

УДК 539.214

## К ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ С ДЕФЕКТАМИ

БЕРЕЗИН А. В.

Рассматривается пластическое деформирование материала с образованием и ростом дефектов типа пор и микротрещин. В теории пластичности в условии текучести вводился первый инвариант тензора напряжений [1] для учета разрыхляемости, связанной с образующимися дефектами, и использовалось условие ортогональности тензора скоростей пластических деформаций к поверхности нагружения. Для описания деформирования дилатирующих сред используются и неассоциированные законы течения [2, 3]. В данной работе из условия выполнения постулатов Друккера и А. А. Ильюшина для сред с дефектами получен ассоциированный закон течения, учитывающий изменения упругих свойств тела в процессе пластического деформирования, которое происходит вследствие образования и развития дефектов. На основе полученных соотношений исследовано распределение напряжений и скоростей деформаций в шейке цилиндрического образца, образующейся при одноосном растяжении.

1. Как известно, в процессе пластического деформирования материала при достижении определенных условий [4, 5] происходит образование дефектов типа пор или микротрещин. Процесс деформирования, таким образом, можно характеризовать начальной поверхностью нагружения бездефектного материала и вторичной поверхностью нагружения образования дефектов в пространстве напряжений. Можно ввести функцию нагружения, и при выполнении постулата Друккера получим условие нормальности скоростей пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}^p$  к поверхности нагружения  $f_0(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_k^0, \dots) = 0$  в ее регулярных точках [6]:

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \partial f_0 / \partial \sigma_{ij}, \quad f_0(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_k^0, \dots) = 0, \quad \partial f / \partial \sigma_{ij} d\sigma_{ij} = 0$$

$$\varepsilon_{ij}^p = 0 \begin{cases} f_0(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_k^0, \dots) = 0, & \partial f_0 / \partial \sigma_{ij} d\sigma_{ij} \leq 0 \\ f_0(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_k^0, \dots) < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$  — тензор деформаций,  $\varepsilon_{ij}^e$  и  $\varepsilon_{ij}^p$  — тензоры упругой и пластической деформаций соответственно,  $\chi_k^a$  — параметры упрочнения.

При достижении поверхности образования дефектов, уравнение которой имеет вид [2] ( $\chi_k^1$  — некоторые физические параметры):

$$f_1(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_k^1, \dots) = 0 \quad (1.2)$$

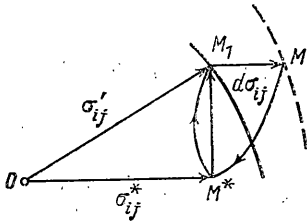
в теле происходит образование дефектов типа пор или микротрещин. В общем случае наблюдается определенная ориентация их [7, 8], но у некоторых материалов наблюдается и изотропное распределение пор [9–11]. При дальнейшем деформировании они изменяют свои размеры, изменяется также их число в единице объема. Такое образование дефектов приводит к изменению упругих свойств материала, например, в изотропном материале может приобретаться анизотропия упругих свойств, также изменяются пластические свойства тела [12]. Поверхность нагружения изменяется и определяется уравнением  $f_2(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_k^2, \dots) = 0$ .

Поскольку образуются дефекты конечных размеров и поведение тел с дефектами отличается от поведения бездефектного материала [12–15], то в общем случае  $f_0(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_k^0, \dots) \neq f_1(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_k^1, \dots) \neq f_2(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_k^2, \dots)$ .

Рассмотрим применение постулата Друккера

$$\oint (\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) d\varepsilon_{ij} \geq 0 \quad (1.3)$$

к материалам, у которых происходит изменение упругих свойств при разгрузке после пластического деформирования. Интегрирование в (1.3) ведется в пространстве напряжений по пути, выходящему из точки  $\sigma'_{ij}$



Фиг. 1

и возвращающемуся в ту же точку с выходом во внешность поверхности нагружения (Фиг. 1). Для упругопластического тела  $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$  и интеграл (1.3) разбивается на две части

$$\oint (\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) d\varepsilon_{ij}^p + \oint (\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) d\varepsilon_{ij}^e \geq 0 \quad (1.4)$$

В (1.4) на участке  $M_1M$  имеем  $d\varepsilon_{ij}^e = dS_{ijkl} \times d\sigma_{kl}(M_1) + S_{ijkl}(M_1) d\sigma_{kl}$ , а упругие деформации при разгрузке определяются с учетом того, что произошло изменение упругих податливостей на участке  $M_1M$  и при разгрузке на участке

