МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1987

УДК 531.36

О СВОБОДНЫХ ДВИЖЕНИЯХ УПРУГОГО ЭЛЛИПСОИДА

ДЕНИСОВ Г. Г., НОВИКОВ В. В.

Задача о движении упругих тел относительно центра масс возникла в связи с попыткой объяснения расхождений между теоретическими результатами и данными наблюдений в динамике Земли [1]. Затем решение этой задачи стало настоятельно необходимым с появлением искусственных спутников и обнаружением новых эффектов в их угловых движениях, обусловленных упругими свойствами. Некоторые общие вопросы динамики вращений упругих тел исследованы в [1–3], где основное внимание уделялось влиянию на угловые движения тела как целого его упругих свойств. Получение аналитическим путем решений, описывающих как вращательные движения тела, так и его напряженно-деформированное состояние возможно лишь для однородных эллипсоидальных тел. Эта задача решена в небольшом числе частных случаев фиксированного положения оси вращения в теле и соотношений между полуосями эллипсоида, а именно для шара (например, [4]) и двухосного эллипсоида, вращающегося вокруг оси симметрии [5].

В данной работе задача рассматривается без этих ограничений. Следует заметить, что если решение задачи о напряженно-деформированном состоянии шара было взято в качестве порождающего при изучении движений вокруг центра масс упругого тела с произвольной поверхностью, близкой к сфере [6], то задача об упругом эллипсоиде может служить основой при нахождении вращательных движений квазиэллипсоидальных тел.

1. Движение упругого однородного эллипсоида изучается относительно вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и подлежащей определению системы координат $Ox_1x_2x_3$, такой, что в ней отсутствуют движения тела как целого, а точка O совпадает с центром масс тела, т. е. выполняются условия

$$\int\limits_V \mathbf{u}\,dV=0,\qquad \int\limits_V [\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}]\,dV=0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор деформации, V — объем тела.

Если в исходном недеформированном состоянии ($\omega=0$) оси системы $Ox_1x_2x_3$ ориентированы по главным осям инерции, то уравнение поверхности эллипсоида имеет вид $x_1^2/a_1^2+x_2^2/a_2^2+x_3^2/a_3^2=1$.

Известные предположения [2], что частоты собственных колебаний тела намного превосходят угловую скорость вращения, а силы внутреннего трения обеспечивают достаточно быстрое затухание собственных колебаний, позволяют представить вектор деформации в виде $\mathbf{u}=\varepsilon\mathbf{u}_1(\mathbf{r},\,t)+\varepsilon^2\mathbf{u}_2(\mathbf{r},\,t)+\ldots$. Здесь $\varepsilon=2\rho(1+\nu)E^{-1}l_*^2t_*^{-2}\ll 1$, где l_* и t_* — характерные размер тела и время движения его как целого, ρ — плотность, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Безразмерные векторы $\mathbf{u}_1$ и $\boldsymbol{\omega}$ записаны с учетом масштабов l_*, t_* и в квазистатическом приближении определяются в результате решения следующей задачи ($\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности тела S):

$$(1-2\nu)^{-1}\,\mathrm{grad\,diw}\,\mathbf{u}_1+\Delta\mathbf{u}_1=[\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}\cdot\mathbf{r}]+[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}]] \tag{1.2}$$

$$\sigma_{ij}{}^1n_j=\left(\frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{\partial u_{1l}}{\partial x_l}\delta_{ij}+\frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_{1j}}{\partial x_i}\right)n_j=0\qquad (\mathbf{x}\in S) \tag{1.3}$$

$$\int\limits_V \mathbf{u}_1\,dV=0,\qquad \int\limits_V [\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}]\,dV=0 \tag{1.4}$$

Составляющие вектора деформации u_{1i} (далее обозначаются u_i) в соответствии с (1.2) и (1.3) отыскиваются в виде многочленов, содержащих линейные и кубические члены по пространственным переменным:

$$u_i=\alpha_1{}^i x_1+\alpha_2{}^i x_2+\alpha_3{}^i x_3+\overset{i}{a}_{klm}x_1{}^k x_2{}^l x_3{}^m \tag{1.5}$$

$$(i,\ k,\ l,\ m=1,\ 2,\ 3;\quad k+l+m=3)$$

Такой вид $\mathbf{u}_i(\mathbf{r},\ t)$ дает нетривиальное решение задачи (1.2), (1.3) и автоматически удовлетворяет первому условию (1.4). Включение в u_i других степеней пространственных переменных соответствовало бы однородной статической задаче, имеющей лишь тривиальное решение.

