МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1988

УДК 539.3

ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ КОМПОЗИТА С УПРУГИМ КОНТАКТОМ МЕЖДУ ВОЛОКНАМИ И СВЯЗУЮЩИМ

МОЛЬКОВ В. А., ПОБЕДРЯ Б. Е.

Эффективный тензор модулей упругости [1] однонаправленного волокнистого композита с периодической структурой в большинстве работ определяется при условии полного сцепления между волокнами и связующим материалом (идеальный контакт). По-видимому, исключение составляют лишь работы [2, 3]. В [2] определялись эффективные модули упругости с учетом окружных трещин на границе контакта, непрерывно простирающихся вдоль волокон; берега трещины свободны от напряжений и не вступают в контакт. В [3] предполагалось, что волокна посажены в среду с некоторым поперечным натягом, постоянным вдоль длины волокна.

Ниже на основе метода осреднения [4] определяется эффективный тензор модулей упругости и так называемый тензор модулей упругости нулевого приближения, с помощью которого можно определять микронапряжения в композите (т. е. напряжения в его компонентах) при упругом контакте между волокнами и связующим материалом [5]. Публикуемая статья представляет собой непосредственное продолжение [5].

1. Рассмотрим неоднородную задачу теории упругости в перемещениях для однонаправленного волокнистого композита с периодической структурой, которая состоит в решении системы уравнений

$$[C_{ijkl}(y)u_{k,l}]_{,j}+X_i=0 \tag{1.1}$$

при выполнении граничных условий

$$u_i|_{\Sigma_1}=u_i^0,\quad C_{ijkl}(y)u_{k,l}n_j|_{\Sigma_2}=S_i^0 \tag{1.2}$$

где u_k — компоненты вектора перемещений, X_i — компоненты вектора объемной силы, C_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости, n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к границе области Σ, занимаемой композитом, Σ_1 — часть границы, на которой заданы перемещения u_i^0, $\Sigma_2=\Sigma\backslash\Sigma_1$ — часть границы, на которой заданы нагрузки S_i^0.

Решение задачи (1.1), (1.2) зависит от условий на границе раздела компонентов композита. Рассмотрим условия упругого контакта (такие условия учитывают, например, влияние тонкого покрытия волокна [6]):

$$\begin{gathered}S^c+S^a=0,\quad u_n^c=u_n^a,\quad S_\tau^a=K_0(u_\tau^c-u_\tau^a)\\ (S_i^c=\sigma_{ij}^c n_j,\quad S_i^a=\sigma_{ij}^a n_j)\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, n_j ($j=1, 2$) — отличные от нуля компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности волокна, u_n — величина нормальной составляющей вектора перемещений, u_τ — касательной его составляющей, S_τ — касательная составляющей вектора S, K_0 — постоянный коэффициент пропорциональности (величины, относящиеся к связующему материалу и армирующим волокнам, отмечаются соответственно индексами c и a).

При $K_0=0$ условия (1.3) соответствуют проскальзыванию волокон относительно связующего материала.

Методом осреднения задачу (1.1), (1.2) можно свести к последовательности двух рекуррентных задач [1]. Каждая из задач первой последовательности является краевой задачей теории упругости для однородной среды с эффективными модулями, которые определяются из решения задачи теории упругости для неоднородной среды на ячейке периодичности (задачи второй последовательности).

Теория нулевого приближения состоит в решении первых задач этих последовательностей. Задача теории нулевого приближения для однородной среды совпадает с задачей по теории эффективного модуля [1] и заключается в отыскании вектора v из системы уравнений $h_{ijkl}v_{k,lj}+X_i=0$ при выполнении граничных условий $v_i|_{\Sigma_1}=u_i$, $h_{ijkl}v_{k,l}n_j|_{\Sigma_2}=S_i^0$, где h_{ijkl} — компоненты эффективного тензора модулей упругости.

