МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1988

УДК 531.55

ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС С УЧЕТОМ СИЛ ЛОРЕНЦА И СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

ЛЯХОВКА Г. В.

Изучается вращательное движение искусственного спутника Земли, окруженного экраном электростатической защиты от внешней радиации, под действием сил Лоренца и сил светового давления. Предполагается, что вращение спутника вокруг центра масс не оказывает влияния на поступательное движение центра масс; траекторией центра масс спутника является невозмущенная кеплеровская орбита – окружность радиуса R (прецессия орбиты не учитывается). Ориентация орбиты относительно Солнца предполагается неизменной.

Для описания поведения спутника с экраном воспользуемся уравнениями возмущенного движения [1]. В [2, 3] рассматривалась задача о движении спутника относительно центра масс под действием сил Лоренца. Чтобы учесть влияние сил светового давления, достаточно в уравнения движения [3], в которых возмущающими моментами являются моменты лоренцевых сил, добавить осредненные компоненты момента сил светового давления. В уравнениях [3] следует положить $c=0$, так как действием гравитационных сил пренебрегаем. Кроме того, значения коэффициентов этих уравнений необходимо вычислить для рассматриваемого случая круговой орбиты.

При определении момента сил светового давления будем исходить из следующих допущений: вследствие малости размеров спутника по сравнению с расстоянием до Солнца считаем солнечные лучи параллельными; суммарное давление направлено по прямой от центра Солнца к центру Земли.

Сила светового давления для спутника сферической формы не зависит от коэффициента отражения [4] и равна $F=p_cS$, где S – площадь проекции защитного экрана на плоскость, перпендикулярную световому потоку, p_c – световое давление. Будем предполагать, что световое давление постоянно [1] ($S=\pi R_c^2$, где R_c – радиус экрана). В [5] показано, что возможны такие орбиты, находясь на которых спутник будет все время освещен Солнцем. Условие освещенности спутника в течение всего оборота имеет вид [5]: $|\cos\rho_1|>R_E/R$. Здесь ρ_1 – угол между нормалью к плоскости орбиты и направлением на Солнце, R_E – радиус Земли. Именно такие орбиты и будут рассматриваться в дальнейшем. Если обозначить через $\boldsymbol{\tau}$ орт направления на Солнце, то его положение относительно орбиты можно задать углами ρ_1, σ_1, где σ_1 – угол между направлением на перигей орбиты и проекцией $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ на плоскость орбиты. Момент сил светового давления относительно центра масс спутника, окруженного защитным экраном, определяется формулой $\mathbf{M}_0=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$. Ввиду того что в уравнения возмущенного движения входят компоненты M_1, M_2, M_3, которые формируются из проекций момента по осям перигейной системы координат [1], представим $\mathbf{M}_0$ в виде

$$M_X=\pi R_c^2p_c[x_0(\beta_1\sin\rho_1\cos\sigma_1-\gamma_1\cos\rho_1)+y_0(\beta_2\sin\rho_1\cos\sigma_1-\gamma_2\cos\rho_1)+$$
$$+z_0(\beta_3\sin\rho_1\cos\sigma_1-\gamma_3\cos\rho_1)]$$
$$M_Y=\pi R_c^2p_c[x_0(\gamma_1\sin\sigma_1-\alpha_1\cos\sigma_1)+y_0(\gamma_2\sin\sigma_1-\alpha_2\cos\sigma_1)+$$
$$+z_0(\gamma_3\sin\sigma_1-\alpha_3\cos\sigma_1)]\sin\rho_1$$
$$M_Z=\pi R_c^2p_c[x_0(\alpha_1\cos\rho_1-\beta_1\sin\rho_1\sin\sigma_1)+y_0(\alpha_2\cos\rho_1-\beta_2\sin\rho_1\sin\sigma_1)+$$
$$+z_0(\alpha_3\cos\rho_1-\beta_3\sin\rho_1\sin\sigma_1)]$$

Предположим, что спутник является осесимметричным (моменты инерции подчиняются соотношению $A=B\neq C$). Направляющие косинусы α_i, β_i, γ_i зависят от «быстрых» переменных – угла прецессии ψ и угла собственного вращения φ [1]. Осредним компоненты момента сил светового давления по этим переменным, предполагая, что частоты переменных φ и ψ несоизмеримы. Получим

$$\mathbf{M}_0=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ X_0 & Y_0 & Z_0\\ \sin\rho_1\sin\sigma_1 & \cos\rho_1 & \sin\rho_1\cos\sigma_1\end{vmatrix}$$