Подстановка u_i в уравнение (1.2) и приравнивание членов при x_i ($i=1,\ 2,\ 3$) дает девять уравнений, из которых приведем следующие:

$$6(1-\nu)\overset{1}{a}_{300}+(1-2\nu)(\overset{1}{a}_{120}+\overset{1}{a}_{102})+\overset{2}{a}_{210}+\overset{3}{a}_{201}=-{}^1/_2(1-2\nu)(\omega_2{}^2+\omega_3{}^2)$$

$$4(1-\nu)\overset{1}{a}_{210}+2(1-2\nu)(\overset{1}{a}_{012}+3\overset{1}{a}_{030})+2\overset{2}{a}_{120}+\overset{3}{a}_{111}=(1-2\nu)(\omega_1\omega_2-\omega_3{}^{\cdot})$$

$$4(1-\nu)\overset{1}{a}_{201}+2(1-2\nu)(\overset{1}{a}_{021}+3\overset{1}{a}_{003})+\overset{2}{a}_{111}+2\overset{3}{a}_{102}=(1-2\nu)(\omega_1\omega_3+\omega_2{}^{\cdot})$$

Остальные шесть уравнений получаются циклической перестановкой индексов коэффициентов $\overset{i}{a}_{klm}$ и проекций вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Условия (1.3) дают три соотношения, имеющие место на поверхности эллипсоида

$$\sum_{j=1}^{3}\sigma_{x_1x_j}a_j{}^{-2}x_j=x_1\{a_1{}^{-2}[(1-\nu)\alpha_1{}^2+\nu(\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^3)]+$$
$$+x_1{}^2a_1{}^{-2}[3(1-\nu)\overset{1}{a}_{300}+\nu(\overset{2}{a}_{210}+\overset{3}{a}_{201})]+x_2{}^2[a_1{}^{-2}((1-\nu)\overset{1}{a}_{120}+\nu(3\overset{2}{a}_{030}+\overset{3}{a}_{021}))+$$
$$+a_2{}^{-2}(1-2\nu)(\overset{1}{a}_{120}+\overset{2}{a}_{210})]+x_3{}^2[a_1{}^{-2}((1-\nu)\overset{1}{a}_{102}+\nu(\overset{2}{a}_{012}+3\overset{3}{a}_{003}))+$$
$$+a_3{}^{-2}(1-2\nu)(\overset{1}{a}_{102}+\overset{3}{a}_{201})]\}+x_2\{{}^1/_2a_2{}^{-2}(1-2\nu)(\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^1)+$$
$$+x_1{}^2[a_1{}^{-2}(2(1-\nu)\overset{1}{a}_{210}+\nu(2\overset{2}{a}_{120}+\overset{3}{a}_{111}))+{}^1/_2a_2{}^{-2}(1-2\nu)(\overset{1}{a}_{210}+3\overset{2}{a}_{300})]+$$
$$+{}^1/_2x_2{}^2a_2{}^{-2}(1-2\nu)(3\overset{1}{a}_{030}+\overset{2}{a}_{120})+{}^1/_2x_3{}^2(1-2\nu)[a_2{}^{-2}(\overset{1}{a}_{012}+\overset{2}{a}_{102})+$$
$$+a_3{}^{-2}(2\overset{1}{a}_{012}+\overset{3}{a}_{111})]\}+x_3\{{}^1/_2a_3{}^{-2}(1-2\nu)(\alpha_1{}^3+\alpha_3{}^1)+x_1{}^2[a_1{}^2(2(1-\nu)\overset{1}{a}_{201}+$$
$$+\nu(\overset{2}{a}_{111}+2\overset{3}{a}_{102}))+{}^1/_2a_3{}^{-2}(1-2\nu)(\overset{1}{a}_{201}+3\overset{3}{a}_{300})]+{}^1/_2x_2{}^2(1-2\nu)[a_2{}^{-2}(\overset{1}{a}_{021}+\overset{2}{a}_{111})+$$
$$+a_3{}^{-2}(\overset{3}{a}_{120}+\overset{1}{a}_{021})]+{}^1/_2x_3{}^2a_3{}^{-2}(1-2\nu)(3\overset{1}{a}_{003}+\overset{3}{a}_{102})\}+x_1x_2x_3\{a_1{}^{-2}[(1-\nu)\overset{1}{a}_{111}+$$
$$+2\nu(\overset{2}{a}_{021}+\overset{3}{a}_{012})]+a_2{}^{-2}(1-2\nu)(\overset{1}{a}_{111}+2\overset{2}{a}_{201})+a_3{}^{-2}(1-2\nu)(\overset{1}{a}_{111}+2\overset{3}{a}_{210})\}=0$$
$$(k,l,m),\quad(1,2,3)$$