Задача теории нулевого приближения для неоднородной среды заключается в отыскании периодических локальных функций $N_{kpq}(x)$ из системы уравнений [1]:

$$(C_{ijkl}(x)N_{kpq|l}(x))_{|j}=-C_{ijpq|j}(x) \qquad (1.4)$$

на ячейке периодичности. В (1.4) и далее черта означает дифференцирование по так называемой быстрой переменной $x_j=Ny_j$, где N — число ячеек периодичности.

После решения задачи (1.4) находится тензор модулей упругости нулевого приближения $C^0_{ijpq}(x)=C_{ijpq}(x)+C_{ijkl}(x)N_{kpq|l}(x)\equiv\sigma_{ij(pq)}(x)+$ $+C_{ijpq}(x)$, а по нему могут быть найдены напряжения по теории нулевого приближения $\sigma_{ij}^0=C^0_{ijpq}(x)v_{p,q}(y)$ и эффективный тензор модулей упругости $h_{ijpq}=\langle C^0_{ijpq}(x)\rangle$, где угловые скобки означают среднее от заключенных в них величин по объему ячейки периодичности.

Цель работы — определить величины $C^0_{ijpq}(x)$ и h_{ijpq} при условии упругого контакта между волокнами и связующим материалом. При $K_0=\infty$ условия (1.3) соответствуют полному сцеплению компонентов композита. Величины $C^0_{ijpq}(x)$ и h_{ijpq} при $K_0=\infty$ для рассматриваемого однонаправленного волокнистого композита с периодической структурой определены в [5].

Ячейку *периодичности* продолжим *периодическим* образом на все пространство. В дальнейшем будем считать, что сечение ячейки периодичности плоскостью Ox_1x_2 (O — начало системы координат) является параллелограммом, длина одной из сторон которого равна единице, а длина другой — r. В плоскости Ox_1x_2 S — область, относящаяся к связующему материалу, а A_{00} — круговая область радиуса R, относящаяся к волокну, ось которого проходит через начало координат, Γ_{00} — граница области A_{00}.

Для теории нулевого приближения на Γ_{00} в случае упругого контакта будем иметь следующие условия:

$$[S_{(pq)}]=0, \quad [N^{(n)}_{pq}]=0, \quad S^{(\tau)}_{(pq)}=K\mu_1[N^{(\tau)}_{pq}]/R \qquad (1.5)$$

где квадратные скобки означают скачок заключенных в них величин на Γ_{00}, $N^{(n)}_{pq}$ — нормальная составляющая вектора N_{pq} с компонентами N_{kpq}, $N^{(\tau)}_{pq}$ — его касательная составляющая, $S^{(\tau)}_{(pq)}$ — касательная составляющая вектора $S_{(pq)}$ с компонентами $S_{i(pq)}=(\sigma_{ij(pq)}+C_{ijpq})n_j$. Коэффициент K связан с K_0 соотношением $K_0=K\mu_1N/R$. В дальнейшем функции $\sigma_{ij(pq)}(x)$, $N_{kpq}(x)$, $C_{ijpq}(x_1, x_2)$, относящиеся к области S и ее границе, будем обозначать верхним индексом 1, а те же функции, относящиеся к области A_{00} и ее границе Γ_{00}, — верхним индексом 2.

В областях S и A_{00} в силу однородности компонентов композита имеем

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{ij(pq)|j}=0 \qquad (\alpha=1,2) \qquad (1.6)$$

Обозначим задачи (1.6), (1.5) Y_{pq}. В силу симметрии C_{ijpq} по последним двум индексам достаточно решить задачи Y_{pq} при $p\leqslant q$. Для краткости последние пары индексов у функций $N_{kpq}(x)$ и $\sigma_{ij(pq)}(x)$ будем опускать.

