МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1987

УДК 531.383

ВОЗМУЩЕННЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКИЕ К РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ В СЛУЧАЕ ЛАГРАНЖА

ЛЕЩЕНКО Д. Д., ШАМАЕВ А. С.

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа. Предполагается, что угловая скорость тела достаточно велика, ее направление близко к оси динамической симметрии тела и возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим. Специальным образом вводится малый параметр, применяется метод усреднения. Получены усредненные системы уравнений движения в первом и втором приближениях. Рассмотрены конкретные механические модели возмущений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего и возмущающего моментов. Уравнения движения (динамические и кинематические уравнения Эйлера) имеют вид

$$
\begin{gathered}
Ap^{\cdot}+(C-A)qr=k\sin\theta\cos\varphi+M_1\\
Aq^{\cdot}+(A-C)pr=-k\sin\theta\sin\varphi+M_2\\
Cr^{\cdot}=M_3,\ M_i=M_i(p,\ q,\ r,\ \psi,\ \theta,\ \varphi,\ t)\ \ (i=1,\ 2,\ 3) \qquad (1.1)\\
\psi^{\cdot}=(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta,\ \ \theta^{\cdot}=p\cos\varphi-q\sin\varphi\\
\varphi^{\cdot}=r-(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta
\end{gathered}
$$

Динамические уравнения (1.1) записаны в проекциях на главные оси инерции тела, проходящие через точку O. Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости тела на эти оси, $M_i(i=1,\ 2,\ 3)$ — проекции вектора возмущающего момента на те же оси, являющиеся периодическими функциями углов Эйлера ψ, θ, φ с периодами 2π, A — экваториальный, а C — осевой моменты инерции тела относительно точки O, $A\neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, максимальная величина которого равна k и который создается постоянной по величине и направлению силой, приложенной в некоторой фиксированной точке оси динамической симметрии. В случае тяжелого волчка имеем $k=mgl$, где m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела.

Возмущающие моменты M_i в (1.1) предполагаются известными функциями своих аргументов. При отсутствии возмущений ($M_i=0$, $i=1,\ 2,\ 3$) уравнения (1.1) отвечают случаю Лагранжа.

Уравнения (1.1) могут описывать движения волчка Лагранжа при воздействии возмущений различной физической природы, а также движения свободного твердого тела относительно центра масс, когда на него действует восстанавливающий момент, обусловленный аэродинамическими силами, и некоторые возмущающие моменты.

В данной работе делаются следующие исходные предположения:

$$
p^2+q^2\ll r^2,\ \ Cr^2\gg k,\ \ |M_i|\ll k\ \ (i=1,\ 2,\ 3) \qquad (1.2)
$$

Предположения (1.2) означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим. Неравенства (1.2) позволяют ввести малый параметр $\varepsilon \ll 1$ и положить

$$p=\varepsilon P, \quad q=\varepsilon Q, \quad k=\varepsilon K$$
$$M_i=\varepsilon^2 M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, t) \quad (i=1, 2, 3) \tag{1.3}$$

В [1] также рассматриваются движения тяжелого твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. Предполагается, что на тело действуют малые возмущающие моменты, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям. Далее в [1] проводится усреднение уравнений движения по углу нутации и даются результаты численного интегрирования полученной усредненной системы для случая линейных диссипативных возмущающих моментов. В отличие от [1] дальше рассматривается случай быстро вращающегося вокруг оси динамической симметрии тела, поэтому порождающим решением является не траектория движения в случае Лагранжа, а некоторое более простое решение. Вследствие этого с помощью метода усреднения в первом и втором приближениях удается получить явные аналитические решения.

В [2], как и в данной работе, предполагается, что угловая скорость достаточно велика, а ее направление близко к оси динамической симметрии тела. В отличие от третьего неравенства (1.2) в [2] считается, что две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья — одного с ним порядка.

Новые переменные P, Q, а также переменные и постоянные r, ψ, θ, φ, K, A, C, M_i^* предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \to 0$. Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1.1) при малом ε, если выполнены условия (1.2), (1.3). Будем пользоваться методом усреднения [3, 4] на интервале времени порядка ε^{-1}.

Отметим, что метод усреднения широко применялся в задачах динамики твердого тела. В [5, 6] этим методом исследован ряд задач динамики, главным образом для тел, обладающих динамической симметрией, в [7] впервые проведено усреднение по движению Эйлера — Пуансо для несимметричного тела, в [1, 2, 6, 8, 9] исследованы возмущенные движения, близкие к движению Лагранжа. Совокупность упрощающих предположений (1.2) или (1.3) позволяет получить в общем случае сравнительно простую схему усреднения и исследовать ряд примеров.