$MM^*$   $d\varepsilon_{ij}^e = S_{ijkl}^* d\sigma_{kl}$ . Тогда второй интеграл в (1.4) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \oint (\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) d\varepsilon_{ij}^e &= \oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e - \sigma'_{ij} \oint d\varepsilon_{ij}^e \quad (1.5) \\ \oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e &= \oint_{M^*}^{M_1} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e + \int_{M^*}^M \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e + \int_M^{M^*} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e = \\ &= \int_{M^*}^{M_1} \sigma_{ij} S_{ijkl} d\sigma_{kl} + \int_{M_1}^M \sigma_{ij} dS_{ijkl} \sigma_{kl}(M_1) + \int_{M_1}^M \sigma_{ij} S_{ijkl}(M_1) d\sigma_{kl} + \int_M^{M^*} \sigma_{ij} S_{ijkl}^* d\sigma_{kl} = \\ &= -1/2 (S_{ijkl}^* - S_{ijkl}) (\sigma_{ij} \sigma_{kl} - \sigma'_{ij} \sigma'_{kl}) + (S_{ijkl}^* - S_{ijkl}) \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \\ &- 1/2 (S_{ijkl}^* - S_{ijkl}) d\sigma_{kl} d\sigma_{ij} - \sigma'_{ij} \oint_{M^*}^{M_1} d\varepsilon_{ij}^e - \sigma'_{ij} \left[ \int_{M_1}^M d\varepsilon_{ij}^e - \int_M^{M^*} d\varepsilon_{ij}^e \right] = \\ &= -\sigma'_{ij} S_{ijkl} (\sigma_{kl} - \sigma'_{kl}) - \sigma'_{ij} \sigma_{kl} (S_{ijkl}^* - S_{ijkl}) - \sigma'_{ij} S_{ijkl} d\sigma_{kl} - \\ &- \sigma'_{ij} S_{ijkl}^* (\sigma_{kl} - \sigma'_{kl} - d\sigma_{kl}) = - (S_{ijkl}^* - S_{ijkl}) \sigma'_{ij} \sigma_{kl}' + (S_{ijkl}^* - S_{ijkl}) \sigma'_{ij} d\sigma_{kl} \quad (1.6) \end{aligned}$$

Складывая (1.5) и (1.6) и учитывая члены только первого и второго порядка малости, получим

$$\oint (\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) d\varepsilon_{ij}^e = 1/2 (S_{ijkl}^* - S_{ijkl}) (\sigma_{ij} \sigma_{kl} - \sigma'_{ij} \sigma'_{kl}) + (S_{ijkl}^* - S_{ijkl}) \sigma'_{ij} d\sigma_{kl} \quad (1.7)$$

Первый интеграл в (1.4) имеет вид

$$\oint (\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) d\varepsilon_{ij}^p = (\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) d\varepsilon_{ij}^p + d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (1.8)$$

с учетом того, что пластическое деформирование происходит только на участке  $M_1M$ . Тогда неравенство (1.3) с учетом (1.7) и (1.8) будет

$$\oint (\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) d\varepsilon_{ij} = (\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) d\varepsilon_{ij}^p + d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p + 1/2 dS_{ijkl} (\sigma_{ij} \sigma_{kl} - \sigma'_{ij} \sigma'_{kl}) + dS_{ijkl} \sigma'_{ij} d\sigma_{kl} \geq 0 \quad (1.9)$$

Для конечных значений  $(\sigma_{ij} - \sigma'_{ij})$  из (1.9) следует

$$(\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) d\varepsilon_{ij}^p + 1/2 dS_{ijkl} (\sigma_{ij} \sigma_{kl} - \sigma'_{ij} \sigma'_{kl}) \geq 0 \quad (1.10)$$

$$(\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) [d\varepsilon_{ij}^p + 1/2 dS_{ijkl} (\sigma_{kl} + \sigma'_{kl})] \geq 0$$

$$dS_{ijkl} = S_{ijkl}^* - S_{ijkl}$$

При  $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}$  и учете величин второго порядка малости относительно приращений напряжений, деформаций и упругих податливостей из (1.9) получим

$$d\sigma_{ij} (d\varepsilon_{ij}^p + dS_{ijkl} \sigma_{kl}) \geq 0 \quad (1.11)$$

Отсюда следует, что тензор скоростей пластических деформаций

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \partial f_2 / \partial \sigma_{ij} - S_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad f_2(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_k^2, \dots) = 0, \quad \partial f_2 / \partial \sigma_{ij} d\sigma_{ij} > 0$$

$$\varepsilon_{ij}^p = 0 \begin{cases} f_2(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_k^2, \dots) = 0, & \partial f_2 / \partial \sigma_{ij} d\sigma_{ij} \leq 0 \\ f_2(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_k^2, \dots) < 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

где  $S_{ijkl}$  — скорость изменения тензора упругих податливостей материала с повреждениями, происходящими при пластическом деформировании. Из (1.11) следует, что тензор скоростей пластических деформаций не ортогонален поверхности нагружения. Если дефекты являются микротрещинами, то при малой концентрации их  $S_{ijkl}$  определяются выражениями, аналогичными [16], а скорость изменения тензора упругих податливостей определяется, если известны условия зарождения и роста микротрещин.