2. Для задачи $Y_{\alpha 3}$ ($\alpha=1$, 2) функции N_k в областях S и A_{00} ищем в виде $N_\alpha=0$, $N_3{}^\alpha=\mathrm{Re}\{\varphi_\alpha(z)\}/\mu_\alpha$, где μ_α — модули сдвига компонентов композита, а дифференцируемые функции $\varphi_\alpha(z)$ комплексной переменной $z=x_1+ix_2$ имеют тот же вид, что и в соответствующих задачах $I_{\alpha 3}$ в случае полного сцепления между волокнами и связующим материалом [5].

Для определения коэффициентов a_k и c_k ($k=1, 3, 5, \ldots$), определяющих соответственно $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$, воспользуемся условиями (1.5), записанными через $\varphi_\alpha(z)$, и разложением в ряд Лорана функции $\varphi_1(z)$ в окрестности Γ_{00}.

Для задачи Y_{13} величины a_k находятся из следующей бесконечной системы линейных уравнений нормального типа [7] (здесь и далее знак суммы со звездочкой означает суммирование по нечетным значениям индекса n от 1 до ∞):

$$\bar{a}_k-\beta_1 a_0\delta_{1k}-\beta_2\Sigma^*\eta_{nk}a_n=\mu_1\beta_3 R\delta_{1k}$$

$$\beta_1=\frac{\varkappa+K-K\varkappa}{\varkappa+K+K\varkappa},\qquad \beta_2=\frac{k\varkappa+K-K\varkappa}{k\varkappa+K+K\varkappa},$$

$$\beta_3=\frac{(\varkappa+K)(1-\varkappa)+\varkappa^2}{\varkappa+K+K\varkappa},\qquad \varkappa=\frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Величины η_{nk}, зависящие от радиуса и взаимного расположения волокон, определены в [5].

Для задачи Y_{23} коэффициенты a_k определяются из решения системы нормального типа $\bar{a}_k-\beta_1 a_0\delta_{1k}-\beta_2\Sigma^*\eta_{nk}a_n=-i\mu_1\beta_3 R\delta_{1k}$. Коэффициенты c_k для Y_{13} и Y_{23} зависят от a_k соответственно следующим образом:

$$c_k=-\bar{a}_k+\Sigma^*\eta_{nk}a_n+\{a_0+(\mu_1-\mu_2)R\}\delta_{1k}$$

$$c_k=-\bar{a}_k+\Sigma^*\eta_{nk}a_n+\{a_0-i(\mu_1-\mu_2)R\}\delta_{1k}$$

Зная решение задач $Y_{\alpha 3}$, можно определить $C^0_{ij\alpha 3}$ (x_1, x_2) и $h_{ij\alpha 3}$. Формулы, приведенные для $C_{ij\alpha 3}(x_1, x_2)$ и $h_{ij\alpha 3}$ в [5], остаются справедливыми и в случае упругого контакта между волокнами и связующим материалом. В табл. 1 для квадратной структуры приведены значения относительного модуля $h_3\equiv h_{3113}/\mu_1$ (т. е. отношение эффективного модуля сдвига к модулю сдвига связующего) в зависимости от $\varkappa$ и коэффициента K при объемной концентрации волокон $\gamma=0{,}75$. Указаны значения N_0 — размерности усеченной системы, которую необходимо решить для получения трех точных цифр после запятой.

Для правильной треугольной и квадратной структур в случае проскальзывания волокон относительно связующего материала система для определения коэффициентов a_k имеет вид

$$a_k+a_1\gamma\delta_{1k}-\Sigma^*\eta_{nk}a_n=\mu_1 R\delta_{1k} \tag{2.1}$$

С другой стороны, для тех же структур при $\varkappa=\infty$ система относительно a_k в задаче I_{13} имеет вид [5]:

$$a_k-a_1\gamma\delta_{1k}+\Sigma^*\eta_{nk}a_n=-\mu_1 R\delta_{1k} \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) следуют

$$a_1/\mu_1 R=\{1+\gamma-F(E-D)^{-1}G\}^{-1}$$

$$a_1/\mu_1 R=-\{1-\gamma-F(E+D)^{-1}G\}^{-1}$$

где E — единичная матрица бесконечного порядка, D — матрица с элементами η_{nk} $(n, k\geqslant 3)$, F — матрица-строка с элементами η_{1n} $(n\geqslant 3)$, G — матрица-столбец с элементами η_{k1} $(k\geqslant 3)$.

