

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ РАВНОМЕРНО ПРИГОДНОГО РЕШЕНИЯ
ДЛЯ ВОЛНЫ РЕЛЕЯ В СЛАБО АНИЗОТРОПНОЙ
УПРУГОЙ СРЕДЕ

МАКЕЕВ В. М., РОССИХИН Ю. А.

При исследовании поверхностных волн в кристаллах различной симметрии методом возмущений вводятся разные малые параметры: углы, на которые отклоняются плоскости и направления распространения поверхностной волны от избранных плоскостей и направлений [1], параметр, учитывающий искажение упругой симметрии кристалла [2], величина, характеризующая отклонение анизотропных упругих коэффициентов от изотропных (материалы с такими свойствами носят название слабо анизотропных) [3, 4].

В данной работе методом малого параметра изучается поведение поверхностной волны в упругой слабо анизотропной среде. Показано, что в такой среде существуют особые направления, в окрестности которых прямое разложение становится непригодным. Для построения равномерно пригодного решения применяется метод растянутых параметров.

1. Предположим, что поверхностная волна распространяется вдоль ненапряженной границы $y_1=0$ упругого анизотропного полупространства $y_1>0$.

Система дифференциальных уравнений и граничных условий на свободной поверхности имеет вид

$$\lambda_{ijkl} u_{k,jl} = \rho u_{i,tt} \quad (1.1)$$

$$\lambda_{ijkl} u_{k,l} = 0 \quad (1.2)$$

где λ_{ijkl} — тензор модулей упругости, u_i — вектор перемещений, ρ — плотность, t — время; запятая после нижнего индекса означает дифференцирование по времени или координате.

Решение уравнений (1.1) будем искать в виде [5]:

$$u_i = A_i \exp(-i\omega t + y_k v_k) \quad (1.3)$$

$$v_1 = -\omega(g^{-2} - c^{-2})^{1/2}, \quad v_2 = i\omega g^{-1}, \quad v_3 = 0$$

откуда следует, что гармоническая волна распространяется по направлению оси y_2 со скоростью g и затухает с глубиной при $g < c$, где c — скорость объемной волны, ω — частота.

Предположим, что материал пространства слабо анизотропен [3]:

$$\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijkl}^{(0)} + \varepsilon \mu \lambda_{ijkl}^{(1)} \quad (1.4)$$

где $\lambda_{ijkl}^{(0)}$ — компоненты тензора упругости изотропного материала, $\lambda_{ijkl}^{(1)}$ — компоненты некоторого тензора четвертого ранга, ε — малый параметр, μ — модуль сдвига.

Представим характеристики волны в виде рядов по ε и разложим вектор амплитуды по трем взаимно ортогональным векторам $\mathbf{v}^{(0)}$, \mathbf{e}^1 , \mathbf{e}^2 , т. е.

$$A_i = \sum_{k=0}^{\infty} A_i^{(k)} \varepsilon^k, \quad c = \sum_{k=0}^{\infty} c^{(k)} \varepsilon^k, \quad g = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)} \varepsilon^k \quad (1.5)$$

$$A_i^{(h)} = \hbar^{(h)} v_i^{(0)} + p^{(h)} e_i^1 + q^{(h)} e_i^2 \quad (1.6)$$

$$v_1^{(0)} = -\omega (g^{(0)-2} - c^{(0)-2})^{1/2}, \quad v_2^{(0)} = i\omega g^{(0)-1}, \quad v_3^{(0)} = 0 \\ e_1^1 = e_2^1 = 0, \quad e_3^1 = v_2^{(0)}, \quad e_1^2 = v_2^{(0)}, \quad e_2^2 = -v_1^{(0)}, \quad e_3^2 = 0$$

Для n -го приближения разложения компонент вектора \mathbf{v} по степеням ε с учетом (1.5), (1.6) имеем

$$v_1^{(n)} = -\omega^2 v_1^{(0)-1} [g^{(n)} g^{(0)-3} - c^{(n)} c^{(0)-3} + R^{(n)}(c^{(h)}) - R^{(n)}(g^{(h)})] \\ v_2^{(n)} = i\omega g^{(0)-1} [-g^{(n)} g^{(0)-1} + Q^{(n)}(g^{(h)})], \quad v_3^{(n)} = 0 \quad (1.7)$$

Здесь $R^{(n)}(c^{(h)})$, $R^{(n)}(g^{(h)})$, $Q^{(n)}(g^{(h)})$ — многочлены соответственно от $c^{(0)}, \dots, c^{(n-1)}$ и $g^{(0)}, \dots, g^{(n-1)}$.

