

УДК 539.214

К ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ВИД
НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

КОВРИЖНЫХ А. М.

Предлагается новая теория пластичности, которая учитывает вид напряженного состояния при сложном нагружении. За основу построения теории принимается дилатансионно-сдвиговая механическая модель материала, являющаяся продолжением идеи [1-3] о представлении приращения пластической деформации в виде последовательности сдвигов по конечному числу систем скольжения. Для класса нагружений с неподвижными главными направлениями тензора напряжений предлагаемая теория пластичности для металлов приводит к классическому закону течения Прандтля - Рейса - Ланинга, а для геоматериалов - к соотношениям [4-7].

1. Пусть $s_x = \sigma_x - \sigma$, $s_y = \sigma_y - \sigma$, $s_z = \sigma_z - \sigma$, τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} - компоненты девиатора напряжения, а $3\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ - первый инвариант тензора напряжения. Если обозначить инварианты девиатора напряжения I_1, I_2, I_3 , то

$$I_1 = 0, I_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)]$$

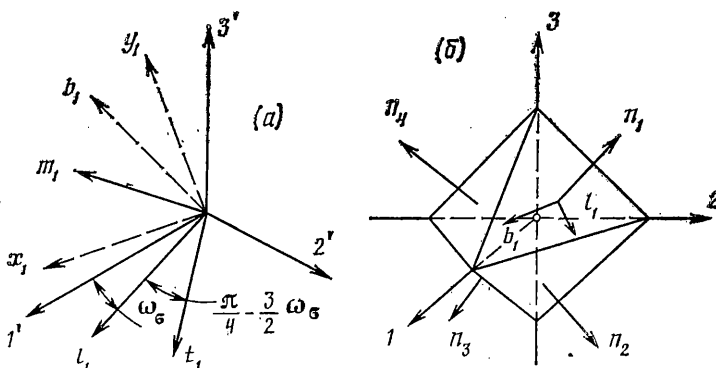
$$I_3 = s_x s_y s_z - s_x \tau_{yz}^2 - s_y \tau_{xz}^2 - s_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz}$$

Величину $T = [I_2(D_\sigma)]^{1/2}$ принято называть интенсивностью касательных напряжений. Обозначим σ_i, s_i ($i=1, 2, 3$) главные значения тензора напряжения и его девиатора соответственно, тогда $\sigma_i = \sigma + s_i$ и, кроме того, [8]:

$$s_1 = 2/\sqrt{3} T \cos \omega_\sigma, \quad s_2 = -2/\sqrt{3} T \cos (\frac{1}{3}\pi + \omega_\sigma) \quad (1.1)$$

$$s_3 = -2/\sqrt{3} T \cos (\frac{1}{3}\pi - \omega_\sigma), \quad \cos 3\omega_\sigma = 3\sqrt{3}/2 I_3/T^3$$

Рассмотрим девиаторную плоскость - плоскость, равнонаклонную к главным осям напряжения 1, 2, 3, и пусть $1', 2', 3'$ - проекции главных осей на эту плоскость. Как показано на фиг. 1, a , угол ω_σ характеризует направление проекции вектора напряжения на девиаторную плоскость и его следует отсчитывать от положительного направления $1'$ против часовой стрелки. Этот угол принято называть углом вида напряженного со-



Фиг. 1

стояния. Так, например, $\omega_\sigma=0$ соответствует одноосному растяжению в направлении 1, $\omega_\sigma=\pi/6$ — чистому сдвигу (чистому кручению) и так далее.

Рассмотрим октаэдр (фиг. 1, б) [2, 9] для иллюстрации сдвигового механизма деформирования. С каждой из октаэдрических плоскостей, указанных на фиг. 1, б и имеющих нормаль n_i ($i=1,4$), свяжем систему координат l_i, n_i, b_i . Ось l_i совпадает с направлением проекции вектора напряжения на соответствующую октаэдрическую плоскость. Далее в качестве примера приводятся направляющие косинусы координатных осей l_i, n_i, b_i .

$$\begin{array}{l}
 l_1 \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \omega_\sigma \quad - \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \omega_\sigma \right) \quad - \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \omega_\sigma \right) \\
 n_1 \quad 1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3} \quad 1/\sqrt{3} \\
 b_1 \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \omega_\sigma \quad - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} + \omega_\sigma \right) \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \omega_\sigma \right) \\
 x_1 \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \frac{\omega_\sigma}{2} \quad - \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\omega_\sigma}{2} \right) \quad - \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\omega_\sigma}{2} \right) \\
 y_1 \quad - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \frac{\omega_\sigma}{2} \quad - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\omega_\sigma}{2} \right) \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\omega_\sigma}{2} \right)
 \end{array}$$

Если, используя (1.1), перейти в какую-либо из систем координат l_i, n_i, b_i ($i=1,4$), то в каждой из них получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_{l_i} &= \sigma + 1/\sqrt{3} T \cos 3\omega_\sigma, \quad \sigma_{n_i} = \sigma, \quad \sigma_{b_i} = \sigma - 1/\sqrt{3} T \cos 3\omega_\sigma \\
 \tau_{l_i n_i} &= \sqrt{2/3} T, \quad \tau_{l_i b_i} = 1/\sqrt{3} T \sin 3\omega_\sigma, \quad \tau_{n_i b_i} = 0
 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Как видно из (1.2), в рассматриваемой системе координат девиатор тензора напряжения можно представить в виде суммы двух тензоров чистого кручения D_n и D_m , где