Заметим, что для правильной треугольной и квадратной структур $F(E+D)^{-1}G=F(E-D)^{-1}G$. Следовательно, в силу того что $h_{3113}/\mu_1=1-2\gamma a_1/(R\mu_1)$, при проскальзывании волокон $h_{3113}/\mu_1=1/d$, где $d=h_{3113}/\mu_1\equiv h_3$ при $\varkappa=\infty$ и идеальном контакте [8].

Для квадратной структуры ниже приведены значения относительного модуля $h_3\equiv h_{3113}/\mu_1$ в зависимости от γ при проскальзывании волокон.

Для $\gamma=(0{,}4;\ 0{,}55;\ 0{,}7;\ 0{,}75;\ 0{,}78)$, соответственно, $h_3=(0{,}425;\ 0{,}277;\ 0{,}134;\ 0{,}078;\ 0{,}027)$, т. е. при проскальзывании волокон в однонаправленном волокнистом композите с увеличением объемного содержания волокна относительный эффективный модуль сдвига h_3 резко уменьшается.

3. Рассмотрим решение задач $Y_{\beta\beta}$ ($\beta=1, 2, 3$) при $K\neq 0$. Функции N_k в областях S и A_{00} ищем в виде

$$2\mu_\alpha(N_1^\alpha+iN_2^\alpha)=\varkappa_\alpha\varphi_\alpha(z)-z\overline{\varphi_\alpha^1(z)}-\overline{\psi_\alpha(z)}$$

$$N_3=0, \quad \varkappa_\alpha=3-4\nu_\alpha$$

где ν_α — коэффициенты Пуассона. Дифференцируемые функции $\varphi_\alpha(z)$, $\psi_\alpha(z)$ комплексной переменной $z=x_1+ix_2$ те же, что и в соответствующих задачах $I_{\beta\beta}$ в случае идеального контакта.

Для определения коэффициентов a_k, b_k, c_k и d_k ($k=1, 3, 5$), определяющих потенциалы $\varphi_\alpha(z)$, $\psi_\alpha(z)$, воспользуемся условиями (1.5), записанными через функции $\varphi_\alpha(z)$, $\psi_\alpha(z)$, и разложением в ряд Лорана функций

Таблица 1

$\varkappa$	K	h_3	N_0	$\varkappa$	K	h_3	N_0
6	6	3,498	3	120	6	3,398	4
	20	2,232	4		20	6,241	7
	120	3,017	5		120	9,751	9
	400	3,582	6		400	10,690	10
20	6	2,976	4	400	6	3,468	4
	20	4,815	6		20	6,518	7
	120	6,746	8		120	10,526	10
	400	6,834	8		400	11,650	10

Таблица 2

K	h_{11}	N_0	h_{12}	N_0	h_{13}	N_0	h_{33}	N_0
6	1,81	4	1,58	4	1,07	4	2,41	4
20	1,95	4	1,39	4	1,07	4	2,41	4
120	2,07	4	1,21	4	1,07	4	2,41	4
400	2,10	4	1,18	4	1,07	4	2,41	4
6	3,10	4	3,20	4	1,93	4	7,21	4
20	3,46	6	2,85	4	1,96	4	7,22	4
120	4,07	6	2,31	6	2,04	6	7,23	4
400	4,30	6	2,12	6	2,07	8	7,24	4
6	4,28	4	4,83	4	2,75	4	39,92	4
20	4,93	6	4,49	4	2,88	4	39,95	4
120	6,66	6	3,61	6	3,24	6	40,04	4
400	7,80	8	2,98	8	3,46	8	40,10	6
6	4,53	4	5,19	4	2,93	4	130,86	4
20	5,25	6	4,87	4	3,09	4	130,90	4
120	7,36	6	3,94	6	3,56	6	131,02	4
400	8,95	10	3,09	8	3,88	8	131,10	6

