ского момента опишет на сфере окружность с центром в точке (ρ^*, σ^*). Радиус окружности зависит от начальных условий. Имеет место прецессия вектора кинетического момента. Угловая скорость прецессии определяется согласно [1] формулой $\omega=\partial\Phi/\partial\alpha(\sin\alpha)^{-1}=-n$. Частным случаем описанного движения является осевое вращение спутника вокруг оси симметрии, совпадающей с направлением на особые точки. Из характера траекторий вектора кинетического момента ясно, что положение оси вращения в инерциальном пространстве устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. 1965. 416 с.
2. *Ляховка Г. В.* Влияние сил Лоренца на движение спутника относительно центра масс // Вестн. Ленингр. ун-та. 1981. Вып. 2. № 7. С. 77–82.
3. *Ляховка Г. В.* Влияние гравитационных сил и сил Лоренца на движение спутника относительно центра масс // Вестн. Ленингр. ун-та. 1981. Вып. 3. № 13. С. 85–90.
4. *Clancy Th. F., Mitchell Th. P.* Effects of radiation forces on the altitude of an artificial earth satellite // AIAA Journal. 1964. V. 2. No. 3. P. 517–524.
5. *Карымов А. А.* Определение времени освещенности искусственного спутника Земли Солнцем // Космич. исследования. 1967. Т. 5. Вып. 2. С. 298–301.

Ухта

Поступила в редакцию
4.V.1985

УДК 531.38

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХОРИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА

МОТОРИНА Н. Н.

Методом теории возмущений Хори решается один частный случай задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Решения получены в переменных действие – угол, а затем осуществлен переход к переменным $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$.

Рассматривается тяжелое твердое тело с одной закрепленной точкой, распределение масс в котором мало отличается от случая Лагранжа, а центр тяжести расположен достаточно близко к закрепленной точке. В переменных Депри [1] уравнениям движения $\partial(L, G, H)/dt=\partial F/\partial(l, g, h)$, $d(l, g, h)/dt=-\partial F/\partial(L, G, H)$ соответствует гамильтониан F, который можно представить в соответствии с порядком величин в виде [2]:

$$F=F_0+F_1+F_2,\quad F_0={}^1/_2(G^2-L^2)/A+{}^1/_2L^2/C$$
$$F_1=Pz_CG^{-2}\{LH-[(G^2-L^2)(G^2-H^2)]^{1/2}\cos g\}$$
$$F_2=(A-B)(G^2-L^2)\cos^2 l/(2AB)$$

где A, B, C – главные моменты инерции для закрепленной точки, P – вес тела, z_C – координата центра масс в главных осях инерции. В качестве малого параметра принята величина $\varepsilon=\max\{A-B, z_C\}$.

Осуществим каноническое преобразование переменных $L, G, H, l, g, h\to L', G', H', l', g', h'$ для построения нового гамильтониана $F'=F_0'+F_1'+F_2'+\ldots$ и генератора Ли $S(L', G', H', l', g', h')=S_1'+S_2'+\ldots$ согласно алгоритму метода Хори [3]:

$$F_0'=F_0,\quad F_1'=F_{1s},\quad S_1'=\int F_{1p}\,dt' \tag{1}$$
$$F_2'=F_{2s}+{}^1/_2\{F_1+F_1', S_1'\}_s,\quad S_2'=\int [F_{2p}+{}^1/_2\{F_1+F_1', S_1'\}_p]dt'$$

Здесь фигурными скобками обозначены скобки Пуассона, индексами p и s – периодическая и постоянная части по t' соответственно. Параметр t' вводится вспомогательными уравнениями $d(L', G', H')/dt=\partial F_0/\partial(l', g', h')$, $d(l', g', h')/dt=-\partial F_0/\partial(L', G', H')$, которые позволяют в (1) перейти от интегрирования по t' к интегрированию по g' посредством зависимости

$$dt'=-(\partial F_0/\partial G')^{-1}dg' \tag{2}$$

Из (1) с учетом (2) получаем следующие значения составляющих гамильтониана и генератора Ли (для удобства штрихи у переменных опущены):

$$F_0'={}^1/_2(G^2-L^2)/A+{}^1/_2L^2/C,\quad F_1=PLHz_C/G^2$$

$$S_1'=APz_CG^{-3}[(G^2-L^2)(G^2-H^2)]^{1/2}\sin g \tag{3}$$

$$F_2'=(A-B)(G^2-L^2)\cos^2 l/(2AB)-{}^1/_4AP^2z_C^2G^{-6}(3L^2G^2+3G^2H^2-5L^2H^2-G^4)$$

$$S_2'=2A^2P^2LHz_C^2G^{-7}[(G^2-L^2)(G^2-H^2)]^{1/2}\sin g-$$
$$-{}^1/_8A^2P^2z_C^2G^{-7}(L^2G^2+G^2H^2-L^2H^2-G^4)\sin 2g$$

Оставшаяся в гамильтониане F' угловая переменная l' исключается вторым каноническим преобразованием с помощью перехода к третьей системе переменных L', G', H', l', g', $h'\to L''$, G'', H'', l'', g'', h''. Далее повторяется процедура (1). В этом случае F_1' играет роль F_0 во вспомогательных уравнениях (2) при определении параметра t''.

