

УДК 539.3

ЗАДАЧА О ВОЗДЕЙСТВИИ
РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ
НАГРУЗКИ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО,
СОДЕРЖАЩЕЕ ЗАГЛУБЛЕННУЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ПОЛОСТЬ

КОЛОДЯЖНАЯ Г. Е., СЕЛЕЗНЕВ М. Г., СЕЛЕЗНЕВА Т. Н.

Рассматривается трехмерная задача динамической теории упругости для полупространства с заглубленной цилиндрической полостью. Нагрузка приложена к границе полости, совершает установившиеся гармонические колебания и равномерно прямолинейно движется параллельно образующей цилиндра.

При построении решения в подвижной системе координат, связанной с областью приложения нагрузки, используется принцип суперпозиции. Это позволяет свести краевую задачу к системе шести интегральных уравнений, через решение которой описывается напряженно-деформированное состояние во всей упругой области. Исследованы свойства системы и предложена методика построения ее решения. В случае, когда радиус полости относительно мал, решение краевой задачи строится в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра, характеризующего отношение радиуса полости к величине заглубления ее оси. Проведен численный анализ полученных решений.

1. Рассмотрим упругое полупространство с полостью, занимающее в декартовой системе координат область $x \geq 0$; $\sqrt{(x-h)^2 + y^2} = r \geq a$. Упругое полупространство описывается динамическими уравнениями теории упругости в смещениях — уравнениями Ламе [1]; ρ , λ , μ — соответственно плотность и постоянные Ламе среды.

Нагрузки, приложенные к границе области, равномерно прямолинейно движутся в направлении оси oz . Граничные условия удобно записать в подвижной системе координат x , y , z^* ; $z^* = z - v_0 t$, $v_0 = \text{const}$ — скорость движения нагрузки. В общем случае граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} x^{\sim} = 0, \quad \sigma_x = t_1(y^{\sim}, z^{*\sim})A, \quad \tau_{xy} = t_2(y^{\sim}, z^{*\sim})A, \quad \tau_{xz} = t_3(\varphi, z^{*\sim})A \\ r^{\sim} = 1, \quad \sigma_r = \tau_1(\varphi, z^{*\sim})A, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_2(\varphi, z^{*\sim})A, \quad \tau_{rz} = \tau_3(\varphi, z^{*\sim})A \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $r^{\sim} = r/a$, $x^{\sim} = x/a$, $y^{\sim} = y/a$, $z^{*\sim} = z^*/a$, $\varphi = \arctg(y^{\sim}/(x^{\sim} - h/a))$ — безразмерные координаты, r , φ , z — цилиндрические координаты, связанные с осью цилиндрической полости, $A = \exp(-i\omega t)$, ω — частота колебаний. Всюду далее используются только безразмерные координаты, поэтому черта опускается.

Решение краевой задачи (1.1) ищем аналогично [2] в виде суммы решений двух вспомогательных задач:

$$\begin{aligned} u_x = (u_1^{(1)} + u_2^{(2)})A, \quad u_y = (u_2^{(1)} + u_2^{(2)})A \\ u_z = (u_3^{(1)} + u_3^{(2)})A \end{aligned} \quad (1.2)$$

где индексу (1) соответствуют компоненты вектора смещения краевой задачи для полупространства $x \geq 0$ без полости, нагруженного усилиями

$$x = 0, \quad \sigma_x = X_1(y, z^*)A \quad (1.3)$$

$$\tau_{xy} = X_2(y, z^*)A, \quad \tau_{xz} = X_3(y, z^*)A$$

а индексу (2) — решение краевой задачи для бесконечного упругого про-

странства с цилиндрической полостью $r \geq 1$, к поверхности которой приложена система усилий

$$r=1, \quad \sigma_r = Y_1(\varphi, z^*)A \quad (1.4)$$

$$\tau_{r\varphi} = Y_2(\varphi, z^*)A, \quad \tau_{rz} = Y(\varphi, z^*)A$$

Неизвестные функции X_j, Y_j ($j=1, 2, 3$) подлежат определению из решения системы интегральных уравнений, получаемых при подстановке (1.2) в граничные условия краевой задачи (1.1). Волновое поле в среде определяется через преобразование Фурье функций X_j, Y_j по переменной z^* . В силу этого и систему уравнений целесообразно записать относительно преобразований Фурье этих функций по переменной z^* . Имеем

$$X_j^\circ(y, \alpha) = t_j^\circ(y, \alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^3 K_{jk}(y, \alpha, \psi) Y_k^\circ(\alpha, \psi) d\psi \quad (j=1, 2, 3)$$

$$Y_j^\circ(\varphi, \alpha) = \tau_j^\circ(\varphi, \alpha) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^3 Q_{jk}(\varphi, \alpha, \beta) X_k^*(\alpha, \beta) d\beta \quad (1.5)$$