Здесь и далее символы (k, l, m) и (1, 2, 3) означают циклическую перестановку индексов.

Потребуем, чтобы в каждом выражении при x_i, стоящем в фигурных скобках, выделялось множителем уравнение поверхности эллипсоида, а выражение, стоящее при $x_1x_2x_3$, обращалось в нуль. Например, выражение при x_1 дает следующие три уравнения:

$$a_1{}^2[3(1-\nu)\overset{1}{a}_{300}+\nu(\overset{2}{a}_{210}+\overset{3}{a}_{201})]=-(1-\nu)\alpha_1{}^1-\nu(\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^3)$$

$$a_2{}^2[(1-\nu)\overset{1}{a}_{120}+\nu(3\overset{2}{a}_{030}+\overset{3}{a}_{021})]+a_1{}^2(1-2\nu)(\overset{1}{a}_{120}+\overset{2}{a}_{210})=$$
$$=-(1-\nu)\alpha_1{}^1-\nu(\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^3)$$

$$a_3{}^2[(1-\nu)\overset{1}{a}_{102}+\nu(\overset{2}{a}_{012}+3\overset{3}{a}_{003})]+a_1{}^2(1-2\nu)(\overset{1}{a}_{102}+\overset{3}{a}_{201})=$$
$$=-(1-\nu)\alpha_1{}^1-\nu(\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^3)$$

В итоге из краевых условий (1.3) получим 30 соотношений.

Второе интегральное условие (1.4) сводится к следующим трем алгебраическим уравнениям:

$$a_1^2[7\alpha_1^3+3a_1^2\overset{3}{a}_{300}+a_2^2\overset{3}{a}_{120}+a_3^2\overset{3}{a}_{102}]=a_3^2[7\alpha_3^1+a_1^2\overset{1}{a}_{201}+a_2^2\overset{1}{a}_{021}+3a_3^2\overset{1}{a}_{003}]$$

$$a_2^2[7\alpha_2^3+a_1^2\overset{3}{a}_{210}+3a_2^2\overset{3}{a}_{030}+a_3^2\overset{3}{a}_{012}]=a_3^2[7\alpha_3^2+a_1^2\overset{2}{a}_{201}+a_2^2\overset{2}{a}_{021}+3a_3^2\overset{2}{a}_{003}]$$

$$a_2^2[7\alpha_2^1+3a_2^2\overset{1}{a}_{030}+a_1^2\overset{1}{a}_{210}+a_3^2\overset{1}{a}_{012}]=a_1^2[7\alpha_1^2+3a_1^2\overset{2}{a}_{300}+a_2^2\overset{2}{a}_{120}+a_3^2\overset{2}{a}_{102}]$$

Таким образом приходим к системе из 42 уравнений относительно 39 неизвестных величин α_j^i, $\overset{i}{a}_{klm}$ и 3 компонент вектора угловой скорости ω_i $(i, j, k, l, m=1, 2, 3;\ k+l+m=3)$.