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2/3} T & 0 \\ \sqrt{2/3} T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad D_m = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} T \cos 3\omega_\sigma & 0 & 1/\sqrt{3} T \sin 3\omega_\sigma \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} T \sin 3\omega_\sigma & 0 & -1/\sqrt{3} T \cos 3\omega_\sigma \end{vmatrix}$$

Если обозначить через τ_n и τ_m максимальные касательные напряжения тензоров D_n и D_m , то $\tau_n = \sqrt{2/3} T$, $\tau_m = 1/\sqrt{3} T$ и в итоге имеем

$$D_\sigma = D_n + D_m, \quad I_2(D_\sigma) = \tau_n^2 + \tau_m^2 \quad (1.3)$$

Представление (1.3) указывает на сдвиговую природу девиатора напряжения и дает новую интерпретацию его второго инварианта.

Пусть x_i, n_i, y_i — главные оси тензора D_m , который в этой системе координат имеет вид $s_{x_i} = -s_{y_i} = T/\sqrt{3}$, и представляет собой чистое кручение в

направлении t_i , т. е. $\tau_{m_i t_i} = \tau_m = T/\sqrt{3}$, в качестве примера приводятся направляющие косинусы главных осей x_i, y_i . Эти направления показаны также на фиг. 1, а в девиаторной плоскости. Ось x_1 составляет с направлением l_1 угол $3/2\omega_\sigma$, а с осью 1 — угол $1/2\omega_\sigma$.

Плоскости действия τ_m проходят через нормали n_i и составляют с направлением l_i углы $1/4\pi \pm 3/2\omega_\sigma$. Плоскости действия τ_n совпадают с октаэдрическими плоскостями и $\tau_{n_i l_i} = \tau_n = \sqrt{2/3} T$ ($i=1,4$).

Проанализируем с геометрической точки зрения, как формируется тензор деформации в законе Гука и в деформационной теории пластичности (рассмотрим сдвиговый механизм, который позволяет получить эти соот-

ношения). В каждой из систем координат l_i, n_i, b_i ($i=1, 4$), указанных на фиг. 1, б, тензор напряжения имеет один и тот же вид (1.2), поэтому все четыре направления действия τ_n и τ_m находятся в одинаковых условиях. Это обстоятельство позволяет считать, что для первоначально изотропного материала девиатор тензора деформации формируется в результате сдвигов в направлениях τ_n, τ_m :

$$\gamma_{n_i l_i} = \Gamma/\sqrt{24}, \quad \gamma_{m_i l_i} = \Gamma/\sqrt{48} \quad (i=1, 4) \quad (1.4)$$

Проецируя эти сдвиги на главные оси тензора напряжения и суммируя результаты отдельных сдвигов, получим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon/3 + 1/\sqrt{3} \Gamma \cos \omega_\sigma = 1/3 \sigma / K + 1/2 s_1 \Gamma / T \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon/3 - 1/\sqrt{3} \Gamma \cos (1/3 \pi + \omega_\sigma) = 1/3 \sigma / K + 1/2 s_2 \Gamma / T$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon/3 - 1/\sqrt{3} \Gamma \cos (1/3 \pi - \omega_\sigma) = 1/3 \sigma / K + 1/2 s_3 \Gamma / T$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, Γ — интенсивность деформации сдвига. В этих соотношениях принято также допущение $\varepsilon = \sigma / K$, K — упругий объемный модуль.

Используя (1.5) и переходя в произвольную систему координат x, y, z , получим соотношения, которые при $\Gamma = T/\mu$ (μ — упругий модуль сдвига) переходят в закон Гука, при неопределенном значении Γ и $T = \tau_s$ (τ_s — пластическая постоянная) — в соотношения Генки, а при $\Gamma = \Gamma(T)$ получим соотношения деформационной теории Генки — Надаи — Ильюшина.

Из (1.4) видно, что в законе Гука и в деформационной теории пластичности сдвиги в направлениях τ_n и τ_m происходят пропорционально собственным касательным напряжениям.

Покажем далее, что, основываясь на дилатансионно-сдвиговом механизме деформирования, можно получить классический закон течения и различные определяющие соотношения для геоматериалов [4–7].

Будем считать, что приращение деформации складывается из упругой и пластической составляющих, упругая составляющая связана с приращением напряжения законом Гука [10, 11].