Из нулевого приближения уравнений (1.1) получаем, что скорость объемной волны принимает значения $c_{(3)}^{(0)} = (\lambda + 2\mu)^{1/2} \rho^{-1/2}$ (скорость продольной волны), $c^{(0)} = \mu^{1/2} \rho^{-1/2}$ (скорость двух слившихся поперечных волн). На продольной волне $p_{(3)}^{(0)} = q_{(3)}^{(0)} = 0$, $h_{(3)}^{(0)}$ — произвольная постоянная. На поперечных волнах $h^{(0)} = 0$, $p^{(0)}$, $q^{(0)}$ удовлетворяют системе линейных уравнений, которые получаются путем свертывания первого приближения (1.1) с e_i^1 , e_i^2 :

$$G_1(p^{(0)}, q^{(0)}) = (S_{ih}^{(1,0)} e_i^1 e_k^1 - 2c^{(1)} \omega^4 c^{(0)-3} g^{(0)-2}) p^{(0)} + S_{ih}^{(1,0)} e_i^1 e_k^2 q^{(0)} = 0 \quad (1.8)$$

$$G_2(p^{(0)}, q^{(0)}) = S_{ih}^{(1,0)} e_i^2 e_k^1 p^{(0)} + (S_{ih}^{(1,0)} e_i^2 e_k^2 - 2c^{(1)} \omega^4 c^{(0)-5}) q^{(0)} = 0$$

Условие совместности системы (1.8) определяет два значения $c^{(1)}$:

$$c_{(\alpha)}^{(1)} = 1/4 g^{(0)2} c^{(0)5} \omega^{-4} S_{ih}^{(1,0)} (e_i^1 e_k^1 c^{(0)-2} + e_i^2 e_k^2 g^{(0)-2}) \pm \Delta^{1/2} \quad (1.9)$$

$$\Delta = 1/16 g^{(0)2} c^{(0)8} \omega^{-8} \{g^{(0)2} c^{(0)2} [S_{ih}^{(1,0)} (e_i^1 e_k^1 c^{(0)-2} - e_i^2 e_k^2 g^{(0)-2})]^2 + \\ + 4 (S_{ih}^{(1,0)} e_i^2 e_k^1)^2\}, \quad S_{ih}^{(1,0)} = \lambda_{ijkl} v_j^{(0)} v_l^{(0)} \quad (\alpha=1,2)$$

Здесь и далее верхний знак соответствует $\alpha=1$, нижний — $\alpha=2$.

Сворачивая $(n+1)$ -е приближение уравнений (1.1) с e_i^1 , e_i^2 , получаем с учетом (1.3) — (1.6) для квазипоперечных волн

$$G_1(p_{(\alpha)}^{(n)}, q_{(\alpha)}^{(n)}) = f_{1(\alpha)}^{(n+1)}, \quad G_2(p_{(\alpha)}^{(n)}, q_{(\alpha)}^{(n)}) = f_{2(\alpha)}^{(n+1)} \quad (1.10)$$

$$f_{j(\alpha)}^{(n+1)} = \left[h_{(\alpha)}^{(n)} L_{ih(\alpha)}^{(1)} v_k^{(0)} + \sum_{s=2}^{n+1} L_{ih(\alpha)}^{(s)} A_{k(\alpha)}^{(n+1-s)} \right] e_i^j \quad (j=1,2)$$

$$L_{ih(\alpha)}^{(s)} = -\mu^{-1} \lambda_{ijkl}^{(0)} \sum_{m=0}^s v_{j(\alpha)}^{(m)} v_{l(\alpha)}^{(s-m)} - \lambda_{ijkl}^{(1)} \sum_{m=0}^{s-1} v_{j(\alpha)}^{(m)} v_{l(\alpha)}^{(s-1-m)}$$

$$h_{(\alpha)}^{(n)} = \omega^{-4} \kappa^{-1} c^{(0)4} \sum_{s=1}^n L_{ih(\alpha)}^{(s)} A_{k(\alpha)}^{(n-s)} v_i^{(0)}, \quad \kappa = (c_{(3)}^{(0)2} c^{(0)-2} - 1)$$

Из (1.9) следует, что правые части системы (1.10) должны удовлетворять уравнению

$$f_{1(\alpha)}^{(n+1)} a_{(\alpha)} + f_{2(\alpha)}^{(n+1)} = 0, \quad a_{(\alpha)} = -S_{ih}^{(1,0)} e_i^2 e_k^1 (S_{ih}^{(1,0)} e_i^1 e_k^1 - 2c_{(\alpha)}^{(1)} \omega^4 g^{(0)-2} c^{(0)-3})^{-1} \quad (1.11)$$

и амплитуды $p^{(n)}$ и $q^{(n)}$ связаны между собой соотношениями

$$p_{(\alpha)}^{(n)} = a_{(\alpha)} q_{(\alpha)}^{(n)} + \Phi_{(\alpha)}^{(n)}, \quad \Phi_{(\alpha)}^{(n)} = -a_{(\alpha)} (S_{ih}^{(1,0)} e_i^2 e_k^1)^{-1} f_{1(\alpha)}^{(n+1)} \quad (1.12)$$

Здесь и в дальнейшем нижние индексы 3 и $\alpha=1, 2$, стоящие в скобках, относятся в нулевом приближении к продольной и двум слившимся поперечным волнам соответственно, а в остальных приближениях — к квази-

продольной и двум отдельным квазиоперечным волнам. При этом индексы $\alpha=1, 2$ ставятся только у тех величин, которые принимают различные значения на квазиоперечных объемных волнах.