Аналогично можно рассмотреть процесс пластического деформирования в пространстве деформаций. Для замкнутых циклов по деформациям неравенство (1.3) приводит к выражению [17]  $d\varepsilon_{ij} (E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - d\sigma_{ij} + dE_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e) \geq 0$ . Соответственно при активном деформировании

$$\sigma_{ij}^* = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^* + E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e - \lambda_1 \partial F / \partial \varepsilon_{ij} \quad (1.13)$$

$$F(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \nu_k, \dots) = 0, \quad \partial F / \partial \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij} > 0$$

и при пассивном деформировании

$$\sigma_{ij}^* = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^* \begin{cases} F(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \nu_k, \dots) = 0, & \partial F / \partial \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij} = 0 \\ F(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \nu_k, \dots) < 0 \end{cases}$$

где  $F(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \nu_k, \dots) = 0$  — поверхность текучести,  $E_{ijkl}$  — упругие постоянные,  $\nu_k$  — параметры упрочнения.

Соотношения (1.13) необходимо применять и на падающих участках кривых деформирования с учетом того, что возможно образование напряжений локального деформирования [18]. На падающих участках кривых деформирования соотношения (1.12) применять нельзя, так как в общем случае нельзя получить замкнутых циклов по напряжениям.

В случае изотропного распределения дефектов типа пор можно предположить [10, 11, 14], что поверхность нагружения зависит от первого инварианта тензора напряжений  $\sigma_0$  и интенсивности напряжений  $\sigma_i$  в виде  $f_2(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_k^2, \dots) = f_2(\sigma_i, \sigma_0, \varepsilon_{ij}^p, \chi_k^2, \dots) = 0$ . В этом случае при активном нагружении

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_i} \frac{s_{ij}}{\sigma_i} + \frac{1}{3} \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_0} \delta_{ij} \right\} + \left\{ \left[ \frac{E^* (1 + \nu)}{E^2} - \frac{\dot{\nu}}{E} \right] s_{ij} + \left[ \frac{E^* (1 - 2\nu)}{E^2} + \frac{2\dot{\nu}}{E} \right] \sigma_0 \delta_{ij} \right\} \quad (1.14)$$

где  $E^*$ ,  $\dot{\nu}$  — скорости изменения упругих постоянных при пластическом деформировании,  $s_{ij}$  — девиатор тензора напряжений,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Скорости изменения упругих постоянных в пористых средах определяются через изменение объемного содержания пор по выражениям, связывающим упругие характеристики пористого материала с объемным содержанием пор и упругими характеристиками матрицы [19]:

$$E^* = E_c' (E_M, \nu_M, c) c^*, \quad \dot{\nu} = \nu_c' (E_M, \nu_M, c) c^*, \quad c^* = (1 - c) \varepsilon_{kk}^p \quad (1.15)$$

где  $c$  — объемная концентрация пор,  $E_M, \nu_M$  — упругие характеристики материала матрицы. Из исследований поверхности текучести пористых материалов [13—15] следует, что при некоторых путях нагружения возможно получение падающих диаграмм напряжение — деформация, когда точки поверхности нагружения при нагружении могут смещаться внутрь области, ограниченной первоначальным положением поверхности нагружения. В этих случаях необходимо переходить к деформационным формулировкам теории пластичности. В случае когда пластическое деформирование приводит к изменению упругих характеристик за счет создания текстуры, необходимо рассматривать повреждения в анизотропном упругом материале. Если условие образования дефектов (1.2) достигается при меньших нагрузках, т. е. раньше, чем выполняется условие (1.1) и происходит пластическое течение, то неравенство (1.3) приводит к условиям  $1/2 dS_{ijkl}(\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}'\sigma_{kl}') \geq 0, dS_{ijkl}\sigma_{kl}d\sigma_{ij} \geq 0$ .

В случае отсутствия пластических деформаций необратимых остаточных деформаций при полной разгрузке не будет. При конечных деформациях учет вращения окрестности точки относительно системы отсчета [20, 21] приводит к динамически корректной форме уравнения (1.12), (1.13): Использование производных тензоров по Яуманну позволяет записать соотношение (1.12) в виде

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \partial f_2 / \partial \sigma_{ij} - S_{ijkl}^0 \sigma_{kl}, \quad S_{ijkl}^0 = S_{ijkl} + S_{mjkl} \Omega_{mi} + S_{inhl} \Omega_{nj} + S_{ijpl} \Omega_{pk} + S_{ijkq} \Omega_{ql}, \quad \Omega_{ij} = 1/2 (v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (1.16)$$

где  $v_i$  — компоненты вектора скорости,  $v_{i,j}$  — частная производная  $v_i$  по координате  $x_j$ . Соответственно соотношение (1.13) запишется в виде

$$\sigma_{ij}^0 = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} + E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e - \lambda_1 \partial F / \partial \varepsilon_{ij} \quad (1.17)$$

$$E_{ijkl}^0 = E_{ijkl} - E_{mjkl} \Omega_{mi} + E_{inhl} \Omega_{nj} + E_{inhl} \Omega_{nj} + E_{ijpl} \Omega_{pk} + E_{ijkq} \Omega_{ql}$$

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij} + \sigma_{kj} \Omega_{ki} + \sigma_{ik} \Omega_{jk}$$

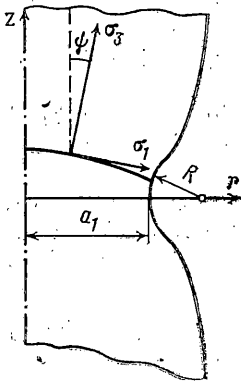
Выражения (1.14) и (1.15) сохраняют свою форму и при конечных деформациях, что проверяется подстановкой упругих постоянных изотропного тела в соотношения (1.16) и (1.17).