Пусть $\Delta \Gamma_p$ — интенсивность приращения пластической деформации сдвига. Предположим, что в направлениях действия τ_n и τ_m произошли пластические сдвиги и одновременно в перпендикулярных к ним направлениях происходит изменение нормальной пластической деформации [3, 12, 13], т. е. для $i=1, 4$ имеем

$$\Delta \gamma_{n_i l_i}^p = \Delta \Gamma_p / \sqrt{24}, \quad \Delta e_{n_i} = \alpha \Delta \gamma_{n_i l_i}^p \quad (1.6)$$

$$\Delta \gamma_{m_i l_i}^p = \Delta \Gamma_p / \sqrt{48}, \quad \Delta e_{m_i} = \Delta e_{l_i} = 1/2 \alpha \Delta \gamma_{m_i l_i}^p$$

Проецируя (1.6) на главные оси напряжения и суммируя результаты отдельных сдвигов, получим соотношения, которые при $\alpha = \sqrt{3} \Lambda / (1 + \sqrt{2})$ в произвольной системе координат x, y, z имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta e_x &= (1/3 \Lambda + 1/2 s_x / T) \Delta \Gamma_p, & \Delta e_y &= (1/3 \Lambda + 1/2 s_y / T) \Delta \Gamma_p \\ \Delta e_z &= (1/3 \Lambda + 1/2 s_z / T) \Delta \Gamma_p, & \Delta \gamma_{xy}^p &= \tau_{xy} \Delta \Gamma_p / T \\ \Delta \gamma_{xz}^p &= \tau_{xz} \Delta \Gamma_p / T, & \Delta \gamma_{yz}^p &= \tau_{yz} \Delta \Gamma_p / T \end{aligned} \quad (1.7)$$

Если в этих соотношениях принять $\Lambda = 0$, $T = \tau_s$, а $\Delta \Gamma_p$ считать неопределенным параметром, то получим соотношения Прандтля — Рейса. При $\Lambda = 0$, $\Delta \Gamma_p = \Delta T / G_0(T)$ из (1.7) следует теория течения Рейса — Ланинга. В этом случае, как видно из (1.6), приращения пластических сдвигов происходят в направлениях действия τ_n и τ_m под действием роста интенсивности касательных напряжений T . Если главные оси напряжений неподвижны в процессе нагружения — квазипростое нагружение [1], то тогда

приращения пластических сдвигов в (1.6) пропорциональны приросту собственных касательных напряжений $\Delta\tau_{n_i t_i} = \sqrt{2/3} \Delta T$, $\Delta\tau_{m_i t_i} = \sqrt{1/3} \Delta T$ ($i=1, 4$).

В самом общем случае возникновение пластической деформации будем связывать с достижением напряжениями условия пластичности Мизеса — Шлейхера $T + \beta\sigma = \tau_s$, где β — коэффициент внутреннего трения, который в дальнейшем будем считать постоянным. В общем случае величины Λ и β могут быть функциями инвариантов напряжения и пластической деформации.

Если в соотношениях (1.7) принять $\Lambda = \beta$, $T + \beta\sigma = \tau_s$, а $\Delta\Gamma_p$ считать неопределенным параметром, то приходим к закону течения Друккера — Прагера [6]. При $\Lambda = \beta$, $\Delta\Gamma_p = (\Delta T + \beta\Delta\sigma)/G_0$ из (1.7) следуют соотношения В. В. Новожилова [4]. Если считать характеристики материала Λ и β независимыми, то приходим к определяющим соотношениям для геоматериала [5, 7]. Как и в классической теории пластичности, можно предположить существование «единой кривой» $\Gamma_p = \Gamma_p(T + \beta\sigma)$, независимой от вида напряженного состояния. Пластический модуль упрочнения $G_0 = G_0(T + \beta\sigma)$ будет касательным модулем к этой кривой, так как $\Delta\Gamma_p = (\Delta T + \beta\Delta\sigma)/G_0$.

Проанализируем работу систем скольжения τ_n , τ_m при различных классах догрузений за пределом упругости. А. А. Ильющин выделил класс простых нагружений и дал общее описание явлений, наблюдаемых при сложных нагружениях [10, 11]. В [1, 14] предложены варианты теории пластичности, позволяющие описать результаты экспериментов на сложное нагружение, однако определяющие соотношения в этих теориях не удовлетворяют условию непрерывности по направлению догрузки [11, 15, 16]. В предлагаемой модели материала этот недостаток устранен.

Тензор приращения напряжения при сложном догружении в главных осях напряжения характеризуется компонентами $\Delta\sigma_i$, $\Delta\tau_{ij}$ ($i, j=1, 2, 3$; $i < j$) и может быть представлен в виде суммы тензоров квазипростого догружения $\Delta\sigma_i$ и трех тензоров ортогонального догружения $\Delta\tau_{ij}$ [1, 14].