2. Процедура усреднения. Сделаем в системе (1.1) замену переменных (1.3). Сократив обе части первых двух уравнений (1.1) на ε, получим

$$AP^{\cdot}+(C-A)Qr=K\sin\theta\cos\varphi+\varepsilon M_1^* \tag{2.1}$$
$$AQ^{\cdot}+(A-C)Pr=-K\sin\theta\sin\varphi+\varepsilon M_2^*$$
$$Cr^{\cdot}=\varepsilon^2 M_3^*, \quad \psi^{\cdot}=\varepsilon(P\sin\varphi+Q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta$$
$$\theta^{\cdot}=\varepsilon(P\cos\varphi-Q\sin\varphi), \quad \varphi^{\cdot}=r-\varepsilon(P\sin\varphi+Q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta$$

Рассмотрим сначала систему нулевого приближения и положим $\varepsilon=0$ в (2.1). Тогда из последних четырех уравнений (2.1) получим

$$r=r_0, \quad \psi=\psi_0, \quad \theta=\theta_0, \quad \varphi=r_0t+\varphi_0 \tag{2.2}$$

Здесь r_0, ψ_0, θ_0, φ_0 — постоянные, равные начальным значениям соответствующих переменных при $t=0$. Подставим равенства (2.2) в первые два уравнения системы (2.1) при $\varepsilon=0$ и проинтегрируем полученную систему двух линейных уравнений для P, Q. Решение можно представить в виде

$$P=a\cos\gamma_0+b\sin\gamma_0+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(r_0t+\varphi_0)$$
$$Q=a\sin\gamma_0-b\cos\gamma_0+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(r_0t+\varphi_0)$$
$$a=P_0-KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi_0, \quad b=-Q_0+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi_0$$
$$\gamma_0=n_0t, \quad n_0=(C-A)A^{-1}r_0\neq 0, \quad |n_0/r_0|\leqslant 1 \tag{2.3}$$

Здесь P_0, Q_0 — начальные значения новых переменных P, Q, введенных согласно (1.3), а переменная $\gamma=\gamma_0$ имеет смысл фазы колебаний. Система (2.1) существенно нелинейна (частота собственных колебаний переменных P, Q зависит от медленной переменной r), поэтому далее вводится дополнительная переменная γ, определяемая уравнением

$$\gamma^{\cdot}=n,\quad \gamma(0)=0,\quad n=(C-A)A^{-1}r \tag{2.4}$$

При $\varepsilon=0$ имеем $\gamma=\gamma_0=n_0t$ в соответствии с (2.3). Равенства (2.2), (2.3) определяют общее решение системы (2.1), (2.4) при $\varepsilon=0$. Первые два соотношения (2.3) можно, исключая постоянные с учетом (2.2), переписать в эквивалентном виде

$$P=a\cos\gamma+b\sin\gamma+KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\varphi \tag{2.5}$$
$$Q=a\sin\gamma-b\cos\gamma+KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\varphi$$

Разрешим равенства (2.5) относительно a, b:

$$a=P\cos\gamma+Q\sin\gamma-KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin(\gamma+\varphi) \tag{2.6}$$
$$b=P\sin\gamma-Q\cos\gamma+KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos(\gamma+\varphi)$$

Введем новую переменную δ следующим образом:

$$r=r_0+\varepsilon\delta \tag{2.7}$$

Обратимся теперь к системе (2.1) при $\varepsilon\neq 0$ и будем рассматривать соотношения (2.5)—(2.7) как формулы замены переменных, определяющие переход от переменных P, Q, r к переменным a, b, δ (в эти формулы входит также новая переменная γ). Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (2.1), (2.4) от переменных P, Q, r, ψ, θ, φ, γ к новым переменным a, b, δ, ψ, θ, α, γ, где

$$\alpha=\gamma+\varphi \tag{2.8}$$

После преобразований получим более удобную для дальнейшего исследования систему семи уравнений (вместо шести (2.1)):

$$\begin{gathered}
a^{\cdot}=\varepsilon A^{-1}(M_1^0\cos\gamma+M_2^0\sin\gamma)-\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(b-\\
-KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha)+\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(b-2KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha)+\\
+\varepsilon^2KC^{-2}r_0^{-2}M_3^0\sin\theta\sin\alpha\\
b^{\cdot}=\varepsilon A^{-1}(M_1^0\sin\gamma-M_2^0\cos\gamma)+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(a+\\
+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha)-\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(a+\\
+2KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha)-\varepsilon^2KC^{-2}r_0^{-2}M_3^0\sin\theta\cos\alpha\\
\delta^{\cdot}=\varepsilon C^{-1}M_3^0 \qquad\qquad (2.9)\\
\psi^{\cdot}=\varepsilon\operatorname{cosec}\theta(a\sin\alpha-b\cos\alpha)+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}-\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\\
\theta^{\cdot}=\varepsilon(a\cos\alpha+b\sin\alpha)\\
\alpha^{\cdot}=CA^{-1}r_0+\varepsilon CA^{-1}\delta-\varepsilon\operatorname{ctg}\theta(a\sin\alpha-b\cos\alpha)-\\
-\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta+\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta\\
\gamma^{\cdot}=n_0+\varepsilon(C-A)A^{-1}\delta
\end{gathered}$$

Здесь через M_i^0 обозначены функции, полученные из M_i^* (см. (1.3)) в результате сделанной подстановки (2.5)—(2.8):

$$M_i^0(a,b,\delta,\psi,\theta,\alpha,\gamma,t)=M_i^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi,t)\quad(i=1,2,3) \tag{2.10}$$

Следует отметить, что переход от двух переменных P, Q к трем a, b, γ вызван соображениями удобства: при $\varepsilon=0$ система для P, Q линейная, а замена (2.5) — неособая для всех a, b.