2. При испытаниях на растяжение цилиндрических образцов образуется шейка, в которой происходит интенсивная пластическая деформация, а также образование дефектов [11, 12]. Численному определению напряженно-деформированного состояния в шейке посвящены работы [23—26]. Сравнение этих численных результатов с приближенными [27, 28] показало, что приближения, принятые в [28], дают довольно хорошее совпадение распределений деформаций и напряжений с расчетными данными. Поэтому для анализа деформаций в шейке с учетом образования дефектов аналогичным образом предположим, что в шейке радиальная и окружная компоненты деформаций равны и постоянны по сечению. Задача является осесимметричной, поэтому будем пользоваться цилиндрическими координатами  $r, \varphi, z$  и примем условие текучести в виде

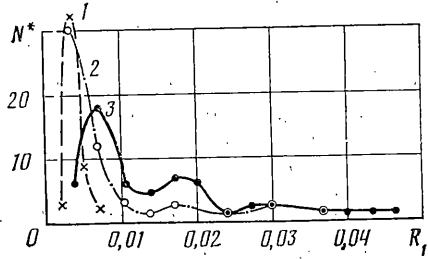
$$(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 + \alpha \sigma_0^2 = 2\sigma_s^2$$

$$\sigma_s = \beta(c) \sigma_i^M (\varepsilon_i^M), \quad \alpha = \alpha(c) \quad (2.1)$$

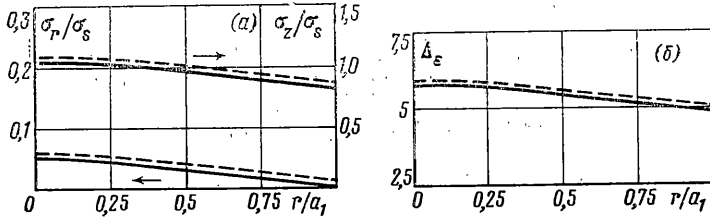
Здесь  $\sigma_i^M$  — интенсивность средних напряжений в матрице,  $\varepsilon_i^M$  — интенсивность средних деформаций в матрице. Принятое условие текучести получается, если разложить в ряд условие текучести для упрочняющегося пористого материала в [20] и удержать члены до второго порядка включительно. Такое условие текучести получено в [13] для неупрочняющегося жесткопластического материала и использовалось в [12] для описания поведения пористых материалов. Следует отметить, что в [1] использовалось условие текучести в виде  $\sigma_i + \alpha \sigma_0 = \sigma_s$  для описания разрыхления материалов при пластическом деформировании.



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

Используя (1.14), получим

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r^p &= \lambda (2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z + \frac{1}{3}\alpha\sigma_0) + [E^*(1+\nu)/E^2 + \nu^*/E]\sigma_r - 3[E^*\nu/E^2 - \nu^*/E]\sigma_0 \\
 \varepsilon_\varphi^p &= \lambda (2\sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_z + \frac{1}{3}\alpha\sigma_0) + [E^*(1+\nu)/E^2 + \nu^*/E]\sigma_\varphi - 3[E^*\nu/E^2 - \nu^*/E]\sigma_0 \\
 \varepsilon_z^p &= \lambda (2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\varphi + \frac{1}{3}\alpha\sigma_0) + [E^*(1+\nu)/E^2 + \nu^2/E]\sigma_z - 3[E^*\nu/E^2 - \nu^*/E]\sigma_0 \\
 \varepsilon_{rz}^p &= 6\lambda\tau_{rz} + [E^*(1+\nu)/E^2 + \nu^*/E]\tau_{rz} \\
 \varepsilon_r^p + \varepsilon_\varphi^p + \varepsilon_z^p &= \lambda\alpha\sigma_0 + 3[E^*(1-2\nu)/E^2 + 2\nu^*/E]\sigma_0
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Принимая условия  $\varepsilon_r^* = \varepsilon_\varphi^*$ , получим  $\sigma_r = \sigma_\varphi$ . Уравнения равновесия для осесимметричной задачи при отсутствии объемных сил будут

$$\begin{aligned}
 \partial\sigma_r/\partial r + \partial\tau_{rz}/\partial z + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r &= 0 \\
 \partial\tau_{rz}/\partial r + \partial\sigma_z/\partial z + \tau_{rz}/r &= 0
 \end{aligned}$$