Градусом обозначено преобразование Фурье соответствующей функции по переменной z^* , α — параметр преобразования

$$X_k^*(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} X_k^\circ(\alpha, \xi) \exp(i\beta\xi) d\xi$$

Функции $K_{jk}(y, \alpha, \psi)$, $Q_{jk}(\varphi, \alpha, \beta)$ имеют довольно громоздкий вид, поэтому здесь не приводятся. Дальше при исследовании задачи для полости относительно малого радиуса приведены главные члены указанных функций, участвующие в представлении решения.

Контур интегрирования Γ в приведенных соотношениях и далее выбирается исходя из принципа предельного поглощения [3] (при решении вспомогательной краевой задачи для однородного упругого полупространства и имеет вид [4]) так, что Γ обходит положительные вещественные точки ветвления и полюса подынтегральной функции снизу, отрицательные — сверху, а на остальной части совпадает с вещественной осью.

Анализ функций $K_{jk}(y, \alpha, \psi)$, $Q_{jk}(\varphi, \alpha, \beta)$ показал, что при $\varepsilon \ll 1$ оператор системы вполне непрерывен в пространстве суммируемых функций и мал при малом ε/θ . Указанные свойства оператора системы позволяют аналогично [2] при $\varepsilon \ll 1$ в общем случае свести систему к решению бесконечной квазирегулярной системы линейных алгебраических уравнений, решение которой проводится на ЭВМ. В случае $\varepsilon/\theta \ll 1$ целесообразно строить решение системы методом последовательных приближений с асимптотическим вычислением интегралов [5]. При этом анализ свойств элементов системы (1.5) при $\varepsilon \ll 1$ определяет выбор первого приближения

$$X_j^\circ(y, \alpha) = t_j^\circ(y, \alpha) + o(\sqrt{\varepsilon}), \quad Y_j^\circ(\varphi, \alpha) = \tau_j^\circ(\varphi, \alpha) + o(\sqrt{\varepsilon}) \quad (1.6)$$

При построении второго приближения выражения (1.6) определяющие X_j, Y_j ($j=1, 2, 3$) подставляем в правые части уравнений системы (1.5) и вычисляем полученные интегралы. Для этого необходимо конкретизировать граничные условия (1.1). Рассмотрим случай, когда плоская граница свободна от усилий, а вдоль цилиндрической полости движется пульсирующая нагрузка, распределенная по цилиндрическому поясу

$$t_l(y, z) = 0, \quad \tau_l(z, \varphi) = 0 \quad (l=2, 3) \quad (1.7)$$

$$\tau_1(z, \varphi) = \begin{cases} P_0, & |z| \leq c \\ 0, & |z| > c \end{cases}, \quad \tau_k^\circ(\alpha, \varphi) = \begin{cases} 2P_0\alpha^{-1} \sin \alpha c, & k=1 \\ 0, & k=2, 3 \end{cases}$$

Для граничных условий (1.1), (1.7) в первом приближении получим

$$X_j(y, \alpha) = -2P_0 \sqrt{\varepsilon} \frac{\sin \alpha c}{\alpha \Delta_0} \sum_{i=1}^3 E_{ij} S_{ji}(y, \alpha) + o(\varepsilon) \quad (j=1, 2, 3) \quad (1.8)$$

$$Y_j(\alpha, \varphi) = \tau_j^0(\alpha, \varphi) + P_0 \sqrt{\varepsilon} \frac{\sin \alpha c}{\alpha \Delta_0} \sum_{i=1}^3 \langle Q_{ji}^{(1)}(\alpha, \varphi) \times$$

$$\times \{E_{11} s_{11}(\alpha, 0) \sqrt{2} \exp(2i\sigma_1/\varepsilon) + 2[E_{21} s_{12}(\alpha, 0) +$$