Рассматриваемая система уравнений (2.9) может быть приведена к виду

$$x^{\cdot}=\varepsilon F_1(x, y)+\varepsilon^2F_2(x, y), \; x(0)=x_0$$
$$y^{1\cdot}=\omega_1+\varepsilon g_1(x, y)+\varepsilon^2g_2(x, y), \; y^1(0)=y^{10} \qquad (2.11)$$
$$y^{2\cdot}=\omega_2+\varepsilon h_1(x, y)+\varepsilon^2h_2(x, y), \; y^2(0)=y^{20}$$

где вектор-функция $x=(x^1,\ldots,x^5)$ составлена из медленных переменных a, b, δ, ψ, θ; через y^1 и y^2 обозначены быстрые переменные α, γ; ω_1, ω_2 — постоянные фазы, равные $CA^{-1}r_0$ и $(C-A)A^{-1}r_0$ соответственно. Вектор-функции F_i, g_i, h_i $(i=1, 2)$ определяются правыми частями уравнений (2.9).

Двумерный вектор (g_1, h_1) обозначим Z_1. Здесь и далее предполагаем, что возмущающие моменты M_i^* не зависят от t. Так как $M_i^*(i=1, 2, 3)$ периодичны по φ с периодом 2π, то согласно замене (2.5), (2.6), (2.8) функции M_i^0 из (2.10) будут периодическими функциями α и γ с периодами 2π.

Согласно известной процедуре построения асимптотики системы (2.11) [4] будем искать замену переменных

$$x=x^*+\varepsilon u_1(x^*, y^*)+\varepsilon^2u_2(x^*, y^*)+\ldots$$
$$y=y^*+\varepsilon v_1(x^*, y^*)+\varepsilon^2v_2(x^*, y^*)+\ldots$$
$$y=(y^1, y^2), \; x^*=(x^{*1},\ldots,x^{*5}), \; y^*=(y^{*1}, y^{*2})$$

такую, что система (2.11) в новых переменных (x^*, y^*) приняла бы вид

$$x^{*\cdot}=\varepsilon A_1(x^*)+\varepsilon^2A_2(x^*)+\ldots \qquad (2.12)$$
$$y^{*\cdot}=\omega+\varepsilon B_1(x^*)+\varepsilon^2B_2(x^*)+\ldots, \; \omega=(\omega_1, \omega_2)$$

Для этого нужно соответствующим образом выбрать функции u_1, u_2, v_1, v_2, определяющие замену переменных. Известно [4], что уравнения для вектор-функций u_1, v_1 имеют вид

$$\omega\, \partial u_1/\partial y^*=F_1(x^*, y^*)-A_1(x^*)$$
$$\omega\, \partial v_1/\partial y^*=Z_1(x^*, y^*)-B_1(x^*) \qquad (2.13)$$

где $(\partial f/\partial x)$ — матрица частных производных $\|\partial f_i/\partial x^j\|$ $(i, j=1,\ldots,5)$. Функции $A_1(x^*)$, $B_1(x^*)$ определяются по формулам

$$A_1(x^*)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F_1(x^*,y^*)\,dy^{*1}\,dy^{*2}, \quad B_1(x^*)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}Z_1(x^*,y^*)\,dy^{*1}\,dy^{*2} \qquad (2.14)$$

Функция $u_2(x^*, y^*)$ должна быть решением уравнения

$$\frac{\partial u_2}{\partial y^*}\omega=F_2(x^*,y^*)+\frac{\partial F_1}{\partial x^*}u_1+\frac{\partial F_1}{\partial y^*}v_1-\frac{\partial u_1}{\partial x^*}A_1(x^*)-\frac{\partial u_1}{\partial y^*}B_1(x^*)-A_2(x^*) \qquad (2.15)$$

Функция $A_2(x^*)$ определяется по формуле

$$A_2(x^*)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(F_2(x^*,y^*)+\frac{\partial F_1}{\partial x^*}u_1+\frac{\partial F_1}{\partial y^*}v_1-\frac{\partial u_1}{\partial x^*}A_1(x^*)-\frac{\partial u_1}{\partial y^*}B_1(x^*)\right)dy^{*1}\,dy^{*2} \qquad (2.16)$$

Определим усредненную систему уравнений первого приближения для медленных переменных

$$x_1^{*\cdot}=\varepsilon A_1(x_1^*), \quad x_1^*(0)=x_{10} \qquad (2.17)$$

а также систему второго приближения для медленных переменных

$$x_2^{*\cdot}=\varepsilon A_1(x_2^*)+\varepsilon^2 A_2(x_2^*),\quad x_2^*(0)=x_{20} \tag{2.18}$$

и систему уравнений второго приближения для быстрых переменных

$$y_2^{*\cdot}=\omega+\varepsilon B_1(x_1^*(t)),\quad y_2^*(0)=y^0,\quad y^0=(y^{10},\ y^{20}) \tag{2.19}$$

которая сразу интегрируется:

$$y_2^*(t)=\omega t+y^0+\varepsilon\int_0^t B_1(x_1^*(s))\,ds \tag{2.20}$$

Для исследования системы второго приближения (2.18) удобно сделать замену независимой переменной $\tau=\varepsilon t$. Тогда система (2.18) примет вид

$$dx_2^*/d\tau=A_1(x_2^*)+\varepsilon A_2(x_2^*) \tag{2.21}$$

При этом интервал времени $(0,\ T/\varepsilon)$, на котором рассматриваются решения исходной системы (2.11), перейдет в интервал $(0,\ T)$, не зависящий от малого параметра ε. Будем искать решение системы (2.21) в виде

$$x_2^*(\tau)=x^{(1)}(\tau)+\varepsilon x^{(2)}(\tau)+O(\varepsilon^2) \tag{2.22}$$

