами

$$\langle c_{hl}^{ij}\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}c_{hl}^{ij}(\xi)\,d\xi$$

Для решений задач (5), (6) имеют место оценки (8), (9), причем $\delta_\varepsilon\to0$ при $\varepsilon\to0$.

Отметим, что, вообще говоря, в случае почти периодических коэффициентов $c_{hl}^{ij}(\xi)$ для δ_ε нельзя получить оценку вида $\delta_\varepsilon\leqslant c_1\varepsilon^\sigma$, можно лишь утверждать, что $\delta_\varepsilon\to0$ при $\varepsilon\to0$. Рассмотрим некоторые примеры, когда имеется оценка для δ_ε вида $\delta_\varepsilon\leqslant c_1\varepsilon^\sigma$ и коэффициенты G-предельного оператора L_0 зависят от x.

Введем класс A_σ, состоящий из функций $f(t, y)$, для которых существуют функции $c_f(y)$, $g(t, y)$, такие, что

$$\int_0^t f(s,y)\,ds-c_f(y)t=g(t,y)$$

причем $f(t, y)$, $\partial_{y_l}f$, $c_f(y)$, $\partial_{y_l}c_f$, g, $\partial_{y_l}g$ принадлежат классу Гельдера по y в $\bar\Omega$ равномерно по t.

$$|g(t,y)|,\ |\partial_{y_l}g(t,y)|\leqslant c_0(1+|t|)^{1-\sigma},\ \sigma\in(0,1]$$

где постоянные c_0, σ не зависят от t и y. Положим

$$\langle f(\cdot,y)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(s,y)\,ds$$

Легко видеть, что для $f\in A_\sigma$ имеем $\langle f(\cdot,y)\rangle=c_f(y)$.

Приведем примеры функций, принадлежащих A_σ.

1. Функции $f(t, y)$, периодические по t с периодом 1, и такие, что $f(t, y), \partial_{y_l}f(t, y)\in C^{0,\beta}$, принадлежат A_σ при $\sigma=1$.

2. Рассмотрим функции $f(t)=M+\varphi(t)$, где $M=\mathrm{const}$, $|\varphi(t)|\leqslant c(1+$ $+|t|)^{-N}$, N, $c=\mathrm{const}>0$. Тогда легко проверить, что если $N>1$, то $f\in A_1$, если $N=1$, то $f\in A_\sigma$ при любом $\sigma\in(0, 1)$, если $0<N<1$, то $f\in A_N$.

3. Сумма двух функций $\psi_1\in A_{\sigma_1}$, $\psi_2\in A_{\sigma_2}$ принадлежит классу A_{σ_3} с $\sigma_3=\min(\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_1, \sigma_2\in(0, 1]$.

Теорема 6. Пусть элементы матриц C_ε^{ij} имеют вид

$$c_{\varepsilon,hk}^{ij}(x)\equiv c_{hk}^{ij}(\varepsilon^{-1}\varphi(x),x)\equiv c_{hk}^{ij}(\varepsilon^{-1}t,y),\quad t=\varphi(x),\quad y=(x_1,\ldots,x_n)$$

Положим

$$B_\varepsilon^0(t,y)\equiv B^0(\varepsilon^{-1}t,y)\equiv[\varphi_l(y)\varphi_k(y)C^{kl}(\varepsilon^{-1}t,y)]^{-1}$$

$$B_\varepsilon^s(t,y)\equiv B^s(\varepsilon^{-1}t,y)\equiv[\varphi_l(y)\varphi_k(y)C^{kl}(\varepsilon^{-1}t,y)]^{-1}\varphi_p(y)C^{ps}(\varepsilon^{-1}t,y)$$

$$B_\varepsilon^{is}(t,y)\equiv B^{is}(\varepsilon^{-1}t,y)\equiv$$
$$\equiv\varphi_j(y)C^{ij}(\varepsilon^{-1}t,y)[\varphi_l(y)\varphi_k(y)C^{kl}(\varepsilon^{-1}t,y)]^{-1}\varphi_p(y)C^{ps}(\varepsilon^{-1}t,y)-$$
$$-C^{is}(\varepsilon^{-1}t,y)$$