Амплитуда квазипродольной волны с учетом (1.5), (1.6) вычисляется по формулам

$$A_{i(3)}^{(n)} = \sum_{s=0}^n \beta_i^{(s)} h_{(3)}^{(n-s)}, \quad \beta_i^{(s)} = \kappa^{-1} c_{(3)}^{(0)2} \omega^{-2} \sum_{m=1}^s L_{ih(3)}^{(m)} \beta_h^{(s-m)}$$

$$s=1, 2, \dots, n, \quad \beta_i^{(0)} = v_{i(3)}^{(0)} \quad (1.13)$$

Сворачивая выражение (1.13) с $v_{i(3)}^{(0)}$, получаем в силу произвольности коэффициентов $h_{(3)}^{(n-s)}$ уравнения для определения

$$\beta_i^{(s)} v_{i(3)}^{(0)} = 0 \quad (1.14)$$

Используем граничные условия (1.2). Подставляя (1.3) в (1.2) и учитывая (1.4)–(1.6), для n -го приближения находим

$$h_{(3)}^{(n)} M_1 - 2ig^{(0)-1} (q_{(1)}^{(n)} + q_{(2)}^{(n)}) M_2^{1/2} = F_1^{(n)} \omega^{-2} \quad (1.15)$$

$$-2tg^{(0)-1} h_{(3)}^{(n)} M_3^{1/2} - (q_{(1)}^{(n)} + q_{(2)}^{(n)}) M_1 = F_2^{(n)} \omega^{-2}, \quad -ig^{(0)-1} (p_{(1)}^{(n)} + p_{(2)}^{(n)}) M_2^{1/2} = F_3^{(n)} \omega^{-2}$$

$$M_1 = 2g^{(0)-2} - c^{(0)-2}, \quad M_2 = g^{(0)-2} - c^{(0)-2}, \quad M_3 = g^{(0)-2} - c_{(3)}^{(0)-2}$$

$$F_j^{(n)} = - \sum_{m=1}^3 \sum_{s=1}^n M_{jh(m)}^{(s)} A_{h(m)}^{(n-s)} - \mu^{-1} \lambda_{ijkl}^{(0)} \left[\sum_{s=1}^n \beta_h^{(s)} h_{(3)}^{(n-s)} v_{l(3)}^{(0)} + \right.$$

$$\left. + (h_{(1)}^{(n)} + h_{(2)}^{(n)}) v_k^{(0)} v_l^{(0)} \right], \quad M_{jh(m)}^{(s)} = \mu^{-1} \lambda_{ijkl}^{(0)} v_{l(m)}^{(s)} + \lambda_{ijkl}^{(1)} v_{l(m)}^{(s-1)}$$

Условие совместности нулевого приближения (1.15)

$$M_1^2 - 4g^{(0)-2} M_2^{1/2} M_3^{1/2} = 0 \quad (1.16)$$

определяет одно значение $g^{(0)} < c^{(0)}$, равное скорости волны Релея в изотропной упругой среде.

Решение системы (1.12), (1.15) с учетом (1.16) дает следующие выражения для n -го приближения амплитуд квазиоперечных волн:

$$h_{(\alpha)}^{(n)} = \sum_{k=1}^n h_{(\alpha)}^k h_{(3)}^{(n-k)}, \quad p_{(\alpha)}^{(n)} = \sum_{k=0}^n p_{(\alpha)}^k h_{(3)}^{(n-k)}, \quad q_{(\alpha)}^{(n)} = \sum_{k=0}^n q_{(\alpha)}^k h_{(3)}^{(n-k)} \quad (1.17)$$

$$A_{i(\alpha)}^{(n)} = \sum_{k=0}^n A_{i(\alpha)}^k h_{(3)}^{(n-k)}, \quad \Phi_{(\alpha)}^{(n)} = \sum_{k=1}^n \Phi_{(\alpha)}^k h_{(3)}^{(n-k)}, \quad F_j^{(n)} = \sum_{k=1}^n F_j^k h_{(3)}^{(n-k)}$$

$$q_{(\alpha)}^k = d_{(\alpha)}^k (a_{(1)} - a_{(2)})^{-1}, \quad p_{(\alpha)}^k = a_{(\alpha)} q_{(\alpha)}^k + \Phi_{(\alpha)}^k$$

$$d_{(\alpha)}^k = \pm (ig^{(0)} F_3^k M_2^{-1/2} + a_{(\alpha+1)} F_2^k M_1^{-1}) \mp (\Phi_{(1)}^k + \Phi_{(2)}^k) \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$d_{(\alpha)}^0 = \pm i\gamma a_{(\alpha+1)}, \quad \gamma = 2M_3^{1/2} M_1^{-1} g^{(0)-1}, \quad a_{(3)} = a_{(1)}$$