Подставляя в (2.21) разложение (2.22), получим следующие системы уравнений для вектор-функций $x^{(i)}(\tau)=x_i(t)$ $(\tau=\varepsilon t,\ i=1,\ 2)$:

$$dx^{(1)}/d\tau=A_1(x^{(1)}),\quad x^{(1)}(0)=x_0 \tag{2.23}$$

$$dx^{(2)}/d\tau=A_1'(x^{(1)}(\tau))x^{(2)}+A_2(x^{(1)}(\tau)),\quad x^{(2)}(0)=0 \tag{2.24}$$

где A_1' — матрица частных производных компонент вектор-функций $A_1(x)$: $A_1'(x)=\|\partial A_1^i/\partial x^j\|$. Система (2.23) является линейной, поэтому ее использование в ряде случаев проще, чем исследование системы (2.21).

Обозначим $X(\tau,\ c)$ общее решение системы первого приближения (2.23):

$$X_\tau'=A_1(X),\quad X(0,\ c)=c=x_0 \tag{2.25}$$

Тогда для функций $x^{(1)}(\tau)$, $x^{(2)}(\tau)$ получаются выражения

$$x^{(1)}(\tau)=X(\tau,x_0),\ x^{(2)}(\tau)=\Phi(\tau)\int_0^\tau \Phi^{-1}(\tau_1)\eta(\tau_1)\,d\tau_1 \tag{2.26}$$

Здесь Φ — фундаментальная матрица однородного уравнения, соответствующего второму приближению

$$\Phi(\tau)=\|\partial X(\tau,\ c)/\partial c\|_{c=x_0},\qquad \eta(\tau)=A_2(x^{(1)}(\tau))=A_2(X(\tau,\ x_0))$$

Определим вектор-функции

$$x_\varepsilon^\vee(t)=x^{(1)}(\varepsilon t)+\varepsilon x^{(2)}(\varepsilon t)+\varepsilon u_1\Big(x^{(1)}(\varepsilon t),\ y^0+\omega t+\varepsilon\int_0^t B_1(x^{(1)}(\varepsilon s))\,ds\Big)$$

$$y_\varepsilon^\vee(t)=y^0+\omega t+\varepsilon\int_0^t B_1(x^{(1)}(\varepsilon s))\,ds \tag{2.27}$$

Теорема. Существует такое множество L меры нуль на плоскости $(\omega_1,\ \omega_2)$, что если ω не принадлежит L, то уравнения (2.13), (2.15) разрешимы (а значит, и приведенная выше формальная схема построения функций $x_\varepsilon^\vee(t)$, $y_\varepsilon^\vee(t)$ имеет смысл) и имеют место неравенства

$$|x_\varepsilon^\vee(t)-x(t)|\leqslant C_1\varepsilon^2,\qquad |y_\varepsilon^\vee(t)-y(t)|\leqslant C_1\varepsilon,\qquad t\in[0,\ T\varepsilon^{-1}] \tag{2.28}$$

а постоянная $C_1>0$ не зависит от ε. Доказательство теоремы проводится на основе стандартной процедуры замены переменных метода усреднения

[4], а также арифметической леммы, используемой для оценки «малых знаменателей» [10], возникающих при построении решений уравнений (2.13), (2.15) в виде тригонометрических рядов [4].

Таким образом, построение приближенных решений $x_\varepsilon^\vee(t)$, $y_\varepsilon^\vee(t)$, удовлетворяющих оценке (2.28), сводится к следующей процедуре: решаем с помощью рядов Фурье уравнения (2.13), (2.15), затем по формуле (2.16) строим вектор-функцию $A_2(x^*)$, далее согласно (2.26) определяем решения $x^{(1)}(\tau)$ и $x^{(2)}(\tau)$ уравнений (2.23), (2.24) и, наконец, по формуле (2.27) получаем искомые приближения $x_\varepsilon^\vee(t)$, $y_\varepsilon^\vee(t)$. Далее описанная процедура реализуется для некоторых конкретных систем уравнений динамики твердого тела.

Рассматриваемые дальше примеры возмущений таковы, что разложения в ряд Фурье правых частей уравнений (2.13) и (2.15) содержат лишь конечное число членов. Поэтому условие разрешимости уравнений (2.13) и (2.15) сводится к проверке конечного числа условий вида $\omega_1 m_1+\omega_2 m_2\neq$ $\neq 0$. В рассматриваемых конкретных примерах условия (2.30) принимают вид $CA^{-1}r_0\neq 0$, $(C-A)A^{-1}r_0\neq 0$, а последние условия выполняются всегда в силу исходных предположений. Таким образом, оценка (2.28) справедлива без каких-либо дополнительных предположений относительно частот ω_1, ω_2.