Для существования решения этой системы необходимо выполнение соотношений $\omega_1^{\cdot}=(a_3^2-a_2^2)(a_3^2+a_2^2)^{-1}\omega_2\omega_3$ (1, 2, 3), которые представляют собой уравнения Эйлера для недеформируемого эллипсоида с полуосями a_1, a_2, a_3 и выступают здесь в качестве условий разрешимости уравнений (1.2) и в конечном счете получения $\mathbf{u}_i$. Отметим, что уравнения Эйлера могут быть получены и в результате векторного умножения соотношений (1.2) на $\mathbf{r}$ и последующего интегрирования их по объему тела с учетом условий на его поверхности (1.3). Решение системы облегчается тем, что она разбивается на четыре группы уравнений, каждая из которых решается независимо от других. В результате вычислений находим

$$\overset{1}{a}_{102}=a_3^{-2}[-\alpha_1^1+(1+\nu)^{-1}(\nu a_2^2s_1-a_1^2s_2)] \tag{1.6}$$

$$\overset{1}{a}_{120}=a_2^{-2}[-\alpha_1^1+(1+\nu)^{-1}(\nu a_3^2s_1-a_1^2s_3)]$$

$$\overset{1}{a}_{300}={}^1/_3a_1^{-2}[-\alpha_1^1+\nu(1+\nu)^{-1}(a_3^2s_2+a_2^2s_3)]$$

$$(1, 2, 3),\quad (k, l, m)$$

$$s_1=A_2\alpha_1^1+D_3\alpha_2^2+B_1\alpha_3^3-{}^1/_2\omega_1^2$$

$$s_2=B_2\alpha_1^1+A_3\alpha_2^2+D_1\alpha_3^3-{}^1/_2\omega_2^2$$

$$s_3=D_2\alpha_1^1+B_3\alpha_2^2+A_1\alpha_3^3-{}^1/_2\omega_3^2$$

$$A_1=[a_3^2(a_1^2+a_2^2)\nu-a_1^2a_2^2(1-\nu)]\Delta,\quad B_1=[a_3^2(a_1^2-a_2^2)\nu+a_1^2a_2^2(1-\nu)]\Delta$$

$$D_1=[a_3^2(a_2^2-a_1^2)\nu+a_1^2a_2^2(1-\nu)]\Delta,\quad \Delta=[(1-2\nu)a_1^2a_2^2a_3^2]^{-1}$$

Остальные величины A_i, B_i, D_i получаются циклической перестановкой в этих формулах a_1, a_2, a_3.

Параметры α_1^1, α_2^2, α_3^3, через которые выражаются приведенные выше девять коэффициентов $\overset{i}{a}_{klm}$, определяются из системы уравнений

$$\begin{gathered}[a_1^4+a_3^4+a_1^2a_3^2(1+\nu)]s_2-a_2^2a_3^2\nu s_3-a_1^2a_2^2\nu s_1+\\ +(1+\nu)(a_1^2\alpha_1^1+a_3^2\alpha_3^3)=0\end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}-a_2^2a_3^2\nu s_2-a_1^2a_3^2\nu s_1+[a_1^4+a_2^4+a_1^2a_2^2(1+\nu)]s_3+\\ +(1+\nu)(a_1^2\alpha_1^1+a_2^2\alpha_2^2)=0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-a_1^2a_2^2\nu s_2+[a_2^4+a_3^4+a_2^2a_3^2(1+\nu)]s_1-a_1^2a_3^2\nu s_3+\\ +(1+\nu)(a_2^2\alpha_2^2+a_3^2\alpha_3^3)=0\end{gathered}$$