При  $z=0$  в силу симметрии уравнения равновесия можно записать в виде

$$\partial\sigma_r/\partial r + \partial\tau_{rz}/\partial z = 0, \quad \partial\sigma_z/\partial z = 0 \quad (2.3)$$

Условие текучести (2.1) при  $z=0$  и  $\sigma_r = \sigma_\varphi$  будет  $2(\sigma_z - \sigma_r)^2 + \alpha\sigma_0^2 = 2\sigma_s^2$ . В предположениях [228] при  $z=0$  имеем

$$\tau_{rz} \approx (\sigma_z - \sigma_r)\psi \quad (2.4)$$

$$\sigma_z = (1 + \frac{1}{18}\alpha)^{-1} \{ (1 - \frac{1}{9}\alpha)\sigma_r + [(1 + \frac{1}{18}\alpha)\sigma_s^2 - \frac{1}{2}\alpha\sigma_r^2]^{1/2} \}$$

где  $\psi$  — угол наклона главной оси напряжения в меридиональной плоскости с осью образца (фиг. 2). Подставляя (2.4) в уравнения равновесия (2.3) при условии  $\sigma_s = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$ , что справедливо на начальных участках развития шейки [22], получим

$$\frac{18+\alpha}{3} \int \frac{d\sigma_r}{-\alpha\sigma_r + [2(18+\alpha)\sigma_s^2 - 18\alpha\sigma_r^2]^{1/2}} = \int \frac{dr}{\rho} + C$$

где  $\rho$  — радиус кривизны продольной линии главного напряжения в месте

пересечения ею плоскости  $z=0$ . Интегрируя, будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \ln |[(B-A)^2 + 18\alpha m^2]((B-A) - 2\alpha m(B-A) - 18\alpha m^2)^{-1}| - \\ & - (4/\sqrt{2\alpha}) \operatorname{arctg} [\sqrt{2} (B-A)/(mA)] = \ln (1 + (a_1^2 - r^2)/(2a_1 R)) + C \\ & A = [2(18 + \alpha)]^{1/2}, \quad B = [2(18 + \alpha) - 18\alpha m^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $a_1$  — радиус шейки в минимальном сечении,  $R$  — радиус кривизны контура шейки в ее основании,  $m = \sigma_r/\sigma_s$ . При малых  $\alpha$  можно получить приближенное выражение (2.5), учитывая граничное условие  $m=0$  при  $r=a_1$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \ln |(9\alpha m^2 + 72)(9\alpha m^2 + 12\alpha m - 72)^{-1}| - \\ & - (4/\sqrt{2\alpha}) \operatorname{arctg} [-\frac{1}{2}\alpha^{1/2}m(18 + \alpha)^{-1/2}] = \ln [1 + (a_1^2 - r_2^2)/(2a_1 R)^{-1}] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Соответственно изменение объема примет вид

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon &= \varepsilon_{hh}^p / \varepsilon_r^p = \frac{1}{3}\alpha(3m + D) \{ [ \frac{1}{2}\alpha m + (\frac{1}{9}\alpha - \\ & - 1)D ] \{ 1 - \sigma_s G^{-1}(3m + D) [ E_c' (1 - 2\nu) / E^2 + \\ & + 2\nu_c' / E ] (1 - c) \} - \alpha \sigma_s (1 - c) G^{-1}(3m + D) / 3 \{ -E_c' G m / E^2 + \\ & + E_c' m F_1 / E^2 - \nu_c' m F_1 / E + (E_c' \nu / E^2 - \nu_c' / E) D \} \}^{-1} \\ & D = (1 + \frac{1}{18}\alpha - \frac{1}{2}\alpha m^2), \quad G = (1 + \frac{1}{18}\alpha) \\ & F_1 = (2 - \frac{1}{18}\alpha), \quad E_c' = dE/dc, \quad \nu_c' = d\nu/dc \end{aligned} \quad (2.7)$$

Графики выражений (2.4), (2.6) и (2.7) при  $c=0,1$ ,  $\sigma_s/E=1/300$ ,  $a_1/R=0,1$  приведены на фиг. 3, а, б сплошными линиями. Принятые следующие зависимости для упругих постоянных от объемной концентрации пор [13]

$$\begin{aligned} E &= 2E_M(1-c)(7-5\nu_M)\Delta_1^{-1}, \quad 1-2\nu = 2(7-5\nu_M)[1- \\ & - 2\nu_M + \frac{3}{2}(1+\nu_M)c]\Delta_1^{-1}, \quad \sigma_s^2 = \frac{1}{3}(1-c)^2(\sigma_i^M)^2 \\ \Delta_1 &= [2(7-5\nu_M) + (1+\nu_M)(13-15\nu_M)c], \quad \alpha = c/6 \end{aligned}$$