3. Случай тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. В качестве примера развитой методики исследуем движение твердого тела в случае Лагранжа с симметричной полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Тогда моменты сил, действующих на твердое тело, имеют вид [11]:

$$M_1=\rho P_{11}\nu^{-1}A^{-2}[C(A-C)pr^2+k(C-A)r\sin\theta\sin\varphi+kAp\cos\theta] \tag{3.1}$$

$$M_2=\rho P_{11}\nu^{-1}A^{-2}[C(A-C)qr^2+k(C-A)r\sin\theta\cos\varphi+kAq\cos\theta]$$

$$M_3=\rho P_{11}\nu^{-1}A^{-2}[A(C-A)(p^2+q^2)r-kA\sin\theta(p\sin\varphi+q\cos\varphi)]$$

где ρ и ν — плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости, P_{11} — компонента введенного в [11] тензора в системе координат, связанной с телом. Тензор зависит только от формы полости, $P_{ii}>0$, в рассматриваемом случае симметричной полости $P_{11}=P_{22}$. Далее будем считать, что $\nu^{-1}\sim\varepsilon$ (вязкость жидкости велика). Сделав замену (1.3) и отбросив члены порядка $O(\varepsilon^3)$, получим

$$M_1^*=\rho P_{11}A^{-2}[C(A-C)Pr^2+K(C-A)r\sin\theta\sin\varphi] \tag{3.2}$$

$$M_2^*=\rho P_{11}A^{-2}[C(A-C)Qr^2+K(C-A)r\sin\theta\cos\varphi],\qquad M_3^*=0$$

Первые три уравнения системы (2.9) в переменных a, b, δ, ψ, θ, α, γ записываются следующим образом:

$$\begin{gathered} a^\bullet=\rho P_{11}\nu^{-1}A^{-3}C(A-C)r_0^2a-\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(b-KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha)+ \\ +\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(b-2KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha) \\ b^\bullet=\rho P_{11}\nu^{-1}A^{-3}C(A-C)r_0^2b+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(a+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha)- \\ -\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(a+2KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha),\qquad \delta^\bullet=0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Остальные уравнения системы (2.9) не изменяются.

Применим приведенную общую схему построения приближенного решения к конкретной системе (3.3). Вектор-функции A_1 и B_1 определяются по формулам (2.14) и имеют вид

$$\begin{gathered} A_1=\{A_1^{(i)}\}\quad (i=\overline{1,5}),\qquad B_1=\{B_1^{(j)}\}\quad (j=1,2) \\ A_1^{(1)}=\rho P_{11}A^{-3}C(A-C)r_0^2a-KC^{-1}r_0^{-1}b\cos\theta \\ A_1^{(2)}=\rho P_{11}A^{-3}C(A-C)r_0^2b+KC^{-1}r_0^{-1}a\cos\theta \\ A_1^{(3)}=0,\qquad A_1^{(4)}=KC^{-1}r_0^{-1},\qquad A_1^{(5)}=0 \\ B_1^{(1)}=CA^{-1}\delta-KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta,\qquad B_1^{(2)}=(C-A)A^{-1}\delta \end{gathered} \tag{3.4}$$

Четвертая и пятая компоненты вектор-функции $u_1=\{u_1^{(i)}\}$ $(i=\overline{1,5})$ выражаются следующим образом:

$$u_1^{(4)}=-C^{-1}Ar_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta(a\cos\alpha+b\sin\alpha)$$
$$u_1^{(5)}=C^{-1}Ar_0^{-1}(a\sin\alpha-b\cos\alpha) \tag{3.5}$$

Вектор-функция $A_2(x^*)$ после соответствующих вычислений по формуле (2.16) может быть записана в виде

$$A_2(x^*)=\{A_2^{(i)}\} \quad (i=\overline{1,5}) \tag{3.6}$$
$$A_2^{(1)}=KC^{-1}r_0^{-2}b\cos\theta[\delta-{}^1/_2KC^{-2}Ar_0^{-1}(1+\cos\theta)]$$
$$A_2^{(2)}=-KC^{-1}r_0^{-2}a\cos\theta[\delta-{}^1/_2KC^{-2}Ar_0^{-1}(1+\cos\theta)]$$
$$A_2^{(3)}=0,\ A_2^{(4)}=-KC^{-1}\delta r_0^{-2}+K^2C^{-3}Ar_0^{-3}\cos\theta,\ A_2^{(5)}=0$$

Определим решение усредненной системы уравнений первого приближения (2.17) с учетом (3.4) для медленных и быстрых переменных

$$a^{(1)}=\exp(st)(a^0\cos wt-b^0\sin wt)$$
$$b^{(1)}=\exp(st)(b^0\cos wt+a^0\sin wt) \tag{3.7}$$
$$\delta^{(1)}=0,\ \psi^{(1)}=\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+\psi_0,\ \theta^{(1)}=\theta_0$$
$$\alpha^{(1)}=CA^{-1}r_0t-wt+\varphi_0,\quad \gamma^{(1)}=n_0t$$
$$s=\rho P_{11}\nu^{-1}A^{-3}C(A-C)r_0^2,\ w=\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta_0$$

где s, w, a^0, b^0, n_0 определяются согласно формуле (2.3); ψ_0, θ_0, φ_0 — постоянные, равные начальным значениям углов Эйлера при $t=0$.