Приращения касательных напряжений в направлениях систем скольжения (направления действия τ_n и τ_m) при произвольном догружении имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{n_i t_i} &= \sqrt{2/3} \Delta T + \Delta\tau_i, & \Delta\tau_{m_i t_i} &= \Delta T / \sqrt{3} - \sqrt{2} \Delta\tau_i \quad (i=1, 4) & (1.8) \\ \Delta\tau_1 &= \sqrt{2/3} [\Delta\tau_{13} \cos(1/3\pi + \omega_\sigma) + \Delta\tau_{12} \cos(1/3\pi - \omega_\sigma) - \Delta\tau_{23} \cos \omega_\sigma] \\ \Delta\tau_2 &= -\sqrt{2/3} [\Delta\tau_{13} \cos(1/3\pi + \omega_\sigma) - \Delta\tau_{12} \cos(1/3\pi - \omega_\sigma) - \Delta\tau_{23} \cos \omega_\sigma] \\ \Delta\tau_3 &= -\sqrt{2/3} [\Delta\tau_{13} \cos(1/3\pi + \omega_\sigma) + \Delta\tau_{12} \cos(1/3\pi - \omega_\sigma) + \Delta\tau_{23} \cos \omega_\sigma] \\ \Delta\tau_4 &= \sqrt{2/3} [\Delta\tau_{13} \cos(1/3\pi + \omega_\sigma) - \Delta\tau_{12} \cos(1/3\pi - \omega_\sigma) + \Delta\tau_{23} \cos \omega_\sigma] \end{aligned}$$

Как видно из (1.8), первые слагаемые в выражениях для $\Delta\tau_{n_i t_i}$, $\Delta\tau_{m_i t_i}$ связаны с приращением интенсивности касательных напряжений, а вторые — характеризуют изменения касательных напряжений на системах скольжения, вызванные ортогональными догружениями $\Delta\tau_{13}$, $\Delta\tau_{12}$, $\Delta\tau_{23}$. Если при квазипростом нагружении все системы скольжения работают одинаково — либо нагружаются, либо разгружаются, то при сложном нагружении с приложением $\Delta\tau_{ij}$ возможно различное функционирование плоскостей действия τ_n , τ_m .

Так, например, при ортогональном догружении $\Delta\tau_{13} > 0$ системы скольжения $\tau_{n_i t_i}$ ($i=1, 4$), $\tau_{m_i t_i}$ ($i=2, 3$) нагружаются, так как на них происходит рост касательных напряжений, в других направлениях τ_n , τ_m происходит разгрузка.

Будем считать, что пластический сдвиг в системе скольжения, вызванный ортогональным догружением, происходит с модулем упрочнения G_0/δ , где $\delta = \delta(T + \beta\sigma)$ — дополнительная характеристика материала, опре-

деляемая из опыта на сложное нагружение. Если $\delta=0$, то ортогональное догружение не приводит к изменению пластической деформации, что согласуется с опытами [17]. Если же $\delta>0$, то $\Delta\tau_{13}$ вызывает изменение пластической деформации, что соответствует результатам экспериментов [18–20].

Как будет ясно из дальнейшего, через функцию δ можно выразить модуль ортогональной догрузки:

$$1/G' = \Delta\gamma_{13}/\Delta\tau_{13} = 1/\mu + {}^{12}/_9\delta \cos^2(\pi/3 + \omega_\sigma)/G_0 \quad (1.9)$$

Если $\delta=0$, либо $\omega_\sigma = \pi/6$, то G' принимает упругое значение, в противном случае $G' < \mu$ и зависит от вида напряженного состояния, характеризуемого ω_σ .

Применительно к сложному нагружению дилатансионно-сдвиговой механизм деформирования можно записать в виде, учитывающем изменение пластического сдвига в системе скольжения, вызванного ортогональными догрузками [3]:

$$\Delta\gamma_{n_i t_i}^p = \Delta\tau_{n_i}/G_{n_i}, \quad \Delta e_{n_i} = \alpha \Delta\gamma_{n_i t_i}^p \quad (i=1, 4) \quad (1.10)$$

$$\Delta\gamma_{m_i t_i}^p = \tau_{m_i}/G_{m_i}, \quad \Delta e_{m_i} = \Delta e_{t_i} = {}^1/2\alpha \Delta\gamma_{m_i t_i}^p,$$

$$\Delta\tau_{n_i} = (\Delta T + \beta\Delta\sigma)/\sqrt{24} + \delta\Delta\tau_i, \quad \Delta\tau_{m_i} = (\Delta T + \beta\Delta\sigma)/\sqrt{48} - \sqrt{2}\delta\Delta\tau_i.$$

Суммируя результаты отдельных сдвигов в направлениях τ_n , τ_m и переходя в систему координат x , y , z , получим основные определяющие соотношения, которые для квазипростого нагружения при $\alpha = \sqrt{3}\Lambda/(1+\sqrt{2})$ совпадают с (1.7). Соотношения (1.7) получаются из (1.10) и в том случае, когда $\delta=0$.

Догрузения, при которых одни системы скольжения нагружаются, а другие разгружаются, по аналогии с [1, 2] будем называть частичными разгрузками. Если в каком-либо из направлений происходит нагружение $\Delta\tau_{n_i}, \Delta\tau_{m_i} \geq 0$, то соответствующий модуль $G_{n_i}, G_{m_i} = G_0$. Если же происходит разгрузка $\Delta\tau_{n_i}, \Delta\tau_{m_i} < 0$, то $G_{n_i}^{-1}, G_{m_i}^{-1} = 0$ и соответствующая система скольжения не дает вклада в результирующую пластическую деформацию.