Для подсчета скоростей пластических деформаций и напряжений в процессе деформирования использована шаговая процедура. Приращения объемной концентрации упругих постоянных и радиуса кривизны шейки [28] вычислялись по формулам

$$\begin{aligned} \Delta c &= (1-c)\Delta \varepsilon_{hh}^p, \quad c_1 = c + \Delta c, \quad E = E(c_1), \quad \nu = \nu(c_1) \\ \Delta(a_1/R) &= -1,78\Delta \varepsilon_r, \quad \Delta \alpha = \Delta c/6 \end{aligned} \quad (2.8)$$

и в случае линейного упрочнения матрицы [14]:

$$\Delta \sigma_i^M = A^0 (2\sigma_r \Delta \varepsilon_r^p + \sigma_z \Delta \varepsilon_z^p) [(1-c)\sigma_i^M]^{-1} \quad (2.9)$$

Напряжения и шаровая часть тензора скоростей деформаций на втором шаге определялись путем численного интегрирования первого уравнения (2.3) с учетом (2.4), где  $\alpha$  и  $\sigma_s$  вычислялись с учетом определенных по формулам (2.8) и (2.9) приращений при  $\Delta \varepsilon_r = -0,01$  и  $A^0 = 0,1E_M$ . Результаты приведены на фиг. 3, а, б штриховыми линиями. Как видно из фиг. 3, б, объемная деформация имеет максимальное значение в центре шейки, что согласуется с экспериментальными результатами [10, 22]. Напряжения, полученные на этой теории, оказываются меньшими, чем полученные в аналогичных предположениях по классическим моделям. В частности, напряжение  $\sigma_r$  будет при малом  $\alpha$  меньше в  $(1 + \frac{1}{36}\alpha)$  раз по сравнению с решением [28].

Следует отметить, что условие текучести (2.1) справедливо для пористого материала. Оно не учитывает, что в каждый момент деформирования в реальных материалах происходит образование дефектов. Функции распределения микродефектов  $N^*$  при пластическом деформировании цилиндрических образцов из титанового сплава ВТ-5 в центре шейки в зависимости от  $R_1$  (в мм) при различных уровнях пластической деформации приведены на фиг. 4 [22]. Кривой 1 соответствует 11% оста-

точной деформации, кривой 2 — 21%, кривой 3 — 42%. На графиках видно, что при всех уровнях деформаций присутствуют дефекты начального размера. Это свидетельствует о том, что образование дефектов происходит одновременно с их ростом. Поэтому объемная концентрация пор равна  $c = c_0 + c_2$ , где  $c_0$  — объемная концентрация пор, рост которых происходит в процессе пластического течения,  $c_2$  — часть объемной концентрации пор, возникших в процессе пластического течения. Соотношения (2.1) — (2.9) приведены в случае, когда  $c_2 = 0$  в процессе пластического деформирования. В [29] приведены результаты исследования влияния повреждений на упругие характеристики различных материалов. Из этих результатов следует, что  $dE/d\varepsilon_z^p = -BE_M'$ , где  $E_M'$  — начальный модуль исследованных материалов. В предположении, что повреждениями являются поры, и используя формулу для упругих постоянных в зависимости от объемной концентрации пор, получим

$$c = 2(E_M - E)(7 - 5\nu_M)[E(1 + \nu_M)(13 - 15\nu_M) + 2E_M(7 - 5\nu_M)]^{-1}$$

Отсюда можно определить конечную концентрацию пор непосредственно перед разрушением по значению модуля упругости. По результатам [29] для меди при  $\nu = 0,2$  конечная концентрация пор при разрушении  $c = 0,64$ , для алюминиевого сплава АУ4Г1  $c \approx 0,13$ , для сплава INCO718 и стали 30СД4  $c \approx 0,14$ . Такие концентрации пор достигаются при деформациях  $\varepsilon_z^p$  порядка 0,3—0,5. Для пористых материалов, когда изменение объемной концентрации пор связано только с пластическим течением и изменением размера пор при одноосном нагружении, используя условие текучести (2.1), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^p &= \varepsilon_\varphi^p = \lambda(-\sigma_z + \frac{1}{9}\alpha\sigma_z) - (E'\nu/E^2 - \nu'/E)\sigma_z \\ \varepsilon_z^p &= \lambda(2\sigma_z + \frac{1}{9}\alpha\sigma_z) + [E'(1 + \nu)/E^2 - \nu'/E]\sigma_z \\ \varepsilon_r^p + \varepsilon_\varphi^p + \varepsilon_z^p &= \frac{1}{3}\lambda\alpha\sigma_z + [E'(1 - 2\nu)/E^2 + 2\nu'/E]\sigma_z = c/(1 - c) \end{aligned}$$