Предположим, что элементы матриц $B^0(\tau, y)$, $B^s(\tau, y)$, $B^{is}(\tau, y)$ принадлежат классу A_σ, $\sigma\in(0, 1]$ и средние $\langle B^0(\cdot, y)\rangle$, $\langle B^s(\cdot, y)\rangle$, $\langle B^{is}(\cdot, y)\rangle$ являются матрицами, элементы которых — гладкие функции. Тогда последовательность операторов $\{L_\varepsilon\}$, отвечающих матрицам коэффициентов $C^{ij}(\varepsilon^{-1}\varphi(x), x)$, сильно G-сходится к оператору L_0 с коэффициентами $C_0^{is}=\langle B^i(\cdot, x)\rangle^*\langle B^0(\cdot, x)\rangle^{-1}\langle B^s(\cdot, x)\rangle-\langle B^{is}(\cdot, x)\rangle$ при этом δ_ε в теореме 1 удовлетворяет неравенству $\delta_\varepsilon\leqslant c_1\varepsilon^\sigma$.

Следствие. В случае, когда коэффициенты системы (1) быстро меняются в направлении одной из координатных осей, например когда $\varphi(x)=x_1$, коэффициенты G-предельной системы определяются по формуле

$$C_0^{ij}(x)=\langle C^{ij}(\cdot, x)\rangle-\langle C^{i1}(\cdot, x)(C^{11}(\cdot, x))^{-1}C^{1j}(\cdot, x)\rangle+$$
$$+\langle C^{i1}(\cdot, x)(C^{11}(\cdot, x))^{-1}\rangle\langle(C^{11}(\cdot, x))^{-1}\rangle^{-1}\langle(C^{11}(\cdot, x))^{-1}C^{1j}(\cdot, x)\rangle$$

Рассмотрим теперь задачи на собственные значения для операторов L_ε и L_0:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon^k+\lambda_\varepsilon^k\rho_\varepsilon(x)u_\varepsilon^k=0 \quad (x\in\Omega), \quad u_\varepsilon^k\in H_0^1(\Omega) \tag{27}$$
$$(u_\varepsilon^k, \rho_\varepsilon u_\varepsilon^m)_0=\delta_{mk}, \quad 0<\lambda_\varepsilon^1\leqslant\lambda_\varepsilon^2\leqslant\dots$$
$$L_0u^k+\lambda^k\rho_0(x)u^k=0 \quad (x\in\Omega), \quad u^k\in H_0^1(\Omega) \tag{28}$$
$$(u^k, \rho_0u^m)_0=\delta_{mk}, \quad 0<\lambda^1\leqslant\lambda^2\leqslant\dots$$

где δ_{km} — символ Кронекера, каждое собственное значение считается столько раз, какова его кратность, ρ_ε, ρ_0 — ограниченные измеримые функции, $\rho_\varepsilon\geqslant\text{const}>0$, $\rho_0\geqslant\text{const}>0$.

Пусть $\rho(x)$ — измеримая ограниченная функция, представимая в виде

$$\rho=g_0+\partial_{x_i}g_i, \quad g_0, \quad g_i\in L^\infty(\Omega) \tag{29}$$

Положим

$$\|\rho\|_{-1,\infty}=\inf_{g_0g_i}\left\{\|g_0\|_{L^\infty}+\sum_{i=1}^n\|g_i\|_{L^\infty}\right\}$$

где inf берется по всем представлениям ρ в виде (29).