$\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ в окрестности Γ_{00}. Получим в случае задач $Y_{\beta\beta}$ следующую систему нормального типа для определения коэффициентов a_k

$$a_k+(1-\varkappa)b_0\delta_{1k}/A_1^0+B_k^0(A_k^0)^{-1}\Sigma^*\overline{\eta_{n,\,k+2}a_n}+$$

$$+(1-\varkappa)(A_k^0)^{-1}\Sigma^*\{G_{nk}\bar{a}_n-C_n^0r_{nk}a_n-D_n^0\overline{\eta_{n+2,\,k}a_n}\}+$$

$$+(1-\varkappa)(A_k^0)^{-1}\eta_{1k}b_1=-\gamma_1(\beta)(A_1^0)^{-1}R\delta_{1k}$$

$$A_k^0=1+\varkappa\varkappa_1+K\varkappa(1+\varkappa_1)(\varkappa+\varkappa_2)D_k/E_k$$

$$B_k^0=\varkappa(1+\varkappa_1)\{1+K(\varkappa+\varkappa_2)B_k/E_k\}$$

$$C_k^0=1+K\varkappa(1+\varkappa_1)B_k/E_k$$

$$D_k^0=K\varkappa(1+\varkappa_1)D_k/E_k, \quad E_k=A_kD_k-B_kC_k$$

$$A_k=\{\varkappa(k+1)+K(1-\varkappa)\}(k+2), \quad D_k=k\varkappa$$

$$B_k=k\varkappa+K(1-\varkappa), \quad C_k=\varkappa(k+1)(k+2)+K(\varkappa+\varkappa_2)$$

$$\gamma_1(\beta)={}^1/{}_2(\overset{1}{C}_{22\beta\beta}-\overset{2}{C}_{22\beta\beta}+\overset{2}{C}_{11\beta\beta}-\overset{1}{C}_{11\beta\beta})$$

Параметры G_{nk} и r_{nk}, зависящие от геометрии композита, определены в [5].

Коэффициенты b_1 и c_1 зависят от a_k таким же образом, как и в случае идеального контакта. Коэффициенты b_{k+2}, c_{k+2}, d_k $(k=1, 3, 5, \ldots)$ зависят от a_k следующим образом:

$$\overline{b}_{k+2}=k\bar{a}_k-\Sigma^*\eta_{n,\,k+2}a_n+c_{k+2}$$

$$c_{k+2}=-D_k\{K(1+\varkappa_1)\varkappa\bar{a}_k+K\varkappa\gamma_1(\beta)R\delta_{1k}+$$
$$+\varkappa\gamma_3(\beta)R\delta_{1k}\}/E_k-B_k\{K\varkappa(1+\varkappa_1)\Sigma^*\eta_{n,\,k+2}a_n-\varkappa\gamma_3(\beta)R\delta_{1k}\}/E_k$$

$$d_k=A_k\{K\varkappa(1+\varkappa_1)\Sigma^*\eta_{n,\,k+2}a_n-$$
$$-\varkappa\gamma_3(\beta)R\delta_{1k}\}/E_k+G_k\{K\varkappa(1+\varkappa_1)a_k+$$
$$+K\varkappa\gamma_1(\beta)R\delta_{1k}+\varkappa\gamma_3(\beta)R\delta_{1k}\}/E_k$$