Выражение (1.11) преобразуется в соотношение, которое служит уравнением для определения величин $c_{(\alpha)}^{(n+1)}$:

$$W_{(\alpha)}^{(n+1)} + a_{(\alpha)} (a_{(\alpha)} - a_{(\alpha+1)}) g^{(0)-2} \Omega_{(\alpha)}^{(n+1)} q_{(\alpha)}^0 = 0 \quad (1.18)$$

$$W_{(\alpha)}^{(n+1)} = h_{(\alpha)}^n L_{ih(\alpha)}^{(1)} v_h^{(0)} v_{i(\alpha)} + \sum_{s=2}^n L_{ih(\alpha)}^{(s)} A_{h(\alpha)}^{n-s+1} v_{i(\alpha)} -$$

$$- \left[S_{ih(\alpha)}^{(1,n)} v_{i(\alpha)} v_{h(\alpha)} + \kappa \sum_{s=1}^n (e_j^2 v_j^{(s)}) (e_i^2 v_i^{(n+1-s)}) \right] q_{(\alpha)}^0, \quad v_{i(\alpha)} = a_{(\alpha)} e_i^1 + e_i^2$$

$$S_{ih(\alpha)}^{(1,n)} = \lambda_{ijhl}^{(1)} (v_j^{(0)} v_l^{(n)} + \dots + v_j^{(n)} v_l^{(0)}), \quad \Omega_{(\alpha)}^{(n+1)} = \sum_{s=0}^{n+1} v_j^{(s)} v_j^{(n+1-s)} \omega^2$$

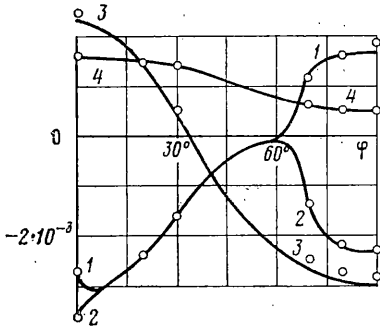
Заметим, что в соотношение (1.18) не входит $(n+1)$ -е приближение скорости поверхностной волны $g^{(n+1)}$, а n -е приближение $g^{(n)}$ в силу линейной зависимости системы (1.15) определяется из уравнения

$$F_1^n M_1 - 2ig^{(0)-1} F_2^n M_2^{1/2} = 0 \quad (1.19)$$

Первые n приближений решения (1.17)–(1.19) определяют поверхностную волну как совокупность трех типов волн с результирующим перемещением

$$u_i = \sum_{l=1}^3 \left[\sum_{h=0}^n A_{i(l)}^{(h)} \varepsilon^h \right] \exp \left(-i\omega t + y_j \sum_{h=0}^n v_j^{(h)} \varepsilon^h \right) \quad (1.20)$$

Поскольку $A_{i(l)}^{(0)}, \dots, A_{i(l)}^{(n)}$ зависят от $h_{(3)}^{(0)}, \dots, h_{(3)}^{(n)}$, то u_i находятся с точностью до $(n+1)$ произвольной постоянной (в самой постановке задачи отсутствует причина, вызывающая распространение поверхностной волны).



На фигуре представлены результаты расчетов относительных скоростей

$$c_{(l)}^* = \text{Re}(c_{(l)} - c_{(l)}) / c^{(0)}, \quad g^* = (g^{(0)} - g) / c^{(0)}$$

парциальных и поверхностных волн в кристалле вольфрама методом малого параметра (сплошные линии) и итерационным методом (светлые точки) для плоскости $\psi = \pi/4$, $\theta = \pi/2$ в зависимости от угла φ . Оси y_i расположены относительно осей симметрии кристалла x_i

следующим образом: ось y_1 лежит в плоскости, перпендикулярной линии узлов, и образует с осью x_1 угол θ , ось y_3 направлена под углом φ к линии узлов, которая в свою очередь составляет угол ψ с осью x_3 . Цифрами 1–4

отмечены соответственно графики величин $c_{(1)}^*$, $c_{(2)}^*$, $5 \cdot 10^{-2} c_{(3)}^*$, g^* . При вычислениях приняты следующие значения упругих постоянных: $\lambda_{1111} = 5126$ кбар, $\lambda_{1122} = 2058$ кбар, $\lambda_{1212} = 1527$ кбар, $\lambda_{1111}^{(1)} = \lambda_{1122}^{(1)} = 0$, $\rho = 18,7$ г/см³ [6]. В этом случае $c^{(0)} = 2864$ м/с, $c_{(3)}^{(0)} = 5236$ м/с, $g^{(0)} = 2650$ м/с. Из графиков видно, что результаты расчетов двумя методами хорошо согласуются друг с другом.