Отсюда будем иметь

$$\begin{aligned} \lambda &= 3c[(1 - c)\alpha\sigma_z]^{-1} - 3[E'(1 - 2\nu)/E^2 + 2\nu'/E]/\alpha \\ \varepsilon_z^p &= 3c(2 + \frac{1}{9}\alpha)[(1 - c)\alpha]^{-1} - 3[E'(1 - 2\nu)/E^2 + \\ &+ 2\nu'/E](2 + \frac{1}{9}\alpha)\sigma_z/\alpha + [E'(1 + \nu)/E^2 - \nu'/E]\sigma_z \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из второго соотношения (2.10) получим, учитывая равенство  $\alpha = c/6$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_z^p}{dc} &= \frac{18}{(1 - c)c} \left(2 + \frac{c}{54}\right) - \frac{18}{c} \left[ \frac{dE}{dc} \frac{(1 - 2\nu)}{E} + 2 \frac{d\nu}{dc} \right] \left(2 + \frac{c}{54}\right) \frac{\sigma_z}{E} + \\ &+ \left[ \frac{dE}{dc} \frac{(1 + \nu)}{E} - \frac{d\nu}{dc} \right] \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned}$$

Из этого соотношения приближенно можно записать  $dc/d\varepsilon_z^p \approx \frac{1}{36}(1 - c)c$ , тогда получим

$$\begin{aligned} dE/d\varepsilon_z^p &= -\frac{1}{18}E_M(7 - 5\nu_M)(1 - \nu_M)(27 + 15\nu_M)(1 - c)c[2(7 - 5\nu_M) + \\ &+ (1 + \nu_M)(13 - 15\nu_M)c]^{-2} \end{aligned}$$

В частности, при  $\nu_M = 0,2$  и  $c = 0,1$  получим  $dE/d\varepsilon_z^p = -0,41 \cdot 10^{-2}E_M$ . В [29] экспериментальные значения коэффициента  $B$  имеют порядок 0,5. Отсюда следует, что образование пор имеет существенное значение. В [30] для условия зарождения введено специальное условие, которое дает изменение пористости изотропного материала в связи с изменением объемной концентрации пор при образовании новых пор в процессе пластического деформирования. Более последовательным является включение условия образования новых пор в условие текучести, поскольку такой подход должен описывать необратимое изменение объема в связи с изменением пористости и разделять изменение объема за счет увеличения имеющихся пор и зарождения новых нет необходимости. Условие

$c = (1-c)\varepsilon_{hh}^p$  включает в себя как увеличение пористости за счет увеличения имеющихся, так и возникновение новых пор. По определению,  $c = V_1/V$ , где  $V$  — объем тела,  $V_1$  — объем пор. Тогда  $\Delta c = (\Delta V_1 V - V_1 \Delta V)/V^2$ . В силу несжимаемости пластически деформируемой матрицы  $\Delta V_1 = \Delta V$  и  $\Delta c = \Delta c_0 + \Delta c_2 = (1-c)\Delta V/V = (1-c)\Delta\varepsilon_{hh}^p$ . Отсюда, деля обе части равенства на  $\Delta t$ , при  $\Delta t \rightarrow 0$  получим требуемое соотношение. Имеется достаточно большой произвол в выборе условия текучести, чтобы эти явления описать единым образом. В частности, для изотропного пористого пластического тела можно получить

$$\varepsilon_{ij}^p = \left[ \lambda \frac{3}{2\sigma_i} \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_i} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_0} \right) \right] s_{ij}, \quad \varepsilon_{hh}^p = \lambda \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_0} - 3 \left( \frac{1}{K} \right) \sigma_0$$

где  $G_0$  — модуль сдвига,  $K$  — модуль объемной упругости,  $s_{ij}$ ,  $e_{ij}$  — девиаторы тензоров напряжений и деформаций. Отсюда

$$\lambda = [\varepsilon_i^p + 1/3(1/G_0)\sigma_i](\partial f_2/\partial \sigma_i)^{-1}$$

$$c/(1-c) = [\varepsilon_i^p + 1/3(1/G_0)\sigma_i](\partial f_2/\partial \sigma_i)^{-1} \partial f_2/\partial \sigma_0 - 3(1/K)\sigma_0 = \varepsilon_{hh}^p$$

Из последнего соотношения можно получить  $c = (1-c) \{ [\varepsilon_i^p + 1/3(1/G_0)\sigma_i](\partial f_2/\partial \sigma_i)^{-1} \partial f_2/\partial \sigma_0 - 3(1/K)\sigma_0 \}$ . Выбор  $f_2$  позволяет описать достаточно широкий класс соотношений для условий изменения пористости.