На основании приведенных формул можно, следуя (2.27), построить компоненты функции $x_\varepsilon^\vee(t)$, отвечающие переменным ψ и θ:

$$\psi_\varepsilon^\vee(t)=\psi_0+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+\varepsilon^2tKC^{-3}Ar_0^{-3}\cos\theta_0-$$
$$-\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta_0(a^{(1)}\cos\alpha^{(1)}+b^{(1)}\sin\alpha^{(1)}) \tag{3.8}$$
$$\theta_\varepsilon^\vee(t)=\theta_0+\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}(a^{(1)}\sin\alpha^{(1)}-b^{(1)}\cos\alpha^{(1)})$$

Полученные формулы удобно записать в виде

$$\psi_\varepsilon^\vee(t)=\psi_0+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+\varepsilon^2tKC^{-3}Ar_0^{-3}\cos\theta_0+R^{(1)}$$
$$R^{(1)}=-\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta_0\exp(st)(a^{02}+b^{02})^{1/2}\sin(\alpha^{(1)}+\beta) \tag{3.9}$$
$$\theta_\varepsilon^\vee(t)=\theta_0+\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}\exp(st)(a^{02}+b^{02})^{1/2}\sin(\alpha^{(1)}-\mu)$$
$$\cos\beta=\sin\mu=b^{(1)}\exp(-st)(a^{02}+b^{02})^{-1/2}$$

В выражении (3.9) для $\theta_\varepsilon^\vee(t)$ слагаемое порядка ε представляет собой произведение экспоненциально убывающего (при $A<C$) или возрастающего (при $A>C$) сомножителя $\exp(st)$, обусловленного наличием полости с вязкой жидкостью, и осциллирующего сомножителя $\sin(\alpha^{(1)}-\mu)$. Величина декремента затухания и характер медленного изменения фазы малых колебаний видны непосредственно из формул (3.7) для $b^{(1)}$, $\alpha^{(1)}$.

Заметим, что в выражении (3.9) для переменной $\psi_\varepsilon^\vee(t)$ слагаемое $R^{(1)}(\varepsilon, t)$ имеет порядок $O(\varepsilon)$ на интервале времени $(0, T\varepsilon^{-1})$. Выражение для угловой скорости прецессии $\omega_p=KC^{-1}r^{-1}$ хорошо известно из приближенной теории гироскопов [12]. Найденное слагаемое $R^{(1)}(\varepsilon, t)$ уточняет эту формулу для рассматриваемой задачи.

4. Случай линейных внешних диссипативных моментов. Рассмотрим возмущенное движение Лагранжа с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Будем считать, что возмущающие моменты M_i $(i=1, 2, 3)$ с учетом (1.3) имеют вид [13]:

$$M_1=-\varepsilon^2I_1P,\ M_2=-\varepsilon^2I_1Q,\ M_3=-\varepsilon^2I_3r,\ I_1,\ I_3>0 \tag{4.1}$$

где I_1, I_3 — некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела.

Первые три уравнения (2.9) для задачи в переменных a, b, δ, ψ, θ, α, γ принимают вид

$$a^{\bullet}=-\varepsilon A^{-1}I_1(a+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha)-\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(b-$$
$$-KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha)+\varepsilon^2A^{-1}I_1KC^{-1}r_0^{-2}\delta\sin\theta\sin\alpha+ \tag{4.2}$$
$$+\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(b-2KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha)-\varepsilon^2KC^{-2}r_0^{-1}I_3\sin\theta\sin\alpha$$
$$b^{\bullet}=-\varepsilon A^{-1}I_1(b-KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha)+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(a+$$
$$+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha)-\varepsilon^2A^{-1}I_1KC^{-1}r_0^{-2}\delta\sin\theta\cos\alpha-$$
$$-\varepsilon^2KC^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(a+2KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha)+$$
$$+\varepsilon^2KC^{-2}r_0^{-1}I_3\sin\theta\cos\alpha,\ \delta^{\bullet}=-\varepsilon C^{-1}I_3r_0-\varepsilon^2C^{-1}I_3\delta$$

Остальные уравнения системы (2.9) остаются неизменными.

Воспользуемся описанной в п. 2 процедурой усреднения для построения приближенного решения системы (4.2). Вектор-функция B_1 определяется (3.4), а компоненты вектор-функции A_1 после вычислений по формулам (2.14) записываются следующим образом:

$$A_1^{(1)}=-A^{-1}I_1a-KC^{-1}r_0^{-1}b\cos\theta,\ A_1^{(2)}=-A^{-1}I_1b+KC^{-1}r_0^{-1}a\cos\theta$$
$$A_1^{(3)}=-C^{-1}I_3r_0,\ A_1^{(4)}=KC^{-1}r_0^{-1},\ A_1^{(5)}=0 \tag{4.3}$$

Четвертая и пятая компоненты вектор-функции u_1 выражаются согласно (3.5).

Отметим, что в данном и предыдущем разделах, как следует из уравнений (2.9), (3.3), (4.2), комбинации вида $(M_1^0\cos\gamma+M_2^0\sin\gamma)$ и $(M_1^0\sin\gamma-M_2^0\cos\gamma)$ не зависят от γ и правые части указанных уравнений зависят лишь от одной быстрой переменной α. Этот факт аналогичен полученным в [1] достаточным условиям возможности усреднения уравнений движения только по углу нутации. В результате упрощается решение уравнений (2.13)

Определим функцию $A_2(x^*)$ по формуле (2.16):

$$A_2^{(1)}=KC^{-1}r_0^{-2}[\delta b\cos\theta-{}^1/_2KC^{-2}r_0^{-1}Ab(3\cos^2\theta-1)-I_1C^{-1}a\cos\theta]$$
$$A_2^{(2)}=-KC^{-1}r_0^{-2}[\delta a\cos\theta-{}^1/_2KC^{-2}r_0^{-1}Aa(3\cos^2\theta-1)+I_1C^{-1}b\cos\theta] \tag{4.4}$$
$$A_2^{(3)}=-C^{-1}I_3\delta,\ A_2^{(4)}=KC^{-1}r_0^{-2}(-\delta+KC^{-2}r_0^{-1}\cos\theta)$$
$$A_2^{(5)}=I_1KC^{-2}r_0^{-2}\sin\theta$$