2. Для некоторых направлений распространения поверхностной волны вдоль плоскости $y_1 = 0$ волновые характеристики не определяются из общих соотношений (1.17)–(1.19). Такие особые направления удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\Delta \neq 0, \quad S_{ih}^{(1,0)} e_i^2 e_h^1 = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta = 0, \quad S_{ih}^{(1,0)} e_i^2 e_h^1 \neq 0 \quad (2.2)$$

$$\Delta = 0, \quad S_{ih}^{(1,0)} e_i^2 e_h^1 = 0 \quad (2.3)$$

φ_0	θ_0	ψ_0	ω_1	η_1	φ_*	θ_*
28°54'	45°	0	0.464	0	28°47'	45°
20°05'	56°42'	12°	0.921	-0.830	19°51'	56°55'
12°16'	68°30'	24°	0.584	-1.054	12°07'	68°47'
7°26'	80°34'	36°	-0.013	-0.741	7°26'	80°46'
6°16'	90°	45°	-0.325	0	6°21'	90°

Можно показать, что по направлениям, удовлетворяющим условию (2.1), распространяется двухпарциальная поверхностная волна вертикальной поляризации, т. е. в этом случае поверхностная волна ведет себя как волна Релея в изотропной упругой среде. В кубическом кристалле эти направления лежат на поверхностях $y_i=0$, перпендикулярных плоскостям симметрии по линиям их пересечения.

Рассмотрим особые направления, удовлетворяющие условию (2.2) для кристалла вольфрама. Численные расчеты показывают, что такие направления образуют непрерывные конические поверхности. Некоторые значения углов $\varphi_0, \theta_0, \psi_0, \varphi_* = \varphi_0 + \omega_1 \varepsilon, \theta_* = \theta_0 + \eta_1 \varepsilon, \psi_* = \psi_0$, определяющие особые направления в нулевом и первом приближениях, приведены в таблице (уточняющие коэффициенты ω_1, η_1 находятся из системы уравнений (2.13)).

Из (1.9), (1.11) следует, что по направлениям (2.2):

$$c_{(1)}^{(1)} = c_{(2)}^{(1)} = 1/4 g^{(0)2} c^{(0)5} \omega^{-4} S_{ik}^{(1,0)} (e_i^1 e_k^1 c^{(0)-2} + e_i^2 e_k^2 g^{(0)-2})$$

$$a_{(1)} = a_{(2)} = a = -2c^{(0)-2} S_{ik}^{(1,0)} e_i^2 e_k^1 [S_{ik}^{(1,0)} (e_i^1 e_k^1 c^{(0)-2} - e_i^2 e_k^2 g^{(0)-2})]^{-1}$$

В окрестности особого направления $a_{(1)}, a_{(2)} \rightarrow a$ и нулевые приближения амплитуд $P_{(\alpha)}^0, Q_{(\alpha)}^0$ имеют порядок $(a_{(1)} - a_{(2)})^{-1}$ (см. (1.17)). Величины $W_{(\alpha)}^{(2)}$ в уравнении (1.18), а следовательно, и c имеют порядок $(a_{(1)} - a_{(2)})^{-1}$. Можно показать, что $P_{(\alpha)}^1, Q_{(\alpha)}^1$, а также приближения скоростей $c_{(\alpha)}^{(3)}$ имеют уже порядок $(a_{(1)} - a_{(2)})^{-3}$ и т. д. Поэтому вблизи направления, удовлетворяющего условию (2.2), с ростом порядка приближения нарастает сингулярность решения, т. е. приведенное в п. 1 прямое разложение становится непригодным и необходимо провести регуляризацию решения.

Для регуляризации решения в окрестности особого направления, определяемого углами $\varphi_0, \theta_0, \psi_0$, применяется метод растянутых параметров [7]

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(\varphi_0, \theta_0, \psi_0) \varepsilon^k, \quad \Delta\tau = \tau - \varphi_0 \quad (2.4)$$

$$\theta = \theta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(\varphi_0, \theta_0, \psi_0) \varepsilon^k, \quad \psi = \psi_0$$