Формулы для α_i^i ввиду громоздкости здесь не приводятся. При рассмотрении конкретной задачи, когда задаются численные значения величин a_j и коэффициента Пуассона, величины α_i^i легко вычисляются. Для остальных коэффициентов $\overset{i}{a}_{klm}$ имеем

$$\overset{1}{a}_{201}=\overset{3}{a}_{102}=-{}^1/_2\nu\overset{2}{a}_{111},\qquad \overset{1}{a}_{012}=F_1[a_1^2(1+\nu)+a_3^2]\omega_1\omega_2$$

$$\overset{2}{a}_{102}=F_1[a_2^2(1+\nu)+a_3^2]\omega_1\omega_2,\qquad \overset{1}{a}_{210}=F_1\nu a_3^2\omega_1\omega_2$$

$$a_{030}=1/3\,\omega_1\omega_2[a_1^2(a_1^2+a_2^2)^{-1}-((1+\nu)a_1^2+\nu a_3^2)F_1]$$

$$\overset{1}{a}_{003}=1/3\,\omega_1\omega_3[a_1^2(a_1^2+a_3^2)^{-1}-((1+\nu)a_1^2+\nu a_2^2)F_1]$$

$$\alpha_1^2=1/7\,\omega_1\omega_2(a_1^2+a_2^2)^{-1}\{a_1^2a_2^2(a_1^2-a_2^2)(a_1^2+a_2^2)^{-1}+$$
$$+F_1[(1+\nu)(a_1^2a_2^2(a_2^2-a_1^2)-7a_1^2(a_1^2a_3^2+2a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2))+$$
$$+\nu a_3^2(a_2^4-a_1^4)+a_3^4(a_1^2-a_2^2)-14a_1^2a_3^4]\}$$

$$\alpha_2^1=-1/7\,\omega_1\omega_2(a_1^2+a_2^2)^{-1}\{a_1^2a_2^2(a_1^2-a_2^2)(a_1^2+a_2^2)^{-1}+$$
$$+F_1[(1+\nu)(a_1^2a_2^2(a_2^2-a_1^2)+7a_2^2(a_1^2a_3^2+2a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2))+$$
$$+\nu a_3^2(a_2^4-a_2^4)+a_3^4(a_1^2-a_2^2)+14a_2^2a_3^4]\}$$

$$F_1=a_1^2a_2^2(a_1^2+a_2^2)^{-1}[(1+\nu)(a_1^2a_3^2+3a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2)+2a_3^4]^{-1}$$
$$(1,\ 2,\ 3),\qquad (k,\ l,\ m)$$

Отметим, что полученные результаты согласуются с имеющимися в литературе данными по деформированию двухосного эллипсоида, вращающегося вокруг оси симметрии [5] и шара [4].

2. Рассмотрим уравнения движения эллипсоида (уравнения для ω_i), в которых учитываются упругие свойства. Такие уравнения можно получить решая задачу в следующем приближении по ε. Однако значительно проще получить их, определив u_1 и воспользовавшись уравнением для кинетического момента $\mathbf{K}$, которое следует из (1.2)–(1.4) и имеет вид

$$\mathbf{K}^{\boldsymbol\cdot}+[\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{K}]=0 \tag{2.1}$$

$$K_l=I_{lm}\omega_m,\qquad I_{lm}=\int\limits_V\rho[(x_k^2+2x_ku_k)\delta_{lm}-(x_lx_m+x_lu_m+x_mu_l)]dV$$

$$I_{x_1x_1}=\overset{0}{I}_{x_1x_1}+\varepsilon\overset{1}{I}_{x_1x_1}=1/5(a_2^2+a_3^2)+$$
$$+2/35\,\varepsilon\{7(a_2^2\alpha_2^2+a_3^2\alpha_3^2)+3a_2^4\overset{2}{a}_{030}+3a_3^4\overset{3}{a}_{003}+a_1^2(a_2^2\overset{2}{a}_{210}+a_3^2\overset{3}{a}_{201})+$$
$$+a_2^2a_3^2(\overset{2}{a}_{012}+\overset{3}{a}_{021})\}$$

$$I_{x_1x_2}=4/35\,\varepsilon a_1^2a_2^2(a_1^2+a_2^2)^{-1}F_1[(1+\nu)(2a_1^2a_3^2+5a_1^2a_2^2+2a_2^2a_3^2)+4a_3^4]\,\omega_1\omega_2$$
$$(1,\ 2,\ 3),\qquad (k,\ l,\ m)$$

Дальнейшее рассмотрение приводит к громоздким выражениям, поэтому его целесообразно проводить при конкретных числовых значениях ν и полуосей a_j. Тогда все величины, входящие в I_{ij}^1, легко вычисляются и можно сделать заключение о динамике упругого эллипсоида без ограничений на величины ν и a_j.