Решение усредненной системы уравнений первого приближения (2.17) с учетом (4.3) для медленных и быстрых переменных имеет вид

$$a^{(1)}=\exp(-\varepsilon A^{-1}I_1t)(a^0\cos wt-b^0\sin wt)$$
$$b^{(1)}=\exp(-\varepsilon A^{-1}I_1t)(b^0\cos wt+a^0\sin wt)$$
$$\delta^{(1)}=-\varepsilon C^{-1}I_3r_0t,\ \psi^{(1)}=\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+\psi_0,\ \theta^{(1)}=\theta_0$$
$$\alpha^{(1)}=CA^{-1}r_0t-wt-{}^1/_2\varepsilon^2A^{-1}I_3r_0t^2+\varphi_0$$
$$\gamma^{(1)}=n_0t-{}^1/_2\varepsilon^2(C-A)A^{-1}C^{-1}I_3r_0t^2 \tag{4.5}$$

где, как и в формулах (3.7), $w=\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta_0$; величины a^0, b^0, n_0 определяются согласно (2.3); ψ_0, θ_0, φ_0 – постоянные, равные начальным значениям углов Эйлера при $t=0$. Сравнение полученных выражений для медленных переменных $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $\delta^{(1)}$, $\psi^{(1)}$, $\theta^{(1)}$ с учетом (2.7) с соответствующими формулами [2], если формально положить в них $I_3=\varepsilon I_3$, дает совпадение указанных выражений.

Согласно (2.27) и формулам (3.5), (4.4), (4.5) определяются компоненты функции $x_\varepsilon{}^{\vee}(t)$, отвечающие переменным ψ и θ:

$$\psi_\varepsilon{}^{\vee}(t)=\psi_0+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+\varepsilon^2tK^2C^{-3}r_0^{-3}\cos\theta_0+ \tag{4.6}$$
$$+{}^1/_2\varepsilon^3KC^{-2}I_3r_0^{-1}t^2-\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta_0(a^{(1)}\cos\alpha^{(1)}+b^{(1)}\sin\alpha^{(1)})$$
$$\theta_\varepsilon{}^{\vee}(t)=\theta_0+\varepsilon^2tI_1KC^{-2}r_0^{-2}\sin\theta_0+\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}(a^{(1)}\sin\alpha^{(1)}-b^{(1)}\cos\alpha^{(1)})$$

Полученные выражения можно записать следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^\vee(t)=\psi_0+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+S^{(1)} \tag{4.7}$$

$$S^{(1)}=\varepsilon^2 tK^2C^{-3}r_0^{-3}\cos\theta_0+{}^1/_2\varepsilon^3KC^{-2}r_0^{-1}I_3t^2-$$
$$-\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta_0\exp(-\varepsilon A^{-1}I_1t)(a^{02}-b^{02})^{1/2}\sin(\alpha^{(1)}+\sigma)$$

$$\theta_\varepsilon^\vee(t)=\theta_0+\varepsilon^2 tI_1KC^{-2}r_0^{-2}\sin\theta_0+$$
$$+\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}\exp(-\varepsilon A^{-1}I_1t)(a^{02}+b^{02})^{1/2}\sin(\alpha^{(1)}-\lambda)$$

$$\cos\sigma=\sin\lambda=b^{(1)}\exp(\varepsilon A^{-1}I_1t)(a^{02}+b^{02})^{-1/2}$$

В выражении (4.7) для $\theta_\varepsilon^\vee$ слагаемое порядка ε является произведением медленно экспоненциально убывающего сомножителя $\exp(-\varepsilon A^{-1}I_1t)$, обусловленного диссипацией энергии, и осциллирующего сомножителя $\sin(\alpha^{(1)}-\lambda)$. Величина декремента затухания и характер медленного изменения фазы малых колебаний видны из формул (4.5) для $b^{(1)}$, $\alpha^{(1)}$.

В выражении (4.7) для переменной $\psi_\varepsilon^\vee(t)$ слагаемые $S^{(1)}(\varepsilon, t)$ имеют порядок $O(\varepsilon)$ на интервале времени $(0, T\varepsilon^{-1})$.

Полученное выражение $S^{(1)}(\varepsilon, t)$ уточняет для данной задачи формулу угловой скорости прецессии $\omega_p=KC^{-1}r_0^{-1}$, имеющую место в приближенной теории гироскопов.

5. Случай малого постоянного момента. Рассмотрим движение твердого тела в случае Лагранжа под действием момента, постоянного в связанных осях. Возмущающие моменты M_i ($i=1, 2, 3$) в этом случае имеют вид $M_i=\varepsilon^2M_i^*=\varepsilon^2M_i^0=\text{const}$. При построении приближенного решения системы (2.9) с учетом выражения для M_i применим процедуру усреднения, приведенную в п. 2. Вектор-функция B_1 определяется согласно (3.4), а вектор-функция A_1, полученная согласно (2.14), имеет следующие компоненты:

$$A_1^{(1)}=-KC^{-1}r_0^{-1}b\cos\theta,\qquad A_1^{(2)}=KC^{-1}r_0^{-1}a\cos\theta$$
$$A_1^{(3)}=C^{-1}M_3^*,\qquad A_1^{(4)}=KC^{-1}r_0^{-1},\qquad A_1^{(5)}=0 \tag{5.1}$$