Разлагая компоненты $\lambda_{ijkl}^{(1)}$ в ряд Тейлора по степеням $\varphi - \varphi_0, \theta - \theta_0$, получаем с учетом преобразования (2.4)

$$\lambda_{ijkl}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r_{ijkl}^{(n,m)} (\Delta\tau)^m \varepsilon^{n-1}, \quad (2.5)$$

$$r_{ijkl}^{(1,0)} = \lambda_{ijkl}^{(1)0}, \quad r_{ijkl}^{(1,1)} = \lambda_{ijkl,\varphi}^{(1)0}$$

$$r_{ijkl}^{(s,0)} = \lambda_{ijkl,\varphi}^{(s)0} \omega_{s-1} + \lambda_{ijkl,\theta}^{(s)0} \eta_{s-1} + Q_s,$$

$$r_{ijkl}^{(s,1)} = \lambda_{ijkl,\varphi\varphi}^{(s)0} \omega_{s-1} + \lambda_{ijkl,\theta\varphi}^{(s)0} \eta_{s-1} + R_s$$

Здесь Q_s, R_s — многочлены от $\omega_1, \dots, \omega_{s-2}, \eta_1, \dots, \eta_{s-2}$ ($s=3, 4, 5, \dots$). Величины с индексом нуль вверху без скобок вычислены по направлению $\varphi_0, \theta_0, \psi_0, R_2 = Q_2 = 0$.

Вместо формулы (1.9) в окрестности особого направления имеем

$$c_{(\alpha)}^{(4)} = -1/4 c^{(0)5} \omega^{-4} R_{ik}^{(1,0,0)} (a^2 e_i^1 e_k^1 - e_i^2 e_k^2) \pm \Delta^{1/2} + O(\Delta\tau) \quad (2.6)$$

$$\Delta = 1/8 \omega^{-8} c^{(0)10} R_{ik}^{(1,0,0)} (a^2 e_i^1 e_k^1 + e_i^2 e_k^2) R_{ik}^{(1,1,0)} v_i v_k \Delta\tau + o(\Delta\tau)$$

$$R_{ik}^{(n,m,p)} = r_{ijkl}^{(n,m)} \sum_{s=0}^p v_j^{(s)} v_l^{(p-s)}, \quad v_i = a e_i^1 + e_i^2$$

Как показывают расчеты

$$R_{ik}^{(1,1,0)} v_i v_k \neq 0, \quad \lambda_{ijkl,0}^{(1)0} v_i v_k v_j v_l^{(0)} \neq 0 \quad (2.7)$$

Из (2.6), (2.7) следует, что в окрестности особого направления коэффициент $a_{(\alpha)}$ с точностью до $\Delta\tau$ определяется выражением

$$a_{(\alpha)} = a + \delta a_{(\alpha)}, \quad \delta a_{(\alpha)} = \pm 2c^{(0)-5} \Delta^{1/2} (R_{ik}^{(1,1,0)} e_i^2 e_k^1)^{-1} \quad (2.8)$$

Прямое разложение системы (1.1), (1.2) с учетом (1.3), (1.6) и (2.5) дает следующие выражения для амплитуд квазипоперечных волн в окрестности особого направления:

$$h_{(\alpha)}^{(n)} = \sum_{k=1}^n h_{(\alpha)}^k h_{(3)}^{(n-k)}, \quad p_{(\alpha)}^{(n)} = \sum_{k=0}^n p_{(\alpha)}^k h_{(3)}^{(n-k)}, \quad q_{(\alpha)}^{(n)} = \sum_{k=0}^n q_{(\alpha)}^k h_{(3)}^{(n-k)} \quad (2.9)$$

$$A_{i(\alpha)}^{(n)} = \sum_{k=0}^n A_{i(\alpha)}^k h_{(3)}^{(n-k)}, \quad \Phi_{(\alpha)}^{(n)} = \sum_{k=1}^n \Phi_{(\alpha)*}^k h_{(3)}^{(n-k)}, \quad F_{j*}^{(n)} = \sum_{k=1}^n F_{j*}^k h_{(3)}^{(n-k)}$$

$$q_{(\alpha)}^k = d_{(\alpha)*}^k (a_{(1)} - a_{(2)})^{-1}, \quad p_{(\alpha)}^k = a_{(\alpha)} q_{(\alpha)}^k + \Phi_{(\alpha)*}^k, \quad d_{(\alpha)*}^0 = \pm i \gamma a_{(\alpha+1)}$$

$$d_{(\alpha)*}^k = \pm (i g^{(0)} F_{3*}^k M_2^{-1/k} + a_{(\alpha+1)} F_{2*}^k M_1^{-1}) \mp (\Phi_{(1)*}^k + \Phi_{(2)*}^k),$$

$$h_{(\alpha)}^k = \kappa^{-1} c^{(0)4} \sum_{s=1}^k L_{ij(\alpha)*}^{(s)} A_{j(\alpha)*}^{k-s} v_i^{(0)} \omega^{-4}$$