Окончательное значение гамильтониана и генератора Ли имеют вид (двойные штрихи у переменных опущены):

$$F_2''={}^1/_4(A-B)(G^2-L^2)/(AB)-{}^1/_4AP^2z_C^2G^{-6}(3L^2G^2+3G^2H^2-5L^2H^2-G^4)$$

$$S_1''=-{}^1/_8G^2(A-B)(G^2-L^2)(ABPHz_C)^{-1}\sin 2l$$

$$S_2''={}^1/_4LG^4(A-B)^2(G^2-L^2)(ABPHz_C)^{-2}\sin 2l+{}^1/_{16}L(A-B)(5H^2-3G^2)(BH^2G^2)^{-1}\sin 2l$$

Выражения для F_0'' и F_1'' совпадают с приведенными в (3). Итак, получен гамильтониан F'', зависящий только от L'', G'', H''. Из уравнений движения следует $L''=\text{const}$, $G''=\text{const}$, $H''=\text{const}$, $l''^{\bullet}=\text{const}$, $g''^{\bullet}=\text{const}$, $h''^{\bullet}=\text{const}$, т. е. угловые переменные являются линейными функциями времени.

Таким образом получены решения в переменных L'', G'', H'', l'', g'', h'', которые ввиду инвариантности скобок Пуассона связаны с исходными переменными формулой

$$f(L,G,H,l,g,h)=f(L'',G'',H'',l'',g'',h'')+\{f,S'+S''\}+$$
$$+{}^1/_2\{f,\{S',S''\}\}+{}^1/_2\{\{f,S'+S''\},S'+S''\}+O(\varepsilon^3) \tag{4}$$

Для исходных переменных получены следующие значения (двойные штрихи в правых частях опущены):

$$L=L-{}^1/_4G^2(A-B)(G^2-L^2)(ABPHz_C)^{-1}\cos 2l+O(\varepsilon^2)$$

$$G=G+APz_CG^{-3}[(G^2-L^2)(G^2-H^2)]^{1/2}\cos g+$$
$$+{}^1/_8L(A-B)(BGH)^{-1}[(G^2-L^2)(G^2-H^2)]^{1/2}\cos 2l(\sin g+\cos g)-$$
$$-{}^1/_8(A-B)(G^2-2L^2)(BG^2H)^{-1}[(G^2-L^2)(G^2-H^2)]^{1/2}\sin 2l(\sin g-\cos g)-$$
$$-{}^1/_2A^2P^2z_C^2G^{-2}(2L^2G^2+2G^2H^2-3L^2H^2-G^4)\cos 2g+O(\varepsilon^3),\quad H=H''$$

$$l=l+APLz_CG^{-3}[(G^2-H^2)/(G^2-L^2)]^{1/2}\sin g-{}^1/_4LG^2(A+B)(ABPHz_C)^{-1}\sin 2l+O(\varepsilon^2)$$

$$g=g-APz_CG^{-4}[(G^2-L^2)(G^2-H^2)]^{-1/2}(2L^2G^2+2G^2H^2-3L^2H^2-G^4)\sin g+$$
$$+{}^1/_4G(A-B)(2G^2-L^2)(ABPHz_C)^{-1}\sin 2l+O(\varepsilon^2)$$

$$h=h+APHz_CG^{-3}[(G^2-L^2)/(G^2-H^2)]^{1/2}\sin g-$$
$$-{}^1/_8G^2(A-B)(G^2-L^2)(ABPH^2z_C)^{-1}\sin 2l+O(\varepsilon^2)$$

Формула (4) позволяет также легко определить переменные p, q, r, γ, γ', γ'', если воспользоваться их выражениями через переменные Депри [4] и полученным значением генератора Ли

$$p=(G^2-L^2)^{1/2}A^{-1}\sin l-{}^1/_4LG^2(A-B)(G^2-L^2)^{1/2}(A^2BPHz_C)^{-1}\sin l+$$
$$+PLz_CG^{-3}(G^2-H^2)^{1/2}\cos l\sin g+Pz_CG^{-2}(G^2-H^2)^{1/2}\sin l\cos g+O(\varepsilon^2)\quad q=Ap/B,\quad r=L/C,$$

$$\gamma''=LHG^{-2}-G^{-2}[(G^2-L^2)(G^2-H^2)]^{1/2}\cos g-{}^1/_4(A-B)(G^2-L^2)(ABPz_C)^{-1}\cos 2l-$$
$$-{}^1/_4L(A-B)[(G^2-L^2)(G^2-H^2)]^{1/2}(ABPHz_C)^{-1}\cos 2l\cos g-$$
$$-2APLHz_CG^{-6}[(G^2-L^2)(G^2-H^2)]^{1/2}\cos g+$$
$$+{}^1/_4(A-B)(2G^2-L^2)(ABPGHz_C)^{-1}[(G^2-L^2)(G^2-H^2)]^{1/2}\sin 2l\sin g-$$
$$-APz_CG^{-6}(L^2G^2+G^2H^2-L^2H^2-G^4)\sin^2 g-APz_CG^{-6}(L^2G^2-G^2H^2-2L^2H^2)+O(\varepsilon^2)$$