$$\gamma_3(\beta)={}^1/_2(C^2_{22\beta\beta}-C^2_{11\beta\beta})$$

Формулы, приведенные в [5] для $C_{ij\beta\beta}(x_1, x_2)$ и $h_{ij\beta\beta}$, остаются справедливыми и в случае упругого контакта. В табл. 2 для квадратной структуры приведены значения относительных модулей $h_{11}\equiv h_{1111}/(\lambda_1+2\mu_1)$, $h_{12}\equiv h_{1122}/\lambda_1$, $h_{13}\equiv h_{1133}/\lambda_1$, $h_{33}\equiv h_{3333}/(\lambda_1+2\mu_1)$ в зависимости от $\varkappa$ и K при $\gamma=0{,}75$ (λ_1 и μ_1 — упругие постоянные Ламе для связующего материала). Первые четыре строки в табл. 2 соответствуют $\varkappa=6$, вторые четыре строки — $\varkappa=20$, третьи четыре строки — $\varkappa=120$, последние четыре строки — $\varkappa=400$. В расчете принималось $\nu_1=0{,}39$; $\nu_2=0{,}2$.

4. Рассмотрим задачу Y_{12} при $K\neq0$. Функции N_k в областях S и A_{00} ищем в том же виде, что и для задач $Y_{\beta\beta}$. Для задачи Y_{12} коэффициенты определяются из следующей системы:

$$a_k+(1-\varkappa)(A_1{}^0)^{-1}b_0\delta_{1k}+B_k{}^0(A_k{}^0)^{-1}\Sigma^*\overline{\eta_{n,\,k+2}a_n}+$$
$$+(1-\varkappa)(A_k{}^0)^{-1}\Sigma^*\{G_{nk}\bar{a}_n-C_n{}^0r_{nk}a_n-D_n{}^0\eta_{n+2,\,k}a_n\}+$$
$$+(1-\varkappa)(A_k{}^0)^{-1}\eta_{1k}b_1=i(\mu_1-\mu_2)(A_1{}^0)^{-1}R\delta_{1k}$$

Коэффициенты b_1, c_1 для задачи Y_{12} зависят от a_k так же, как и для задачи I_{12}. А коэффициенты b_{k+2}, c_{k+2}, d_k $(k=1, 3, 5, \ldots)$ зависят от a_k следующим образом:

$$\overline{b}_{k+2}=k\bar{a}_k-\Sigma^*\eta_{n,\,k+2}a_n+c_{k+2}$$

$$c_{k+2}=-D_k\{K\varkappa(1+\varkappa_1)\bar{a}_k+K\varkappa i(\mu_1-\mu_2)R\delta_{1k}+\varkappa i\mu_2R\delta_{1k}\}/E_k-$$
$$-B_k\{K\varkappa(1+\varkappa_1)\Sigma^*\eta_{n,\,k+2}a_n-\varkappa i\mu_2R\delta_{1k}\}/E_k$$

$$d_k=A_k\{K\varkappa(1+\varkappa_1)\Sigma^*\eta_{n,\,k+2}a_n-$$
$$-\varkappa i\mu_2R\delta_{1k}\}/E_k+c_k\{K\varkappa(1+\varkappa_1)\bar{a}_k+$$
$$+K\varkappa i(\mu_1-\mu_2)R\delta_{1k}+\varkappa i\mu_2R\delta_{1k}\}/E_k$$

Формулы, приведенные в [5] для C^0_{ij12} (x_1, x_2) и h_{ij12}, остаются справедливыми и в случае упругого контакта. В табл. 3 для квадратной структуры приведены значения относительного модуля $h\equiv h_{1212}/\mu_1$ в зависимости от $\varkappa$ и K при $\gamma=0{,}75$. В расчете принималось $\nu_1=0{,}39$, $\nu_2=0{,}2$.

5. Решение задач $Y_{\beta\beta}$ и Y_{12} при $K=0$ отличается от решения соответствующих задач при $K\neq0$ параметрами $A_k{}^0$, $B_k{}^0$, $C_k{}^0$, $D_k{}^0$, входящими в системы уравнений для определения a_k и связью между коэффициентами, определяющими комплексные потенциалы $\varphi_\alpha(z)$, $\psi_\alpha(z)$.