Здесь $\Phi_{(\alpha)}^k$, F_{j*}^k вычисляются по формулам, аналогичным (1.12), (1.15), если в последних операторы $L_{ik(\alpha)}^{(m)}$, $M_{jk(\alpha)}^{(m)}$ заменить на

$$L_{ik(\alpha)*}^{(m)} = -\mu^{-1} \lambda_{ijkl}^{(0)} \sum_{s=0}^m v_j^{(s)} v_l^{(m-s)} - \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=1}^m R_{ik(\alpha)}^{(s,r,m-s)} (\Delta\tau)^r,$$

$$M_{jk(\alpha)*}^{(m)} = \mu^{-1} \lambda_{ijkl}^{(0)} v_l^{(m)} + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=1}^m \Gamma_{ijkl}^{(s,r)} v_l^{(m-s)} (\Delta\tau)^r$$

Параметры квазипродольной волны вычисляются из соотношений, аналогичных (1.13), (1.14), если в последних операторы $L_{ik(\alpha)}^{(m)}$ заменим на $L_{ik(\alpha)*}^{(m)}$.

Методом математической индукции можно показать, что в окрестности особого направления

$$\Phi_{(\alpha)*}^{n-1} = O[(a_{(1)} - a_{(2)})^{-1}], \quad \Phi_{(1)*}^{n-1} + \Phi_{(2)*}^{n-1} = O(1), \quad F_{j*}^{n-1} = O(1), \quad c_{(1)}^{(n)} - c_{(2)}^{(n)} = O(\Delta\tau^{1/2}) \quad (2.10)$$

Из (2.9), (2.10) следует, что сингулярность решения не нарастает с ростом порядка приближения. Более того, так как сингулярности амплитуд квазипоперечных волн имеют разные знаки, то выражения (1.20) для перемещений вообще не содержат особенностей.

Используя формулы (2.9), с учетом (2.10) можно получить уравнения для определения параметров преобразования (2.4). Для этого спроектируем $(n+1)$ -е прибли-

жение уравнений движения (1.1) для квазипоперечных волн в растянутых параметрах на векторы e^1 и e^2

$$G_1(p(\alpha), q(\alpha)) = f_1^{(n+1)}, \quad G_2(p(\alpha), q(\alpha)) = f_2^{(n+1)} \quad (2.11)$$

$$f_1^{(n+1)} = \left\{ \sum_{s=2}^{n+1} L_{1(\alpha)}^{(s)} [a_{(\alpha)} d_{(\alpha)}^{n+1-s} + \Phi_{(\alpha)}^{n+1-s} (a_{(1)} - a_{(2)})] + \sum_{s=2}^{n+1} L_{2(\alpha)}^{(s)} d_{(\alpha)}^{n+1-s} - \right.$$

$$\left. - R_{ih}^{(n+1,0,0)} v_{k(\alpha)} e_i^1 d_{(\alpha)}^0 - g^{(0)-2} a_{(\alpha)} \Omega_{(\alpha)}^{(n+1)} d_{(\alpha)}^0 \right\} (a_{(1)} - a_{(2)})^{-1}$$

$$f_2^{(n+1)} = \left\{ \sum_{s=2}^{n+1} L_{3(\alpha)}^{(s)} [a_{(\alpha)} d_{(\alpha)}^{n+1-s} + \Phi_{(\alpha)}^{n+1-s} (a_{(1)} - a_{(2)})] + \sum_{s=2}^{n+1} L_{4(\alpha)}^{(s)} d_{(\alpha)}^{n+1-s} - \right.$$

$$\left. - R_{ih}^{(n+1,0,0)} v_{k(\alpha)} e_i^2 d_{(\alpha)}^0 + c^{(0)2} \Omega_{(\alpha)}^{(n+1)} d_{(\alpha)}^0 \right\} (a_{(1)} - a_{(2)})^{-1}$$

Здесь $L_k^{(s)}$ — многочлены от компонент векторов v , e^1 , e^2 , имеющие порядок $O(1)$. Уравнение $f_1^{(n+1)} a_{(\alpha)} + f_2^{(n+1)} = 0$, выражающее линейную зависимость системы (2.11), с учетом (2.8) преобразуется к виду

$$R_1^{n+1} - a R_{ih}^{(n+1,0,0)} v_i v_k \pm (R_2^{n+1} - b \Omega_{(\alpha)}^{(n+1)}) (\Delta\tau)^{1/2} + O(\Delta\tau) = 0$$

$$b = 2c^{(0)-2} [-a R_{ih}^{(1,1,0)} v_i v_k (R_{ih}^{(1,0,0)} e_i^2 e_k^1)^{-1}]^{1/2} \quad (2.12)$$