где X_0, Y_0, Z_0 – координаты центра защитного экрана относительно перигейной системы координат. Очевидно, что

$$X_0 = x_0\alpha_1 + y_0\alpha_2 + z_0\alpha_3, \qquad Y_0 = x_0\beta_1 + y_0\beta_2 + z_0\beta_3, \qquad Z_0 = x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты центра экрана в главных центральных осях инерции, α_i, β_i, γ_i – направляющие косинусы. Тогда составляющие момента сил светового давления можно записать в форме

$$\langle M_X\rangle = \pi R_c^2 p_c z_0 \cos\theta(\sin\rho_1\cos\sigma_1\cos\rho - \cos\rho_1\sin\rho\cos\sigma)$$

$$\langle M_Y\rangle = \pi R_c^2 p_c z_0 \cos\theta(\sin\sigma_1\cos\sigma - \cos\sigma_1\sin\sigma)\sin\rho_1\sin\rho$$

$$\langle M_Z\rangle = \pi R_c^2 p_c z_0 \cos\theta(\cos\rho_1\sin\rho\sin\sigma - \sin\rho_1\sin\sigma_1\cos\rho)$$

Здесь θ – угол нутации, ρ – угол между вектором кинетического момента и нормалью к плоскости орбиты, σ – угол между направлением на перигей и проекцией вектора кинетического момента на плоскость орбиты (для круговой орбиты вместо направления на перигей рассматривается линия узлов). Входящие в уравнения возмущенного движения проекции момента M_1, M_2, M_3 на оси системы координат, связанной с вектором кинетического момента L, вычисляются по формулам [1]. Для случая сил светового давления эти проекции имеют вид

$$\langle M_1\rangle = \pi R_c^2 p_c z_0 \cos\theta\sin\rho_1\sin(\sigma - \sigma_1)$$

$$\langle M_2\rangle = \pi R_c^2 p_c z_0 \cos\theta[\sin\rho_1\cos\rho\cos(\sigma-\sigma_1) - \sin\rho\cos\rho_1], \qquad \langle M_3\rangle = 0$$

В силу того что $\langle M_3\rangle = 0$, имеем $L^{\bullet} = 0$, т. е. модуль вектора кинетического момента не меняется с течением времени. Можно показать, что в рамках принятого приближения движение спутника с экраном вокруг центра масс под действием сил Лоренца и сил светового давления представляет собой регулярную прецессию относительно вектора кинетического момента ($\psi^{\bullet} \approx L_0/A$, $\theta = \mathrm{const}$). Спутник вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси вращения эллипсоида инерции, а последняя также вращается вокруг неизменного по величине вектора кинетического момента, составляя с ним постоянный угол.

Таким образом, из шести уравнений [1] возмущенного движения остается два. Переходя от переменной t к новой независимой переменной ν – истинной аномалии, представим эти уравнения в виде

$$d\rho/d\nu = n\sin(\sigma - \sigma^*), \qquad d\sigma/d\nu = n\cos(\sigma-\sigma^*)\operatorname{ctg}\rho - m \tag{1}$$

Углы ρ и σ определяют положение вектора кинетического момента в инерциальном пространстве. В (1) использованы обозначения

$$n\cos\sigma^* = \pi(\mu R)^{-1/2} L_0^{-1} R_c^2 R^2 p_c z_0 \cos\theta_0 \sin\rho_1\cos\sigma_1$$

$$n\sin\sigma^* = -{}^1/_8(\mu R)^{-1/2}(\pi R A)^{-1}\mu_0\mu_1 m_1 Q\sin i\{{}^1/_2 z_0^2\sin^2\theta_0 + {}^1/_3 R_c^2[1+(A-C)\cos^2\theta_0/C]\} +$$
$$+\pi\mu^{-1/2}L_0^{-1}R_c^2R^{3/2}p_c z_0\cos\theta_0\sin\rho_1\sin\sigma_1$$

$$m = {}^1/_4\pi R^{-3/2}A^{-1}\mu^{-1/2}\mu_0\mu_1 m_1 Q\cos i\{{}^1/_2 z_0^2\sin^2\theta_0 +$$
$$+{}^1/_3R^2[1+(A-C)\cos^2\theta_0/C]\} + \pi R^{3/2}\mu^{-1/2}L_0^{-1}R_c^2 p_c z_0\cos\theta_0$$

где μ_0 – магнитная постоянная, μ_1 – магнитная проницаемость, m_1 – магнитный момент земного диполя, Q – заряд экрана, μ – гравитационная постоянная, i – наклонение орбиты.

Уравнения типа (1) подробно изучены в [1]. Остановимся на выводах. Систему уравнений (1) можно исследовать используя методы фазовой плоскости, в частности примем за фазовые координаты ρ и σ. Особым точкам (ρ^*, σ^*) дифференциальных уравнений (1) отвечают состояния равновесия рассматриваемой системы. Их координаты удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{ctg}\rho^* = \pm m/n, \qquad \operatorname{tg}\sigma^* = \operatorname{tg}\sigma_1 - \mu_0\mu_1 m_1 Q\sin i L\{{}^1/_2 z_0^2\sin^2\theta_0 + {}^1/_3R_c^2[1+$$
$$+(A-C)\cos^2\theta_0/C]\}/(8\pi^2R_c^2R^3p_0z_0\cos\theta_0\sin\rho_1\cos\sigma_1 A)^{-1} \tag{2}$$