В качестве примера рассмотрим эллипсоид вращения. Считаем, что $a_1=a_2=1$, $a_3=1+a/2$, где $\varepsilon\ll a\ll 1$. При $\nu=0{,}3$ с точностью до членов, линейных по a, имеем

$$I_{x_1x_1}=I_{x_2x_2}=2/35\{3{,}5(2+a)+\varepsilon[(\omega_1^2+\omega_2^2)(0{,}517+$$
$$+0{,}932a+\omega_3^2(0{,}056-0{,}4a)]\}$$

$$I_{x_3x_3}=2/35\{7+\varepsilon[(\omega_1^2+\omega_2^2)(0{,}056-0{,}399a)+\omega_3^2(0{,}979+0{,}019a)]\}$$

$$I_{x_1x_2}=2/35\,\varepsilon[0{,}462+0{,}138a]\,\omega_1\omega_2$$

$$I_{x_1x_3(x_2x_3)}=2/35\,\varepsilon[0{,}924+0{,}894a]\,\omega_1\omega_3(\omega_2\omega_3)$$

Составляющие вектора кинетического момента в этом случае определяются формулами

$$K_{x_1,x_2}=2/35\,\omega_{1,2}\{3{,}5(2+a)+\varepsilon 0{,}979(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)+$$
$$+\varepsilon a[1{,}07(\omega_1^2+\omega_2^2)+0{,}494\omega_3^2]\}$$

$$K_{x_3}=2/35\,\omega_3\{7+\varepsilon 0{,}979(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)+$$
$$+\varepsilon a[0{,}495(\omega_1^2+\omega_2^2)+0{,}019\omega_3^2]\}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.1), получим искомые уравнения движения.

Предположим, что вращение происходит вокруг оси, близкой к оси симметрии эллипсоида, и ограничимся при написании уравнения (2.1) линейными по ω_1 и ω_2 членами. Тогда придем к следующим уравнениям свободного движения тела:

$$\omega_1^{\cdot}+i\omega_2^{\cdot}=i\Omega(\omega_1+i\omega_2), \qquad \omega_3^{\cdot}=0 \tag{2.2}$$

$$\Omega=0{,}5a(-1+0{,}004\varepsilon\omega_3^2)\omega_3, \qquad i=\sqrt{-1}$$

Для сравнения приведем параметр Ω, вычисленный при других значениях коэффициента Пуассона

$$\nu=0{,}2: \quad \Omega=0{,}5a(-1+0{,}009\varepsilon\omega_3^2)\omega_3$$

$$\nu=0: \quad \Omega=0{,}5a(-1+0{,}016\varepsilon\omega_3^2)\omega_3$$

Из (2.2) получим, что $\omega_1+i\omega_2=\omega_0\exp(i\Omega t)$ (ω_0 — постоянная, определяемая начальными условиями), т. е. проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную оси симметрии эллипсоида, оставаясь постоянной по величине, вращается в этой плоскости с угловой скоростью Ω, определяя частоту деформирования тела. Такое же движение относительно тела совершает вектор момента количества движения **K**. При фиксированном ω_3 частота деформирования уменьшается тем сильнее, чем меньше ν.

Для иллюстрации применения полученных результатов определим деформацию симметричного эллипсоида при его стационарном вращении вокруг оси, лежащей в плоскости симметрии, и вычислим компоненты тензора напряжений. Считаем $a_1=a_2=1$ при произвольном a_3, $\omega_1\neq 0$, $\omega_2=\omega_3=0$. Составляющие вектора перемещений, определяемые соотношениями (1.7), (1.6), приведем для случая $\nu=0$, когда они имеют наиболее компактный вид

$$u_1=x_1\{\alpha_1^1[1-2a_3^{-2}x_3^2-2x_2^2-{}^1/_3x_1^2]+\alpha_2^2[a_3^{-2}x_3^2-x_2^2]+\alpha_3^3a_3^{-2}[x_2^2-a_3^{-2}x_3^2]\}$$