Можно показать, что выражения R_1^{n+1} , R_2^{n+1} имеют порядок $O(1)$ и не зависят от номера волны. Собирая в (2.12) коэффициенты при $(\Delta\tau)^0$ и $(\Delta\tau)^1$ ($l \geq 1/2$) и приравнявая нулю каждое из полученных выражений, находим

$$R_1^{n+1} - a R_{ih}^{(n+1,0,0)} v_i v_k = 0 \quad (2.13)$$

$$\pm (R_2^{n+1} - b \Omega_{(\alpha)}^{(n+1)}) (\Delta\tau)^{1/2} + O(\Delta\tau) = 0 \quad (2.14)$$

Реальная и мнимая части соотношения (2.13) служат системой уравнений для определения коэффициентов ω_n , η_n преобразования (2.4), а соотношение (2.14) определяет в особых направлениях $\varphi_* = \varphi_0 + \omega_1 \epsilon$, $\theta_* = \theta_0 + \eta_1 \epsilon$, $\psi_* = \psi_0$ одну предельную скорость (две скорости $c_{(\alpha)}^{(n+1)}$ сливаются в одну при подходе к особым направлениям)

$$c_*^{(n+1)} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} c_{(1)}^{(n+1)} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} c_{(2)}^{(n+1)} \quad (2.15)$$

Значения коэффициентов ω_1 , η_1 и углов φ_* , θ_* для некоторых особых направлений приведены выше.

В силу непрерывности преобразований (2.4) направления φ_* , θ_* , ψ_* образуют непрерывные конические поверхности. По этим направлениям решение строится в виде двухпарциальной поверхностной волны смешанной поляризации [8]

$$u_i = \{ [A_i + y_i B_i] \exp(y_i v_i) + A_{i(3)} \exp(y_i v_{i(3)}) \} \exp(-i\omega t + y_2 v_2) \quad (2.16)$$

В качестве примера рассмотрим плоскость $\psi = \pi/4$, $\theta = \pi/2$ (см. фигуру). При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ все корни $v_{i(n)}$ действительны и различны. По этим направлениям, удовлетворяющим условию (2.1), распространяется двухпарциальная вертикально поляризованная волна (волна Релея). В областях $0 < \varphi < \varphi_{*1}$ ($\varphi_{*1} \approx 6^\circ$), $\varphi_{*2} < \varphi < \pi/2$ ($\varphi_{*2} \approx 61^\circ$) корни $v_{i(n)}$ действительные, различные и распространяется трехпарциальная волна, характеристики которой определяются либо из соотношений (1.17)–(1.19) либо (в окрестности направлений $\varphi = \varphi_{*1}$, $\varphi = \varphi_{*2}$) из соотношений (2.9), (2.14). В области $\varphi_{*1} < \varphi < \varphi_{*2}$ корень $v_{i(3)}$ действительный, а комплексные корни $v_{i(1)}$ и $v_{i(2)}$ расположены симметрично относительно действительной оси. В этой области решение также определяется из (1.17)–(1.19), за исключением окрестностей особых направлений. Наконец, в направлениях $\varphi = \varphi_{*1}$, $\varphi = \varphi_{*2}$ $v_{i(1)} = v_{i(2)}$ и распространяется двухпарциальная волна (2.16), затухающая с глубиной без осцилляций (в отличие от волны Релея эта волна не является вертикально поляризованной).

Эти результаты соответствуют приведенным в [5] с той разницей, что значения углов φ_{*1} и φ_{*2} в указанной работе не определены и поведение волн по этим направлениям и в их окрестности не исследовано.

Обширные численные расчеты не обнаружили в кристалле вольфрама направлений, удовлетворяющих условию (2.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов В. Н., Санников Д. Г. Поверхностные квазиобъемные упругие волны в окрестности избранных направлений и поверхностей в кристаллах // ФТТ. 1975. Т. 17. № 2. С. 478—483.
2. Любимов В. Н., Санников Д. Г. Поверхностные квазиобъемные волны в низкосимметричных кристаллах // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 3. С. 458—460.
3. Россигин Ю. А. Волны в слабоанизотропных средах // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 160—162.
4. Россигин Ю. А. Поверхностные волны в упругих слабо анизотропных средах кубической симметрии // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 2. С. 89—93.
5. Фарнелл Дж. Свойства упругих поверхностных волн // Физическая акустика. Т. 6/ Под ред. У. Мэсона, Р. Терстона. М.: Мир. 1973. С. 139—202.
6. Андерсон О. Определения и некоторые применения изотропных упругих постоянных поликристаллических систем, полученных из данных для монокристаллов // Физическая акустика. Т. 3. Ч. Б/ Под ред. У. Мэсона. М.: Мир. 1968. С. 62—121.
7. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир. 1976. 455 с.
8. Lothe J., Barnett D. M. On the existence of surface-wave solutions for anisotropic elastic half-spaces with free surface // J. Appl. Phys. 1976. V. 47. No. 2. P. 428—433.

Воронеж

Поступила в редакцию
4.II.1986