В дальнейшем для простоты рассмотрим класс нагружений, когда второе главное направление остается неподвижным, т. е. $\Delta\tau_{12} = \Delta\tau_{23} = 0$. В этом случае $\Delta\tau_{n_1} = \Delta\tau_{n_3}$, $\Delta\tau_{n_2} = \Delta\tau_{n_3}$, $\Delta\tau_{m_1} = \Delta\tau_{m_3}$, $\Delta\tau_{m_2} = \Delta\tau_{m_3}$. Используя (1.10) и (1.4), определяющие соотношения можно записать в главных осях напряжения

$$\Delta e_i = ({}^2/3\alpha + \sqrt{2}/3s_i/T) (\Delta\tau_{n_i}/G_{n_i} + \Delta\tau_{n_2}/G_{n_2}) + ({}^2/3\alpha + 1/\sqrt{3}s_i/T) (\Delta\tau_{m_i}/G_{m_i} + \Delta\tau_{m_2}/G_{m_2}) \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.11)$$

$$\Delta\gamma_{13}^p = ({}^4/3\alpha - \sqrt{2}/3s_2/T) (\Delta\tau_{n_1}/G_{n_1} - \Delta\tau_{n_2}/G_{n_2}) - ({}^2/3\alpha - 2/\sqrt{3}s_2/T) (\Delta\tau_{m_1}/G_{m_1} - \Delta\tau_{m_2}/G_{m_2}), \quad \Delta\gamma_{12}^p = \Delta\gamma_{13}^p = 0$$

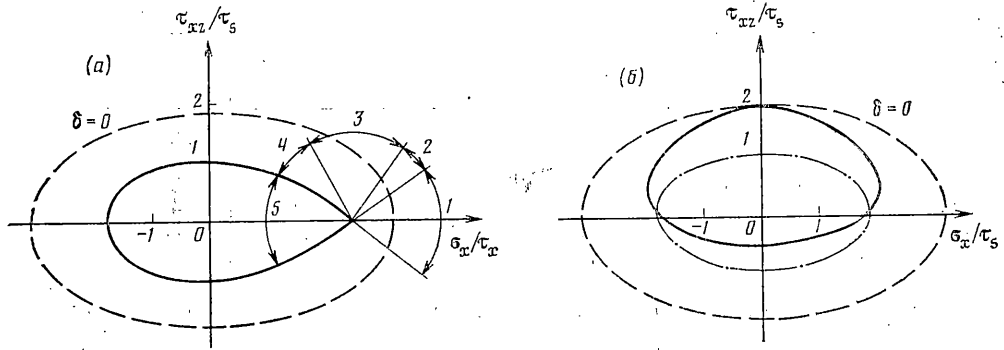
Соотношения (1.11) отражают ортотропию пластического состояния, связанную с главными осями тензора напряжений [1, 2].

Рассмотрим систему координат x , y , z , у которой ось y совпадает со вторым главным направлением, тогда первое направление образует с осью x угол θ , $\sin 2\theta = \tau_{xz}/T_{13}$, $T_{13} = {}^1/2[(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2]^{1/2}$. В этом случае имеем

$$\Delta T = {}^1/2(s_x\Delta s_x + s_y\Delta s_y + s_z\Delta s_z)/T + \tau_{xz}\Delta\tau_{xz}/T$$

$$\Delta\tau_{13} = {}^1/2(\sigma_x - \sigma_z)\Delta\tau_{xz}/T_{13} - {}^1/2\tau_{xz}(\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_z)/T_{13}$$

2. Обратимся теперь к сложному нагружению тонкостенных цилиндров растягивающей силой и крутящим моментом. Пусть ось x направлена по образующей, y — по радиусу, тогда $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Будем считать, что для



Фиг. 2

рассматриваемых ниже металлов $\alpha=\beta=0$, и тогда определяющие соотношения в системе координат x, y, z принимают вид

$$\Delta e_x = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\sigma_x}{3T} + a_1 \right) \frac{\Delta \tau_{n1}}{G_{n1}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\sigma_x}{3T} + a_2 \right) \frac{\Delta \tau_{n2}}{G_{n2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} a_2 \frac{\Delta \tau_{m1}}{G_{m1}} + \frac{2}{\sqrt{3}} a_1 \frac{\Delta \tau_{m2}}{G_{m2}} \quad (2.1)$$

$$\Delta \gamma_{xz}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\tau_{xz}}{T} + c_1 \right) \frac{\Delta \tau_{n1}}{G_{n1}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\tau_{xz}}{T} + c_2 \right) \frac{\Delta \tau_{n2}}{G_{n2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} c_2 \frac{\Delta \tau_{m1}}{G_{m1}} + \frac{2}{\sqrt{3}} c_1 \frac{\Delta \tau_{m2}}{G_{m2}}$$

$$a_{1,2} = \frac{\sigma_x (2T_{13} \mp \tau_{xz})}{6TT_{13}}, \quad c_{1,2} = \frac{6\tau_{xz}T_{13} \pm \sigma_x^2}{6TT_{13}}$$

$$\Delta \tau_{n_{1,2}} = \frac{\sigma_x (T_{13} \mp \tau_{xz} \delta)}{6\sqrt{6} TT_{13}} \Delta \sigma_x + \frac{3\tau_{xz}T_{13} \pm \sigma_x^2 \delta}{6\sqrt{6} TT_{13}} \Delta \tau_{xz}$$

$$\Delta \tau_{m_{1,2}} = \frac{\sigma_x (T_{13} \pm 2\tau_{xz} \delta)}{12\sqrt{3} TT_{13}} \Delta \sigma_x + \frac{3\tau_{xz}T_{13} \mp 2\sigma_x^2 \delta}{12\sqrt{3} TT_{13}} \Delta \tau_{xz}$$