В частности, если предположить, что условие текучести в области положительных значений шаровой части тензора напряжений можно аппроксимировать условием  $\sigma_i^2 + \alpha \sigma_0^2 = 2\sigma_s^2$ , то можно определить порядок, который должен иметь коэффициент  $\alpha$  для того, чтобы описывать и зарождение дефектов типа пор и описывать экспериментальные данные [29] по изменению модулей упругости при пластическом деформировании. Соотношение  $\alpha = c/6$  при наличии эффекта образования новых пор несправедливо. Поэтому  $de_z^p/dc \approx 6[(1-c)\alpha]^{-1}$ ,  $dE/de_z^p \approx -2E_M(1-c)\alpha[6(1+c)^2]^{-1} = -BE_M$  при  $\nu = 0,2$ . При  $c = 0,1$ ,  $B = 0,2$  получим, что  $\alpha \approx 0,8$ . В этом случае  $\varepsilon_{hh}^p/\varepsilon_r^p \approx -0,348$  при  $r = 0$  и  $\varepsilon_{hh}^p/\varepsilon_r^p \approx -0,3$  при  $r = a_1$ , а характер поведения величины  $\varepsilon_{hh}^p/\varepsilon_r^p$  такой же, как на фиг. 3, б.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. О пластическом разрыхлении // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 681—689.
2. Мруз З., Шиманский Ч. Неассоциированный закон течения в описании пластического течения гранулированных сред // Механика гранулированных сред. М.: Мир. 1985. С. 9—43.
3. Николаевский В. Н. О связи объемных и сдвиговых пластических деформаций и ударных волн в мягких грунтах // Докл. АН СССР. 1967. Т. 177. С. 542—545.
4. McClintock F. A. Local criteria for ductile fracture // Int. J. Fract. 1968. V. 4. No. 2. P. 101—130.
5. Broek D. A study on ductile fracture. Ph. D. Thesis. Technische Hogeschool, Delft, Nederlande, Boekdrukk Industrie N. V., S-Hertogenbosch. 1974.
6. Иелев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука. 1971. 231 с.
7. Рожанский В. Н. К вопросу об условиях возникновения и развития трещин в кристаллах // Физ. твердого тела. 1960. Т. 2. Вып. 6. С. 1082—1088.
8. Екобори Т. Научные основы прочности и разрушения материалов. Киев: Наук. думка. 1978. 351 с.
9. Tipper C. F. The fracture of metals // Metallurgia. 1949. V. 39. P. 133—137.
10. Tipnis V. A., Cook N. H. The influence of stress-state and inclusion content on ductile fracture with rotation // Trans. ASME. J. Bas. Eng. 1967. No. 3. P. 533—540.
11. Puttick K. E. Ductile fracture in metals // Philos. Mag. Ser. 8. 1959. V. 4. No. 44. P. 964—969.
12. Грин Р. Дж. Теория пластичности пористых тел // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1973. № 4. С. 109—120.
13. Дудукаленко В. В., Смыслов А. Ю. К расчету предела пластичности пористых материалов // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 5. С. 32—35.
14. Gurson A. L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Pt I. Yield criteria and flow rules for porous ductile media // Trans. ASME. J. Eng. Mater. and Technol. 1977. V. 99. No. 1. P. 2—15.
15. Shima S., Oyanu M. Plasticity theory for porous metals // Int. J. Mech. Sci. 1976. V. 18. No. 6. P. 285—291.



16. *Салганик Р. Л.* Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 149–158.
17. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.: Изд-во АН СССР. 1963. 271 с.
18. *Березин А. В.* Одноосное деформирование пластического тела с учетом образования и роста микротрещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 5. С. 69–75.
19. Композиционные материалы. Т. 2. Механика композиционных материалов // Под ред. Дж. Сендечки. М.: Мир. 1978. 564 с.
20. *Yamatoto H.* Conditions for shear localization in the ductile fracture of void-containing materials // Int. J. Fract. 1978. V. 14. No. 4. P. 347–365.
21. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир. 1964. 308 с.
22. *Березин А. В., Меренкова Р. Ф.* Исследование разрушения титанового сплава при пластической деформации // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 1. С. 147–155.
23. *Thomason P. F.* An analysis of necking in axi-symmetric tension specimens // Int. J. Mech. Sci. 1969. V. 11. No. 5. P. 481–490.
24. *Chen W. H.* Necking of a bar // Int. J. Solids and Struct. 1971. V. 7. No. 7. P. 685–717.
25. *Needleman A.* A numerical study of necking in circular cylindrical bars // J. Mech. and Phys. Solids. 1972. V. 20. No. 2. P. 111–127.
26. *Saje M.* Necking of a cylindrical bar in tension // Int. J. Solids and Struct. 1979. V. 15. No. 9. P. 731–742.
27. *Давиденков Н. Н., Спиридонова Н. И.* Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца // Заводск. лаборатория. 1945. Т. 11. № 6. С. 383.
28. *Бриджмен П.* Исследования больших пластических деформаций и разрыва. М.: Изд-во иностр. лит. 1955. 444 с.
29. *Lemaitre J.* A continuous damage mechanics model for ductile fracture // Trans. ASME. J. Eng. Mater. and Technol. 1985. V. 107. No. 1. P. 83–89.
30. *Needleman A., Tvergaard V.* An analysis of ductile rupture in notched bars // J. Mech. and Phys. Solids. 1984. V. 32. No. 6. P. 461–490.

Москва

Поступила в редакцию  
26.III.1985