$$+ E_{31} s_{13}(\alpha, 0)] \sqrt{\sigma_1/(\sigma_1 + \sigma_2)} \exp(iN(\sigma_1 + \sigma_2)) \rangle +$$

$$+ Q_{ji}^{(2)}(\alpha, \varphi) \{E_{11} s_{11}(\alpha, 0) 2\sqrt{\sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2)} \exp(i(\sigma_1 + \sigma_2)/\varepsilon) +$$

$$+ E_{31} s_{13}(\alpha, 0) \} \exp(2i\sigma_2/\varepsilon) \rangle + o(\varepsilon)$$

$$E_{11} = i\alpha^{-1}(\sigma_2^2 - \alpha^2) \sigma_2 H_1^{(1)}(\sigma_2) [\sigma_2^2 H_0^{(1)}(\sigma_2) - 2\sigma_2 H_1^{(1)}(\sigma_2)]$$

$$E_{12} = E_{22} = E_{31} = E_{33} = 0$$

$$E_{13} = -2\sigma_2 [H_1^{(1)}(\sigma_2) - \sigma_2 H_0^{(1)}(\sigma_2)] [2H_1^{(1)}(\sigma_2) - \sigma_2 H_0^{(1)}(\sigma_2)]$$

$$E_{23} = \sigma_2 [2H_1^{(1)}(\sigma_2) - \sigma_2 H_0^{(1)}(\sigma_2)] [\sigma_1 H_1^{(1)}(\sigma_1) -$$

$$- 2\sigma_1^2 H_0^{(1)}(\sigma_1) - \lambda \mu^{-1}(\alpha^2 + \sigma_1^2) H_0^{(1)}(\sigma_1)]$$

$$E_{21} = -2i\alpha \sigma_1 H_1^{(1)}(\sigma_1) [2\sigma_2 H_1^{(1)}(\sigma_2) - \sigma_2^2 H_0^{(1)}(\sigma_2)]$$

$$E_{32} = 4i\alpha \sigma_1 \sigma_2 H_1^{(1)}(\sigma_1) [H_1^{(1)}(\sigma_2) - \sigma_2 H_0^{(1)}(\sigma_2)] + i\alpha^{-1}(\alpha^2 - \sigma_2^2) \sigma_2 H_1^{(1)}(\sigma_2)$$

$$S_{ij} = s_{ij}(\alpha, y) \exp(i\gamma_j(\alpha, y)/\varepsilon) \quad (l, j=1, 2, 3)$$

$$\gamma_l(\alpha, y) = \sigma_l \sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2} \quad (l=1, 2), \quad \gamma_3(\alpha, y) = \gamma_2(\alpha, y)$$

Величины $s_{ij}(\alpha, y)$, $Q_{ij}^{(k)}(\alpha, \varphi)$, $E_{ij}^{(n)}$ имеют достаточно громоздкий вид, поэтому приведем по одной из перечисленных функций для иллюстрации их структуры

$$s_{11}(\alpha, y) = -[\lambda \mu^{-1} \theta_1^2 + 2\sigma_1^2 / (1 + \varepsilon^2 y^2)] \sqrt{2/(\pi \sigma_1)} (1 + \varepsilon^2 y^2)^{-1/2} \exp(-i\pi/4)$$

$$Q_{11}^{(1)}(\alpha, \varphi) = (\alpha^2 + \sigma_2^2) [\lambda \mu^{-1}(\sigma_1^2 - \alpha^2) + 2\sigma_1^2 \cos^2 \varphi] / \Delta(\alpha)$$

$$E_{13}^{(n)} = -2[H_n^{(1)}(\sigma_2) (n^2 - n - \sigma_2^2) + \sigma_2 H_{n+1}^{(1)}(\sigma_2)] [(2(n^2 - n) - \sigma_2^2) H_n^{(1)}(\sigma_2) +$$

$$+ 2H_{n+1}^{(1)}(\sigma_2) \sigma_2] + 4n^2 [(n-1) H_n^{(1)}(\sigma_2) - \sigma_2 H_{n+1}^{(1)}(\sigma_2)]^2$$

$$\sigma_j^2 = -\sigma_j^2 = \alpha^2 - \theta_j^2 \quad (j=1, 2), \quad \omega_0 = \alpha v_0 - \omega$$