Предположим, что в пластическое состояние образец был выведен одноосным растяжением $\sigma_x > 0$, после чего осуществляется сложное догружение с приложением $\Delta \sigma_x, \Delta \tau_{xz}$ с различными значениями $m = \Delta \sigma_x / \Delta \tau_{xz}$. В рассматриваемом случае $\delta = \delta(T), G_0 = G_0(T)$.

При активном догружении из состояния одноосного растяжения $\Delta \tau_{n_{1,2}}, \Delta \tau_{m_{1,2}} \geq 0$, и поэтому $\Delta \sigma_x > 0, -(4\delta)^{-1} \leq m^{-1} \leq (4\delta)^{-1}$. Для этой области догружений имеем $\Delta e_x = 1/3 \Delta \sigma_x / G_0, \Delta \gamma_{xz}^p = 2/3 \delta \Delta \tau_{xz} / G_0$.

В качестве примера рассмотрим частичную разгрузку $\Delta \tau_{n1}, \Delta \tau_{m2} > 0, \Delta \tau_{n2}, \Delta \tau_{m1} < 0$, которая реализуется при $\Delta \tau_{xz} > 0, -2\delta \leq m \leq 2\delta$. В этом случае имеют место соотношения

$$\Delta e_x = \frac{3\Delta \sigma_x + 8\delta \Delta \tau_{xz}}{18G_0}, \quad \Delta \gamma_{xz}^p = \frac{2\Delta \sigma_x + 6\delta \Delta \tau_{xz}}{18G_0}$$

Учитывая в этих соотношениях для ортогонального догружения кручением упругую деформацию, получим

$$\frac{1}{G'} = \frac{\Delta \gamma_{xz}}{\Delta \tau_{xz}} = \frac{1}{\mu} + \frac{\delta}{3G_0}, \quad \frac{1}{E'} = \frac{\Delta e_x}{\Delta \tau_{xz}} = \frac{4\delta}{9G_0} \quad (2.2)$$

Полная разгрузка наступает, когда $\Delta \sigma_x < 0, -(4\delta)^{-1} \leq m^{-1} \leq (4\delta)^{-1}$.

На фиг. 2, а в плоскости напряжений σ_x, τ_{xz} указаны следующие области: 1 – активного догружения области частичных разгрузок; 2 – $\Delta \tau_{n_{1,2}} > 0, \Delta \tau_{m2} > 0, \Delta \tau_{m1} < 0$ ($2\delta \leq m \leq 4\delta$); 3 – $\Delta \tau_{n1} > 0, \Delta \tau_{m2} > 0, \Delta \tau_{n2} < 0, \Delta \tau_{m1} < 0$ ($-2\delta \leq m \leq 2\delta$); 4 – $\Delta \tau_{n_{1,2}} < 0, \Delta \tau_{m1} < 0$,

Таблица 1

№	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
1	390	800	510	620	384
2	430	800	38	72,5	413
3	370	800	57	106	393
4	500	800	33	63	447
5	325	800	28	54	350
6	340	800	67	123	350

$\Delta\tau_{m_2} > 0$ ($-4\delta \leq m \leq -2\delta$); 5 - область разгрузки из состояния одноосного растяжения для $\delta=0,33$.

Существенным моментом предлагаемого подхода является то, что определяющие соотношения удовлетворяют условию непрерывности по направлению догрузки, а в точке нагружения для материалов с $\delta > 0$ и при $\omega_0 \neq \pi/6$ имеется угловая особенность на поверхности нагружения. Форма поверхности нагружения зависит от выбора функции δ . Для простоты примем, что G_0 и δ являются функциями одной переменной. При нагружении упрочняющегося материала G_0 и δ можно считать как функциями T , так и Γ_p , поскольку между ними имеется взаимнооднозначное соответствие.

Таблица 2

σ_x	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$G_0 \cdot 10^{-2}$	δ
87	260	190	200	190	14	0,10
94	170	130	150	150	12,4	0,14
98	150	90	120	130	11,4	0,17
106	120	80	110	111	10,7	0,20
110	100	60	90	90	10	0,25
132	60	-	-	52	9,6	0,47
160	240	230	230	230	107	0,15
178	190	170	180	150	22	0,19
186	160	140	160	120	18	0,23
236	100	60	100	60	12	0,45

Чтобы избежать возможной неоднозначности для процессов пластического деформирования с разгрузками, а также для разупрочняющихся материалов, когда $G_0 < 0$, следует считать, что $G_0 = G_0(\Gamma_p)$, $\delta = \delta(\Gamma_p)$.