Параметры $A_k{}^0$, $B_k{}^0$, $C_k{}^0$, $D_k{}^0$ при проскальзывании волокон имеют вид

$$A_k{}^0=1+\varkappa\varkappa_1+\varkappa(1+\varkappa_1)(\varkappa+\varkappa_2)B_k/E_k$$

$$B_k{}^0=\varkappa(1+\varkappa_1)\{1+(\varkappa+\varkappa_2)B_k/E_k\}$$

$$C_k{}^0=1+\varkappa(1+\varkappa_1)B_k/E_k,\quad D_k{}^0=\varkappa(1+\varkappa_1)B_k/E_k$$

$$E_k=A_kD_k-B_kC_k,\quad A_k=(k+1)(k+2)$$

$$D_k=\varkappa-1,\quad B_k=k,\quad C_k=\varkappa+\varkappa_2+(\varkappa-1)(k+2)$$

Таблица 3

$\varkappa$	K	h	N_0	$\varkappa$	K	h	N_0
6	6	2,802	10	120	6	7,593	**14**
	20	2,971	8		20	6,955	12
	120	3,061	8		120	6,676	10
	400	3,075	6		400	6,634	10
20	6	5,014	14	400	6	8,231	14
	20	4,961	10		20	7,404	12
	120	4,948	10		120	7,046	12
	400	4,947	10		400	6,992	10

Таблица 4

$\varkappa$	h_{11}	N_0	h_{12}	N_0	h_{13}	N_0	h_{33}	N_0
6	1,28	2	1,33	2	1,03	2	1,75	2
20	1,56	2	1,68	2	1,26	2	4,26	2
120	1,71	2	1,87	2	1,38	2	21,62	2
400	1,73	2	1,90	2	1,40	2	70,10	2
6	1,41	2	1,51	2	1,04	2	2,03	2
20	1,93	2	2,21	2	1,45	2	5,50	2
120	2,25	2	2,64	2	1,70	2	29,38	2
400	2,30	2	2,72	2	1,74	2	96,06	2
6	1,58	4	1,75	4	1,06	2	2,31	2
20	2,52	4	3,08	4	1,76	4	6,77	4
120	3,27	4	4,19	4	2,32	4	37,24	4
400	3,42	4	4,41	4	2,43	4	122,10	4
6	1,64	4	1,84	4	1,07	2	2,41	2
20	2,80	4	3,51	4	1,90	4	7,21	4
120	3,86	4	5,09	4	2,67	4	39,90	4
400	4,09	4	5,42	4	2,84	4	130,83	4

Коэффициент b_1 при проскальзывании волокон зависит от a_k так же, как и в соответствующих задачах $Y_{\beta\beta}$, Y_{12} при $K \neq 0$. Для действительной части коэффициента c_1 при $K=0$ в случае задачи $Y_{\beta\beta}$ имеем

$$\operatorname{Re} c_1 = \operatorname{Re}(a_0 + \Sigma^* \eta_{n1} a_n) + {}^1/_2 \{b_1 + \gamma_2(\beta) R\}$$

$$\gamma_2(\beta) = {}^1/_2 (\overset{1}{C}_{11\beta\beta} - \overset{2}{C}_{11\beta\beta} + \overset{1}{C}_{22\beta\beta} - \overset{2}{C}_{22\beta\beta})$$

а в случае задачи Y_{12}:

$$\operatorname{Re} c_1 = \operatorname{Re}(a_0 + \Sigma^* \eta_{n1} a_n) + b_1/2$$