Теорема 7. Предположим, что $\rho_0\in C^1(\bar\Omega)$. Тогда для собственных значений λ_ε^k и λ^k задач (27), (28) справедлива оценка

$$|(\lambda_\varepsilon^k)^{-1}-(\lambda^k)^{-1}|\leqslant c(\|\rho_\varepsilon-\rho_0\|_{-1,\infty}+\delta_\varepsilon^{1/2}) \tag{30}$$

где постоянная c не зависит от ε и k.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу на собственные значения

$$L_\varepsilon v_\varepsilon^k+\Lambda_\varepsilon^k\rho_0(x)v_\varepsilon^k=0 \quad (x\in\Omega), \quad v_\varepsilon^k\in H_0^1(\Omega)$$
$$(v_\varepsilon^k, \rho_0v_\varepsilon^m)=\delta_{km}, \quad 0<\Lambda_\varepsilon^1\leqslant\Lambda_\varepsilon^2\leqslant\dots$$

С помощью минимаксного принципа Куранта можно показать, что

$$|(\lambda_\varepsilon^k)^{-1}-(\Lambda_\varepsilon^k)^{-1}|\leqslant c_0\|\rho_\varepsilon-\rho_0\|_{-1,\infty} \quad (c_0=\text{const}) \tag{31}$$

Определим операторы $B_\varepsilon=-Q_\varepsilon\cdot(\rho_0(x)I)$, $B=-Q\cdot(\rho_0(x)I)$, где Q_ε, Q — операторы, действующие в пространстве $L^2(\Omega)$ и ставящие в соответствие $f\in L^2(\Omega)$ решения u_ε, u задач (5), (6) соответственно. Операторы B_ε, B являются самосопряженными положительными компактными в пространстве $H=L^2(\Omega)$ со скалярным произведением $(u, v)=(u, \rho_0, v)$. Согласно оценке (8), имеем $\|B_\varepsilon f-Bf\|_0\leqslant c_1\|f\|_0\delta_\varepsilon^{1/2}$. Поэтому для нормы оператора $B_\varepsilon-B$ в H имеем неравенство $\|B_\varepsilon-B\|\leqslant c_1\delta_\varepsilon^{1/2}$ и, значит, по теореме Вейля (см. [10]) $|(\Lambda_\varepsilon^k)^{-1}-(\lambda_\varepsilon^k)^{-1}|\leqslant c_1\delta_\varepsilon^{1/2}$. Отсюда и из (31) следует оценка (30). Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о близости собственных векторов задач (27), (28).

Обозначим $N(\lambda^k, L_0)$ собственное подпространство оператора L_0, отвечающее собственному значению λ^k, а $\rho(u_\varepsilon^k, N(\lambda^k, L_0))$ — расстояние в $L^2(\Omega)$ от u_ε^k до подпространства $N(\lambda^k, L_0)$.

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 7. Тогда имеет место оценка $\rho(u_\varepsilon^k, N(\lambda^k, L_0))\leqslant c_k(\delta_\varepsilon^{1/2}+\|\rho_\varepsilon-\rho_0\|_{-1,\infty})$.

Можно показать, что если $\rho_\varepsilon(x)=\rho(\varepsilon^{-1}\varphi(x), x)$ и $\rho(t, y)\in A_\sigma$, $\rho_0(x)=\langle\rho(\cdot, x)\rangle$, то $\|\rho_\varepsilon-\rho_0\|_{-1,\infty}\leqslant c\varepsilon^\sigma$.

Авторы благодарят А. А. Ильюшина за полезное обсуждение результатов статьи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G.* Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam: North Holland. 1978. 700 p.
2. *Санчес-Паленсия Е.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир. 1984. 472 с.
3. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ. 1984. 336 с.
4. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука. 1984. 352 с.
5. *Oleinik O. A.* On homogenization problems // Lecture Notes in Physics. B.: Springer. 1983. No. 195. P. 248–272.
6. *Иосифьян Г. А., Олейник О. А., Шамаев А. С.* Усреднение собственных значений и собственных функций краевой задачи теории упругости в перфорированной области // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983. № 4. С. 53–63.
7. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Об усреднении системы теории упругости с быстро осциллирующими коэффициентами в перфорированных областях // Н. Е. Кочин и развитие механики. М.: Наука. 1984. С. 237–249.
8. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов // Успехи мат. наук (УМН). 1979. Т. 34. № 5. С. 65–133.
9. *Шапошникова Т. А.* О сильной G-сходимости последовательности систем уравнений теории упругости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1984. № 5. С. 29–33.
10. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир. 1979. 587 с.

Москва

Поступила в редакцию 28.VIII.1986