На фиг. 2, а в плоскости напряжений σ_x, τ_{xz} сплошной линией указана поверхность нагружения после предварительного одноосного растяжения для $\delta=0,33$ при $T > \tau_0$ и $\delta=0$ при $T \leq \tau_0$. Здесь же штриховой линией указана поверхность нагружения для $\delta=0$, которая совпадает с поверхностью постоянства T .

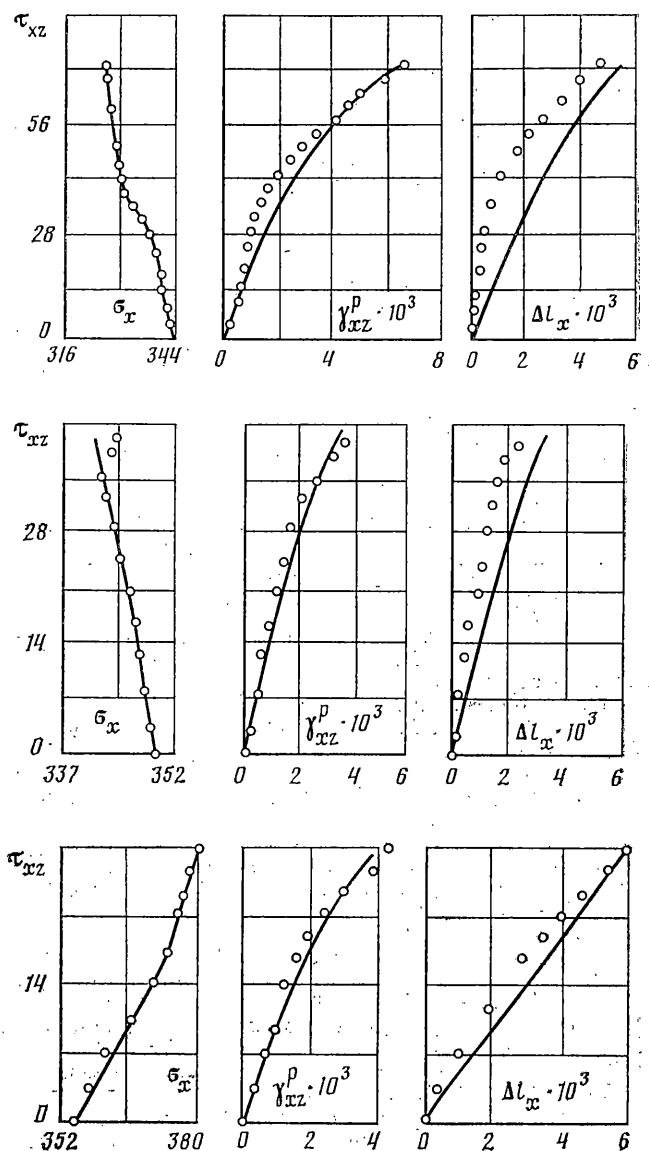
На фиг. 2, б сплошной линией указана поверхность нагружения после предварительного кручения для $\delta=0,33$. Штриховой линией на этой же фигуре изображена поверхность нагружения для $\delta=0$. Штрихпунктирной линией указана начальная поверхность нагружения - поверхность текучести Мизеса.

Для описания с позиции предлагаемой модели процессов с разгрузками и повторных нагружений следует опытным путем установить зависимости $G_0 = G_0(\Gamma_p)$ и $\delta = \delta(\Gamma_p)$ и на основании соотношений (2.1) построить поверхность нагружения для напряженного состояния, предшествующего моменту разгрузки. При последующем нагружении, после того как траектория повторного нагружения выйдет за пределы построенной поверхности, следует воспользоваться соотношениями (2.1). В общем случае при $\delta \neq 0$ упрочнение будет анизотропным. Случай $\delta=0$ отвечает классическому закону течения с изотропно расширяющейся поверхностью Мизеса.

Приведем сравнение результатов расчета по предлагаемой модели с данными экспериментов различных авторов.

Обратимся к опытам [18], которые проводились на тонкостенных трубчатых образцах из стали 20. Образцы деформировались в пластическую область растягивающим напряжением σ_x , а затем прикладывалось касательное напряжение τ_{xz} при постоянном σ_x . Всего было испытано шесть образцов при разных значениях σ_x в момент догрузки. Начальный модуль ортогональной догрузки G_i' определялся по формулам (2.2) при $\delta=0,026$. Модуль упрочнения G_0 подсчитывался по кривой $\varepsilon_x = \varepsilon_x(\sigma_x)$ для одноосного растяжения. Результаты расчета представлены в табл. 1 в последней колонке ($G_i' \cdot 10^{-2}$ МПа, $i=5$). Здесь же для сравнения приводятся данные опытов ($i=1$) и расчеты по теории течения ($i=2$), деформационной теории ($i=3$) и теории скольжения Батдорфа - Будянского ($i=4$) (расчеты взяты из [18]).