$$\theta_1^2 = \rho \omega_0^2 a^2 / (\lambda + 2\mu) \quad \theta_2^2 = \rho \omega_0^2 a^2 / \mu$$

$$\Delta(\alpha) = -4\alpha^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 + (\alpha^2 + \sigma_2^2)^2, \quad \Delta_n(\alpha) = \sum_{j=1}^3 F_{jn} E_{j3}$$

$$F_{1n} = -2i\alpha [nH_n^{(1)}(\sigma_1) - \sigma_1 H_{n+1}^{(1)}(\sigma_1)], \quad F_{3n} = \alpha n H_n^{(1)}(\sigma_2)$$

$$F_{2n} = i\alpha^{-1}(\sigma_2^2 - \alpha^2) [nH_n^{(1)}(\sigma_2) - \sigma_2 H_{n+1}^{(1)}(\sigma_2)]$$

Процедуру построения последовательных приближений можно продолжить далее до достижения требуемой точности.

На основании полученных решений системы интегральных уравнений можно с соответствующей степенью точности построить представления для анализа напряженно-деформированного состояния среды.

2. Найдем амплитуды компонент векторов смещения (1.2) при подстановке в представления решений вспомогательных задач выражений, опре-

деленных решением системы интегральных уравнений. Вычисляя интегралы, входящие в формулы для функций $u_j^{(1)}(x, y, z)$ ($j=1, 2, 3$) через $X_j^\circ(y, \alpha)$ (1.8), методом перевала [6], получим с точностью до членов порядка $O(\varepsilon)^{1/2}$:

$$u_j^{(1)}(x, y, z) = -\frac{\varepsilon P_0}{\pi \mu} \sum_{k=1}^3 \frac{\chi_{kj}(\alpha_k, \beta_k)}{[|(\zeta_k)_{\alpha\alpha}''| |(\zeta_k)_{\beta\beta}''|]^{1/2}} \times \\ \times \exp \left[\frac{i}{\varepsilon} \zeta_k(\alpha_k, \beta_k, x, y, z) + i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \zeta_{\alpha\alpha}'' + i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \zeta_{\beta\beta}'' \right] \quad (2.1)$$

$$\chi_{kj}(\alpha, \beta) = \sigma_1 \sqrt{2\pi} (\sigma_1^2 - \beta^2)^{-1/2} \alpha^{-1} \sin \alpha c \Psi_{kj}(\alpha, \beta, -\beta / (\varepsilon \sqrt{\sigma_1^2 - \beta^2}))$$

В (2.1) входят значения производных ζ_k при $\alpha = \alpha_k, \beta = \beta_k$, кроме того, $l=1$ при $k=1, 2$; $l=2$ при $k=3, 4$:

$$\Psi_{nj}(\alpha, \beta, \xi) = \sum_{l=1}^3 K_{jl}^{(n)}(\alpha, \beta) E_{11} \frac{s_{11}(\alpha, \xi)}{\Delta(u)} \quad (n=1, 2)$$

$$\Psi_{nj}(\alpha, \beta, \xi) = \sum_{l=1}^3 K_{jl}^{(n-2)}(\alpha, \beta) \frac{E_{21}s(\alpha, \xi) + E_{31}s_{13}(\alpha, \xi)}{\Delta(u)} \quad (n=3, 4)$$

Выражения для $K_{ij}^{(n)}(\alpha, \beta)$ имеют следующую структуру:

$$K_{11}^{(1)}(\alpha, \beta) = -\sigma_1 (u^2 + \sigma_2^2) / \Delta(u), \quad K_{11}^{(2)}(\alpha, \beta) = 2u^2 \sigma_1 / \Delta(u)$$

$$\zeta_1(\alpha, \beta, x, y, z) = \sigma_1^\circ (1 + \varepsilon x) - \alpha \varepsilon z - \beta \varepsilon y$$

$$\zeta_2(\alpha, \beta, x, y, z) = \sigma_1^\circ + \sigma_2^\circ \varepsilon x - \alpha \varepsilon z - \beta \varepsilon y$$

Здесь ζ_3, ζ_4 получаем из ζ_1, ζ_2 , меняя σ_1° и σ_2° местами, $\sigma_j^\circ = [\theta_j^2 - \alpha^2 - \beta^2]^{1/2}$, $u^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Величины α_k и β_k определяются решением системы трансцендентных уравнений $\zeta_{k\alpha}' = 0, \zeta_{k\beta}' = 0$, удовлетворяющим неравенству $(\alpha_k^2 v_0 - 2\alpha v_0 \omega^2 a^2) / (v_k - \alpha_k^2 - \beta_k^2) > 0$ ($k=1, 2$); $v_1 = \sqrt{(\alpha + 2\mu)/\rho}$, $v_2 = \sqrt{\mu/\rho}$.