Коэффициенты b_{k+2}, c_{k+2}, d_k ($k=1, 3, 5, \ldots$) зависят от a_k для задачи $Y_{\beta\beta}$ ($\beta=1$, 2, 3) при $K=0$ следующим образом:

$$b_{k+2} = k\bar{a}_k - \Sigma^* \eta_{n, k+2} a_n + c_{k+2}$$

$$c_{k+2} = -D_k \gamma_3(\beta) R\delta_{1k}/E_k - B_k \{\varkappa(1+\varkappa_1)(\bar{a}_k + \Sigma^* \eta_{n, k+2} a_n) + \varkappa\gamma_1(\beta) R\delta_{1k}\}/E_k$$

$$d_k = A_k \{\varkappa(1+\varkappa_1)(a_k + \Sigma^* \eta_{n, k+2} a_n) +$$
$$+ \varkappa\gamma_1(\beta) R\delta_{1k}\}/E_k + C_k \gamma_3(\beta) R\delta_{1k}/E$$

а для задачи Y_{12}:

$$b_{k+2} = k\bar{a}_k - \Sigma^* \eta_{n, k+2} a_n + c_{k+2}$$

$$c_{k+2} = -D_k i\mu_2 R\delta_{1k}/E_k - B_k \{\varkappa(1+\varkappa_1)(\bar{a}_k + \Sigma^* \eta_{n, k+2} a_n) + i\varkappa(\mu_1 - \mu_2) R\delta_{1k}\}/E_k$$

$$d_k = A_k \{\varkappa(1+\varkappa_1)(\bar{a}_k + \Sigma^* \eta_{n, k+2} a_n) +$$
$$+ i\varkappa(\mu_1 - \mu_2) R\delta_{1k}\}/E_k + C_k i\mu_2 R\delta_{1k}/E_k$$

В табл. 4, 5 приведены значения относительных модулей h, h_{11}, h_{12}, h_{13} при проскальзывании волокон в зависимости от объемной концентрации $\gamma=0{,}4$; 0,55; 0,7; 0,75; и $\varkappa$. В табл. 4 первые четыре строки соответствуют $\gamma=0{,}4$, вторые четыре строки — $\gamma=0{,}55$, третьи четыре строки —

Таблица 5

γ	$\varkappa$	h	N_0	γ	$\varkappa$	h	N_0
	6	1,213	2		6	1,697	8
	20	1,382	2		20	2,722	8
0,4	120	1,457	2	0,7	120	3,475	8
	400	1,469	2		400	3,615	8
		1,473	2			3,679	10
	6	1,356	4		6	2,136	10
	20	1,689	4		20	5,511	16
0,55	120	1,855	4	0,75	120	12,695	20
	400	1,881	4		400	15,532	20
		1,892	4			17,177	20

$\gamma=0{,}7$, последние четыре строки — $\gamma=0{,}75$. В расчетах принималось $\nu_1=0{,}39$, $\nu_2=0{,}2$.

В таблицах указываются значения N_0 — размерности усеченной системы, которую необходимо решить для получения двух точных цифр после запятой (табл. 2, 4) и трех точных цифр после запятой (табл. 3, 5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ. 1984. 336 с.
2. *Ванин Г. А.* К теории волокнистых сред с несовершенствами // Прикл. механика. 1977. Т. 13. № 10. С. 14–22.
3. *Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А.* Теория упругого линейно-армированного композиционного материала // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 537–546.
4. *Бахвалов Н. С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1975. Т. 221. № 3. С. 516–519.
5. *Мольков В. А., Победря Б. Е.* Эффективные характеристики однонаправленного волокнистого композита с периодической структурой // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 119–130.
6. Композиционные материалы. Т. 1/Меткалер А. Дж., Эберт Л. Дж., Райт П. К. и др. Поверхности раздела в металлических композитах. М.: Мир. 1978. 438 с.
7. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз. 1962. 708 с.
8. *Мольков В. А., Победря Б. Е.* Эффективные модули упругости однонаправленного волокнистого композита // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1984. Т. 275. № 3. С. 586–589.

Москва

Поступила в редакцию
17.XII.1984