В табл. 2 представлены результаты экспериментов [19] на латуни и дюралюминии соответственно ($j=1$). Здесь же приводятся расчеты начального модуля догрузки ($G_j' \cdot 10^{-2}$) по теории Батдорфа - Будянского - $j=2$, по теории Леонова - Русинко - $j=3$ (расчеты взяты из [21]) и по соотношениям (2.2) - $j=4$. Принимаемые в рас-



Фиг. 3

четах значения G_0 и δ являются функциями σ_x и представлены в двух последних колонках табл. 2 (σ_x , G_j' , G_0 — в МПа).

Обратимся еще к одной экспериментальной работе [20], где образцы из алюминиевого сплава 24S-T4 нагружались из состояния одноосного растяжения при разных значениях m . Хорошее соответствие теоретических и экспериментальных результатов получается, если принять $G_0=1760$ МПа, $\delta=0.33$. На Фиг. 3 (напряжения — в МПа) для участков сложного нагружения приводятся данные опытов (светлые кружки) и расчетные кривые $\Delta \epsilon_x = \Delta \epsilon_x(\tau_{xz})$, $\Delta \gamma_{xz}^p = \Delta \gamma_{xz}^p(\tau_{xz})$ (сплошные линии), построенные по формулам (2.1). Здесь же указаны программы нагружений $\sigma_x = \sigma_x(\tau_{xz})$ для трех различных случаев: активного догружения, догружения, близкого к ортогональному, и частичной разгрузки.

Имеющиеся в литературе экспериментальные работы по вопросу о наличии угловой точки на поверхности нагружения можно разделить на две группы: в первой из них обнаружена особенность в точке нагружения [18–20], во второй — не обнаружена [17]. Ни теории течения, ни концепции скольжения Батдорфа — Будянско-го и Леонова — Русинко [21] не позволяют объяснить и те и другие эксперименты в рамках теории пластичности. С позиции предложенной модели это удается сделать путем введения дополнительной характеристики материала. Предложенная в работе теории пластичности, основанная на дилатансионно-сдвиговом механизме деформирования, позволяет описать довольно широкий класс материалов (металлы, горные породы), учесть третий инвариант девиатора напряжения при сложном нагружении и с единой позиции объяснить результаты экспериментов [17–20].

Автор выражает благодарность Е. И. Шемякину за полезные обсуждения в процессе выполнения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Деформация упрочняющегося пластического материала // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 2. С. 148–174.
2. Шемякин Е. И. Анизотропия пластического состояния // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1973. Т. 4. № 4. С. 150–162.
3. Коврижных А. М. Пластическое деформирование упрочняющихся материалов при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 140–146.
4. Новожилов В. В. О пластическом разрыхлении // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 681–689.
5. Николаевский В. Н. Механические свойства грунтов и теория пластичности // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. М.: ВИНТИ. 1972. Т. 6. 85 с.
6. Drucker D. C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Quar. Appl. Math. 1952. V. 10. No. 2. P. 157–165 = Определяющие законы механики грунтов. М.: Мир. 1975. С. 166–177.
7. Rudnicki J. W., Rice J. R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // J. Mech. and Phys. Solids. 1975. V. 23. No. 6. P. 371–394.
8. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз. 1958. 370 с.
9. Ревуженко А. Ф., Чангышев А. И., Шемякин Е. И. Математические модели упругопластических тел // Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Новосибирск: Наука. 1985. С. 108–119.
10. Ильюшин А. А. Пластичность. М.–Л.: Гостехиздат. 1948. 376 с.
11. Ильюшин А. А. Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР. 1961. С. 3–29.
12. Христианович С. А., Шемякин Е. И. К теории идеальной пластичности // Инж. ж. МТТ. 1967. № 4. С. 86–97.
13. Леонов М. Я., Паняев В. А., Русинко К. Н. Зависимость между деформациями и напряжениями для полухрупких тел // Инж. ж. МТТ. 1967. № 6. С. 26–32.
14. Христианович С. А., Шемякин Е. И. О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 5. С. 138–149.
15. Handelman G. H., Lin C. C., Prager W. On the mechanical behavior of metals in the strain-hardening range // Quart. Appl. Math. 1947. V. 4. No. 4. P. 397–407.
16. Ключников В. Д. О законах пластичности для частного класса путей нагружения // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 533–543.
17. Ivey H. J. Plastik stress-strain relations and yield surfaces for aluminium alloys // J. Mech. Enging Science. 1961. V. 3. No. 1. P. 15–31 = Механика: Период. сб. перев. иностр. статей. 1962. № 3. С. 137–168.
18. Жуков А. М. Пластические деформации стали при сложном нагружении // Изв. АН СССР. ОТН. 1954. № 11. С. 53–61.
19. Свешникова В. А. О пластическом деформировании упрочняющихся металлов // Изв. АН СССР. ОТН. 1956. № 1. С. 155–161.
20. Naghdi P. M., Rowley J. C. An experimental study of biaxial stress-strain relations in plasticity // J. Mech. and Phys. Solids. 1954. V. 3. No. 1. P. 63–80 = Механика: Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит. 1955. № 3. С. 138–147.
21. Русинко К. Н. Теория пластичности и неустановившейся ползучести. Львов. Вища шк. 1981. 148 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
5.VI.1986