Компоненты $u_j^{(2)}(x, y, z)$ определяются соотношениями

$$u_1^{(2)} = -u_r^{(2)} \cos \varphi + u_\varphi^{(2)} \sin \varphi, \quad u_r^{(2)} = u_{11}^{(2)} \quad (2.2)$$

$$u_2^{(2)} = u_r^{(2)} \sin \varphi - u_\varphi^{(2)} \cos \varphi, \quad u_\varphi^{(2)} = u_{21}^{(2)}$$

$$u_3^{(2)} = u_{31}^{(2)}, \quad r = \sqrt{(\varepsilon^{-1} - x)^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(-y / (\varepsilon^{-1} - x))$$

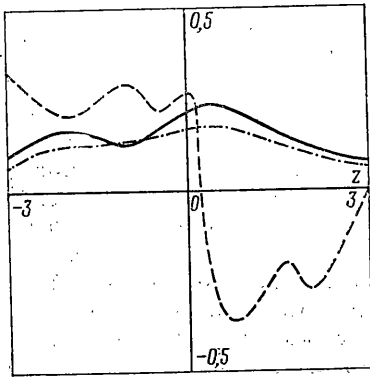
$$u_{31}^{(2)}(r, \varphi, z) = \frac{P_0}{2\pi r} \int \frac{\sin \alpha c}{\alpha \Delta_0} [f_{k0}(\alpha, r) + \bar{V} \varepsilon f_{k1}(\alpha, r, \varphi) \exp\left(2 \frac{i}{\varepsilon} \sigma_1 - i\alpha z\right) + \\ + \bar{V} \varepsilon \left(f_{k2}(\alpha, r, \varphi) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} (\sigma_1 + \sigma_2) - i\alpha z\right) + f_{k3}(\alpha, r, \varphi) \exp\left(\frac{2i}{\varepsilon} \sigma_2 - i\alpha z\right) \right)] d\alpha$$

$$f_{10}(\alpha, r) = -2i [E_{11} H_0^{(1)}(\sigma_1 r) - \sigma_2^2 / \alpha^2 H_0^{(1)}(\sigma_2 r) E_{21}] \quad (2.3)$$

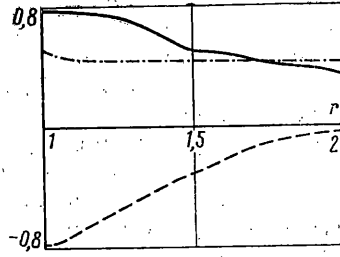
$$f_{1j}(\alpha, r, \varphi) = \frac{1}{i\alpha} \sum_{k=-2}^2 \frac{1}{\Delta_k} [\alpha^2 H_k^{(1)}(\sigma_1 r) G_{k1}^{(j)} - \sigma_2^2 H_k^{(1)}(\sigma_2 r) G_{k2}^{(j)}] \exp(ik\varphi)$$

$$G_{1k}^{(2)} = G_{-1k}^{(2)} = \sum_{l=1}^3 \{ E_{k3} [q_{3l}^{(1)}(\alpha) (E_{21} s_{12}(0) +$$

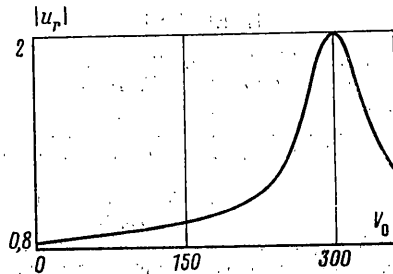
$$+ E_{31} s_{13}(0)) \bar{V} \sigma_1 / (\sigma_1 + \sigma_2) + q_{3l}^{(2)}(\alpha) E_{11} s_{11}(0) [\sigma_2 / (\sigma_1 + \sigma_2)]^{1/2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Функции $q_{kn}^{(j)}$ получаются соответственно из $Q_{kn}^{(j)}$ заменой $\cos^2 \varphi$, $\cos \varphi$, $\cos 2\varphi$, $\sin \varphi$ на единицу. Вид, свойства и структура функций $G_{kj}^{(n)}$, $f_{ij}(\alpha, r, \varphi)$ аналогичны соответственно $G_{1j}^{(2)}$, $f_{1j}(\alpha, r, \varphi)$ и для краткости здесь не приводятся. Контур интегрирования Γ аналогично предыдущему определяется применением принципа предельного поглощения [4].