Итак, метод Хори позволил построить аналитическую теорию второго порядка для одного частного случая движения твердого тела с закрепленной точкой (выше приведены возмущения второго порядка только для G), используя в процедуре усреднения определение квадратур лишь от элементарных функций.

Решение исходной системы уравнений получено в виде условно-периодических функций времени. В случае соизмеримости частот функция G (модуль кинетического момента) становится периодической. В выражениях угловых переменных при этом будут вековые и периодические части. Следовательно, для определенных начальных условий и параметров тела движение будет периодическим, что согласуется с результатами [5] для рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Deprit A.* Free rotation of a rigid body studied in the phase plane // Amer. J. Phys. 1967. V. 35. No. 5. P. 424–428 = Механика: Период. сб. перев. иностр. статей. 1968. № 2. С. 3–9.
2. *Демин В. Г., Киселев Ф. И.* О периодических движениях твердого тела в центральном ньютоновском поле // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 224–227.
3. *Hori G.* Theory of general perturbations with unspecified canonical variables // Publ. Astron. Soc. Jap. 1966. V. 18. No. 4. P. 287–296.
4. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука. 1977. 328 с.
5. *Козлов В. В.* Новые периодические решения в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 407–414.

Кишинев

Поступила в редакцию 18.III.1986

УДК 531.8

РАСЧЕТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ МАНИПУЛЯТОРОВ ПО ЗАДАННОМУ ПОЛОЖЕНИЮ ОБЪЕКТА

КЛЮЙКО Э. В.

В [1] дано общее решение задачи о перемещении твердого тела (например, с помощью манипуляторов) по заданным координатам промежуточных положений не менее чем трех его точек. Рассматривалось шестимерное движение с тремя поворотами и тремя прямолинейными перемещениями. Развитие робототехники порождает много других вариантов переноса, которые реализуются в шестиподвижных универсальных манипуляторах. Анализу кинематической структуры манипуляторов, выбору схем и разработке управляющих программ их движениями посвящены работы [2–4]. Программирование управления перемещений манипуляторов основано на прямой задаче о положениях в механизмах, состоящей в определении координат рабочих точек схвата по заданным обобщенным координатам положений звеньев. Соответствующие управляющие программы представляют обычно многошаговые алгоритмы [3], основанные на итерационных методах с применением последовательных приближений и предполагают большой объем вычислений. Одношаговые алгоритмы значительно проще, но предполагают явное выражение положений звеньев манипулятора через координаты положений подвижного объекта, т. е. требует решения обратной задачи о положениях. В [2] дан обзор решений обратной задачи, в которых применен матричный способ преобразования координат, предложенный для расчета механизмов в [5, 6]. Попытка дать общее решение обратной задачи [7, 8] не позволяет создать автоматизированных алгоритмов, т. к. для конкретных схем манипуляторов требуются специальные подходы. Решения для частных структур универсальных манипуляторов чаще приводят к системе нелинейных уравнений, решаемых численными методами. В [2] для антропоморфной схемы шестиподвижного манипулятора дано явное решение с применением обратного матричного перехода, упростившего решение исключением некоторых из неизвестных обобщенных координат. Решение для этой же схемы в векторной форме [9] является более трудоемким. Более общим является метод [10], основанный на расчленении манипулятора на переносную и ориентирующую части с раздельным определением соответствующих им обобщенных координат. Такой подход дает более простые и явные зависимости для этих координат. Однако, как это показано дальше, для универсальных манипуляторов с сферической схемой ориентации прямые матричные преобразования позволяют получить еще более простые зависимости, так как из выводимых при этом 12 уравнений четырех точек положения объекта, всегда можно выбрать шесть наиболее удобных для явного определения обобщенных координат.

Прямоугольный манипулятор. Из шести подвижностей в нем три поступательные Π_1–Π_3 выполняются звеньями *1–3* и предназначены для переноса, а три вращательные B_1–B_3 реализуются звеньями *4–6* и предназначены для ориентации (фиг. 1). Ось вращения B_1 соосна с последним звеном *3* переносной части манипулятора. Пусть схват *6* связан с системой координат $x_3y_3z_3$, в которой зафиксированы четыре жестко связанные с зажатой деталью точки, образующие подвижный прямо-