$$u_2=x_2\{\alpha_1^1[a_3^{-2}x_3^2-x_1^2]+\alpha_2^2[1-2a_3^{-2}x_3^2-2x_1^2-{}^1/_3x_2^2]+$$
$$+\alpha_3^3a_3^{-2}[x_1^2-a_3^{-2}x_3^2]+{}^1/_2\omega_1^2x_3^2\}$$

$$u_3=x_3\{(\alpha_1^1-\alpha_2^2)a_3^2(x_2^2-x_1^2)+\alpha_3^3[1-2x_1^2-2x_2^2-{}^1/_3a_3^{-2}x_3^2]+{}^1/_2\omega_1^2a_3^2x_2^3\}$$

$$\alpha_1^1=-{}^1/_2q_1^{-1}\omega_1^2(1+a_3^2+a_3^4)(1+a_3^2+5a_3^4)$$

$$\alpha_2^2={}^1/_2q_1^{-1}\omega_1^2(1+a_3^2+a_3^4)(10+7a_3^2+11a_3^4)$$

$$\alpha_3^3=2q_2^{-1}(1+a_3^2+a_3^4)$$

$$q_1=(3+2a_3^2+2a_3^4)(11+8a_3^2+16a_3^4), \qquad q_2=a_3^2(11+8a_3^2+16a_3^4)$$

Компоненты тензора напряжений определяются следующими формулами:

$$\sigma_{11}=2\{-\alpha_1^1x_1^2-(2\alpha_1^1+\alpha_2^2-a_3^{-2}\alpha_3^3)x_2^2-(2\alpha_1^1-\alpha_2^2+a_3^{-2}\alpha_3^3)a_3^{-2}x_3^2+\alpha_1^1\}$$

$$\sigma_{22}=2\{-(\alpha_1^1+\alpha_2^2-a_3^{-2}\alpha_3^3)x_1^2-\alpha_2^2x_2^2+[(\alpha_1^1-\alpha_2^2-a_3^{-2}\alpha_3^3)a_3^{-2}+$$
$$+{}^1/_2\omega_1^2]x_3^2+\alpha_2^2\}$$

$$\sigma_{33}=2\{[a_3^2(\alpha_1^1-\alpha_2^2)-2\alpha_3^3]x_1^2+[a_3^2(\alpha_1^1-\alpha_2^2)-2\alpha_3^3+$$
$$+{}^1/_2a_3^2\omega_1^2]x_2^2-a_3^{-2}\alpha_3^3x_3^2+\alpha_3^3\}$$

$$\sigma_{12}=2x_1x_2[-3(\alpha_1^1+\alpha_2^2)+2\alpha_3^3]$$

$$\sigma_{13}=2x_1x_3[-\alpha_1^1(a_3^2+2a_3^{-2})-\alpha_2^2(a_3^2+a_3^{-2})-\alpha_3^3(2+a_3^{-4})]$$

$$\sigma_{23}=2x_2x_3[\alpha_1^1(a_3^2+a_3^{-2})+\alpha_2^2(a_3^2+2a_3^{-2})-\alpha_3^3(2+a_3^{-4})+\omega_1^2(1+a_3^2)]$$

Отсюда, в частности, понятен физический смысл параметра α_i^i — это величина ${}^1/_2\sigma_{ii}$ в точке $x_1=x_2=x_3=0$. Компоненты тензора напряжений σ_{ii} в этой точке принимают наибольшие значения.

В случаях $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ и $\nu \neq 0$ деформации и напряжения также можно получить, но они имеют весьма громоздкий вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мельхиор П.* Физика и динамика планет. М.: Мир. Т. 1. 1975. 575 с.; Т. 2. 1976. 483 с.
2. *Черноусько Ф. Л.* Влияние собственной упругости и диссипации на движение твердого тела относительно центра масс // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1979. Вып. 41. С. 118—122.
3. *Егармин Н. Е.* Влияние упругих деформаций на тензор инерции твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 43—48.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука. 1965. 203 с.
5. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939 с.
6. *Денисов Г. Г., Новиков В. В.* О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 43—50.

Горький

Поступила в редакцию
13.XI.1985