При вычислении интегралов, определяющих $u_{k1}^{(3)}(r, \varphi, z)$ (2.3), использовались следующие методы. Слагаемые с подынтегральными функциями $f_{kj}(\alpha, r, \varphi)$ ($k, j=1, 2, 3$ при $\varepsilon \ll 1$) вычисляются с использованием асимптотических методов. Интегралы от функций $f_{k0}(\alpha, r)$ в ближней от области приложения нагрузки зоне вычисляются на ЭВМ, в дальней зоне ($[r^2 + z^2]^{1/2} \gg 1$) — асимптотическими методами.

Изложенная схема исследования реализована на ЭВМ. Проведен численный анализ поведения поля смещений в упругой области. Поскольку нагрузка, возбуждающая колебания в среде, приложена к границе цилиндрической полости, анализ волнового поля целесообразно проводить в цилиндрической системе координат, связанной с осью полости (r, φ, z).

В качестве примера на фиг. 1 приведена зависимость радиальной компоненты $u_r(r, \varphi, z)$ вектора смещения при $r=1,1$; $\varphi=\pi/2$, $v_0=200$ м/с, $v_1=1000$ м/с, $\varepsilon=0,1$; $\theta_2=2$ в зависимости от координаты z . Здесь и далее сплошной линией нанесен $|u_r|$, штриховой — фаза ψ ($\psi = \arctg(\text{Im } u_r / \text{Re } u_r)$, $v_2=400$ м/с), штрихпунктирной — значение $|u_r|$ при $v_0=0$.

На фиг. 2 приведена зависимость радиальной компоненты вектора смещения от координаты r для $z=1$ (прочие параметры те же, что и для фиг. 1).

На фиг. 3 приведена зависимость $|u_r|$ для точки с координатами $r=1,1$; $\varphi=\pi/2$, $z=0$ ($v_1, v_2, \varepsilon, \theta_2$ — те же, что и на фиг. 2) в зависимости от скорости движения нагрузки v_0 .

Из проведенного численного анализа следует, что при $v_0/v_2 < 0,4$ учет скорости движения нагрузки приводит к поправкам, не превышающим 10%. Это определяет правомерность при оценке волновых полей, порожденных нагрузками, движущимися со скоростью, не превышающей 0,4 скорости распространения поперечных волн в среде, с соответствующей сте-

пенью точности пользоваться решением более простой задачи — о воздействии неподвижной нагрузки на границу цилиндрической полости в упругом полупространстве.

При анализе диаграмм направленности получено, что учет скорости движения нагрузки приводит к повороту диаграммы направленности излучаемых упругих волн в сторону, противоположную направлению движения, что и определяет асимметрию поведения графика $|u_r|$ (фиг. 1) и несколько различную скорость убывания амплитуды смещения по радиальной координате при наличии и отсутствии движения нагрузки (фиг. 2).

Следует отметить, что решение краевой задачи о воздействии неподвижной нагрузки на упругое полупространство с полостью является частным случаем полученных решений при стремлении v_0 к нулю. При этом вырождение происходит непрерывно, что позволяет проводить расчеты, положив $v_0=0$ во всех выражениях, и использовать программы, составленные для анализа задачи о движущейся нагрузке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
2. Бабешко В. А., Селезнев М. Г., Селезнева Т. Н., Соколов В. П. Об одном методе исследования установившихся колебаний упругого полупространства, содержащего полость // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 1. С. 115–121.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 735 с.
4. Ворovich И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука. 1979. 319 с.
5. Бабешко В. А., Селезнева Т. Н., Селезнев М. Г., Соколов В. П. Установившиеся колебания упругого полупространства содержащего сильно заглубленную сферическую или горизонтальную цилиндрическую полость. // Изв. Сев.-Кавк. научн. центра высш. шк. Естеств. науки. 1984. № 1. С. 42–47.
6. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука. 1977. 368 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
8.X.1985