Четвертая и пятая компоненты вектор-функции u_1 имеют вид (3.5). Функция $A_2(x^*)$ определяется по формуле (2.16):

$$A_2^{(1)}=KC^{-1}r_0^{-2}b[\cos\theta-{}^1/_2KC^{-2}Ar_0^{-1}(3\cos^2\theta-1)] \tag{5.2}$$
$$A_2^{(2)}=-KC^{-1}r_0^{-2}a[\delta\cos\theta-{}^1/_2KC^{-2}Ar_0^{-1}(3\cos^2\theta-1)]$$
$$A_2^{(3)}=0,\qquad A_2^{(4)}=-KC^{-1}r_0^{-2}\delta+K^2C^{-3}Ar_0^{-3}\cos\theta$$
$$A_2^{(5)}=0$$

Получим решение усредненной системы уравнений первого приближения (2.17) с учетом (5.1) для медленных и быстрых переменных

$$a^{(1)}=a^0\cos wt-b^0\sin wt \tag{5.3}$$
$$b^{(1)}=b^0\cos wt+a^0\sin wt$$
$$\delta^{(1)}=\varepsilon C^{-1}M_3^*t,\qquad \psi^{(1)}=\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+\psi_0,\qquad \theta^{(1)}=\theta_0$$
$$\alpha^{(1)}=CA^{-1}r_0t-wt+{}^1/_2\varepsilon^2A^{-1}M_3^*t^2+\varphi_0$$
$$\gamma^{(1)}=n_0t+{}^1/_2\varepsilon^2(C-A)C^{-1}A^{-1}M_3^*t^2$$

где $w=\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\cos\theta_0$; величины a^0, b^0, n_0 определяются согласно формулам (2.3); ψ_0, θ_0, φ_0 — начальные значения углов Эйлера при $t=0$.

Отметим, что в решение усредненной системы первого приближения (5.3) входит только компонента момента, постоянного в связанных осях, приложенная вдоль оси симметрии M_3^*. Проекции вектора возмущающего момента M_1^*, M_2^* выпадают при усреднении. Сравнение полученных выражений (5.3) для медленных переменных с учетом (2.7) с соответствующими формулами [2], формально полагая в них $M_3^*=\varepsilon M_3^*$, дает совпадение выражений для $a^{(1)}$, $b^{(1)}$, $\delta^{(1)}$, $\psi^{(1)}$, $\theta^{(1)}$. Компоненты функции $x_\varepsilon^\vee(t)$, отвечающие переменным ψ и θ, определяются согласно (2.27) с подстановкой соответствующих выражений (3.5), (5.2), (5.3):

$$\psi_\varepsilon^\vee(t)=\psi_0+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+\varepsilon^2tK^2C^{-3}Ar_0^{-3}\cos\theta_0-$$
$$-{}^1/_2\varepsilon^3KC^{-2}M_3^*r_0^{-2}t^2-\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta_0(a^{(1)}\cos\alpha^{(1)}+b^{(1)}\sin\alpha^{(1)}),\qquad \theta_\varepsilon^\vee(t)=$$
$$=\theta_0+\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}(a^{(1)}\sin\alpha^{(1)}-b^{(1)}\cos\alpha^{(1)})$$

Полученные выражения удобно записать в виде

$$\psi_\varepsilon^\vee(t)=\psi_0+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}t+V^{(1)}$$

$$V^{(1)}=\varepsilon^2tK^2C^{-3}Ar_0^{-3}\cos\theta_0-{}^1/_2\varepsilon^3KC^{-2}M_3{}^*r_0^{-2}t^2-$$

$$-\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}(a^{02}+b^{02})^{1/2}\sin(\alpha^{(1)}+\varkappa)$$

$$\theta_\varepsilon^\vee(t)=\theta_0+\varepsilon C^{-1}Ar_0^{-1}(a^{02}+b^{02})^{1/2}\sin(\alpha^{(1)}-\chi)$$

$$\cos\varkappa=\sin\chi=b^{(1)}(a^{02}+b^{02})^{-1/2}$$

Здесь в выражении для $\theta_\varepsilon^\vee$ ограниченное осциллирующее слагаемое содержит ненулевые начальные данные a^0, b^0. Полученное слагаемое $V^{(1)}$, так же как и в предыдущих примерах, дополняет известное из приближенной теории гироскопов выражение для угловой скорости прецессии $\omega_p=KC^{-1}r_0^{-1}$.

Заметим, что если ограничиться построением первого приближения, то в формулы для углов нутации и прецессии не войдут параметры возмущающих моментов, и поэтому влияние возмущений на регулярную прецессию тела не будет учтено. Таким образом, построение второго приближения является в данном случае существенным.

Авторы выражают благодарность Ф. Л. Черноусько и Л. Д. Акуленко за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 771—778.
2. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 3—10.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
4. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ. 1971. 507 с.
5. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. 1965. 416 с.
6. *Ярошевский В. А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение. 1978. 167 с.
7. *Черноусько Ф. Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474—483.
8. *Кузмак Г. Е.* Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука. 1970. 347 с.
9. *Иващенко Б. П.* О движении симметричного волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Докл. АН УССР. Сер. А. 1976. № 9. С. 794—797.
10. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978. 304 с.
11. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, заполненными жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 6. С. 1049—1070.
12. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука. 1969. 332 с.
13. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука. 1985. 286 с.

Москва, Одесса

Поступила в редакцию 15.VI.1986