Если умножить первое уравнение системы на $[-m\sin\rho + n\cos\rho\cos(\sigma-\sigma^*)]$, второе на $-n\sin\rho\sin(\sigma-\sigma^*)$ и сложить, то после интегрирования получим

$$\Phi = m\cos\rho + n\sin\rho\cos(\sigma-\sigma^*) = \mathrm{const} \tag{3}$$

Выражение (3) представляет собой первый интеграл системы (1). С учетом (2) первый интеграл преобразуется к виду

$$\Phi = n(\cos\rho^*)^{-1}[\sin\rho\sin\rho^*\cos(\sigma-\sigma^*) \pm \cos\rho\cos\rho^*] \tag{4}$$

Перейдем теперь к изображению на сфере единичного радиуса с центром, совпадающим с центром масс спутника. Направлению (ρ^*, σ^*) соответствует равновесное положение вектора кинетического момента. Выражение $\sin\rho\sin\rho^*\cos(\sigma-\sigma^*) \pm$ $\pm\cos\rho\cos\rho^*$ представляет собой косинус угла α между особым направлением (ρ^*, σ^*) и вектором кинетического момента. Как видно из (4) ($\alpha = \mathrm{const}$), вектор кинетического момента опишет на сфере окружность с центром в точке (ρ^*, σ^*). Радиус окружности зависит от начальных условий. Имеет место прецессия вектора кинетического момента. Угловая скорость прецессии определяется согласно [1] формулой $\omega=\partial\Phi/\partial\alpha(\sin\alpha)^{-1}=-n$. Частным случаем описанного движения является осевое вращение спутника вокруг оси симметрии, совпадающей с направлением на особые точки. Из характера траекторий вектора кинетического момента ясно, что положение оси вращения в инерциальном пространстве устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. 1965. 416 с.
2. *Ляховка Г. В.* Влияние сил Лоренца на движение спутника относительно центра масс // Вестн. Ленингр. ун-та. 1981. Вып. 2. № 7. С. 77–82.
3. *Ляховка Г. В.* Влияние гравитационных сил и сил Лоренца на движение спутника относительно центра масс // Вестн. Ленингр. ун-та. 1981. Вып. 3. № 13. С. 85–90.
4. *Clancy Th. F., Mitchell Th. P.* Effects of radiation forces on the altitude of an artificial earth satellite // AIAA Journal. 1964. V. 2. No. 3. P. 517–524.
5. *Карымов А. А.* Определение времени освещенности искусственного спутника Земли Солнцем // Космич. исследования. 1967. Т. 5. Вып. 2. С. 298–301.

Ухта

Поступила в редакцию
4.V.1985

УДК 531.38

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХОРИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА

МОТОРИНА Н. Н.

Методом теории возмущений Хори решается один частный случай задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Решения получены в переменных действие – угол, а затем осуществлен переход к переменным $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$.

Рассматривается тяжелое твердое тело с одной закрепленной точкой, распределение масс в котором мало отличается от случая Лагранжа, а центр тяжести расположен достаточно близко к закрепленной точке. В переменных Депри [1] уравнениям движения $\partial(L, G, H)/dt=\partial F/\partial(l, g, h)$, $d(l, g, h)/dt=-\partial F/\partial(L, G, H)$ соответствует гамильтониан F, который можно представить в соответствии с порядком величин в виде [2]:

$$F=F_0+F_1+F_2,\quad F_0={}^1/_2(G^2-L^2)/A+{}^1/_2L^2/C$$
$$F_1=Pz_CG^{-2}\{LH-[(G^2-L^2)(G^2-H^2)]^{1/2}\cos g\}$$
$$F_2=(A-B)(G^2-L^2)\cos^2 l/(2AB)$$

где A, B, C – главные моменты инерции для закрепленной точки, P – вес тела, z_C – координата центра масс в главных осях инерции. В качестве малого параметра принята величина $\varepsilon=\max\{A-B, z_C\}$.

Осуществим каноническое преобразование переменных $L, G, H, l, g, h\to L', G', H', l', g', h'$ для построения нового гамильтониана $F'=F_0'+F_1'+F_2'+\ldots$ и генератора Ли $S(L', G', H', l', g', h')=S_1'+S_2'+\ldots$ согласно алгоритму метода Хори [3]:

$$F_0'=F_0,\quad F_1'=F_{1s},\quad S_1'=\int F_{1p}\,dt'$$
$$F_2'=F_{2s}+{}^1/_2\{F_1+F_1', S_1'\}_s,\quad S_2'=\int[F_{2p}+{}^1/_2\{F_1+F_1', S_1'\}_p]dt' \tag{1}$$

Здесь фигурными скобками обозначены скобки Пуассона, индексами p и s – периодическая и постоянная части по t' соответственно. Параметр t' вводится вспомогательными уравнениями $d(L', G', H')/dt=\partial F_0/\partial(l', g', h')$, $d(l', g', h')/dt=-\partial F_0/\partial(L', G', H')$, которые позволяют в (1) перейти от интегрирования по t' к интегрированию по g' посредством зависимости

$$dt'=-(\partial F_0/\partial G')^{-1}dg' \tag{2}$$