

УДК 539.383

**КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ СИСТЕМЫ ИЗНАШИВАЕМЫХ ШТАМПОВ**

ГОРЯЧЕВА И. Г.

Рассматривается задача об изнашивании системы связанных между собой штампов, перемещающихся определенным образом по границе упругого полупространства. Построено асимптотически устойчивое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений эволюционного типа для определения перераспределения усилий между штампами. Исследовано влияние взаимного расположения штампов, их размеров, а также характера движения системы на кинетику изнашивания и соотношение между высотами штампов в установившемся режиме. Показано, как с помощью рационального расположения штампов внутри фиксированной области достичь их равномерного износа при трении.

Предложенная математическая модель изнашивания множественного контакта может быть использована для изучения приработки шероховатых тел, а также для исследования изнашивания неоднородных поверхностей с жесткими включениями.

1. Рассмотрим систему M связанных между собой цилиндрических штампов с плоским основанием, перемещающуюся по поверхности упругого полупространства. На систему действует общая нагрузка $Q(t)$. Штампы произвольным образом расположены внутри контурной области Ω .

Будем считать, что в процессе трения штампы изнашиваются, а поверхность упругого тела все время остается плоской. Предположим, что скорость изнашивания dw_j/dt на каждом пятне контакта связана с действующей на него нагрузкой Q_j и скоростью скольжения v_j степенной зависимости вида

$$dw_j/dt = K(Q_j/Q_*)^\alpha (v_j/v_*)^\beta \quad (j=1, 2, \dots, M) \quad (1.1)$$

Здесь w_j — линейный износ j -го штампа в центре площадки контакта, Q_* , v_* — некоторые характерные значения нагрузки и скорости скольжения штампа соответственно, K — коэффициент, имеющий смысл скорости линейного износа при $Q_j=Q_*$, $v_j=v_*$.

Из условия контакта j -го штампа системы с упругим полупространством следует

$$\eta_j(t) = h_j + \gamma(t) - w_j(t) \quad (1.2)$$

Здесь $\eta_j(t)$ — внедрение j -го штампа в произвольный момент времени t , h_j — начальное распределение штампов по высоте, $\gamma(t)$ — общее углубление системы штампов в момент времени t ($\gamma = \gamma(0) \neq 0$).

Воспользуемся следующим соотношением между внедрением $\eta_j(t)$ в упругое полупространство j -го штампа радиуса a и действующей на него нагрузкой $Q_j(t)$ [1–3]:

$$\eta_j(t) = \frac{1-\nu^2}{2aE} Q_j(t) + \frac{1-\nu^2}{\pi aE} \sum_{i=1}^M (1-\delta_{ij}) Q_i(t) \arcsin \frac{a}{l_{ij}} \quad (1.3)$$

Здесь E и ν — упругие постоянные материала основания, l_{ij} — расстояние от фиксированного j -го штампа до i -го штампа ($i \neq j$), δ_{ij} — символ Кронекера. Первый член в правой части соотношения (1.3) есть осадка уединенного цилиндрического штампа с плоской торцевой поверхностью радиуса a под действием силы Q_j , а второй представляет собой дополнительную осадку рассматриваемого штампа за счет действия вокруг него

сосредоточенных сил Q_i . Оценка погрешности, вносимой в соотношение между нагрузкой и внедрением штампа при замене соседних штампов сосредоточенными силами, дана в [3].

Отметим, что соотношение (1.3) в точности справедливо в начальный момент времени $t=0$, когда контактирующая поверхность каждого штампа является плоской. Поскольку при изнашивании за счет неравномерности распределения давлений на площадке контакта происходит изменение формы контактирующей поверхности каждого штампа в зависимости от его местоположения в области Ω , первое слагаемое $\eta_{ij}(t)$ в правой части соотношения (1.3) для $t>0$ примет вид

$$\eta_{ij}(t) = \frac{1}{2} k_j(t) (1 - \nu^2) Q_j(t) / (E a_j(t)) \quad (1.4)$$

в чем можно убедиться воспользовавшись результатами решения контактной задачи о взаимодействии штампа, форма контактирующей поверхности которого описывается функцией $A\rho^{\lambda_j(t)}$, с упругим полупространством [1]. Будем считать, что изменение формы контактирующей поверхности каждого штампа при изнашивании незначительно и сводится, главным образом, к закруглению углов, где в начальный момент времени имеют место наибольшие контактные давления (т. е. значения $\lambda_j(t)$ достаточно большие). Поэтому положим в (1.4) $k_j(t) = 1$ и $a_j(t) = a$.

Таким образом, соотношения (1.1)–(1.3), выписанные для каждого штампа системы в произвольный момент времени, вместе с условием равновесия

$$Q(t) = \sum_{j=1}^M Q_j(t) \quad (1.5)$$

представляют собой систему уравнений для изучения кинетики изнашивания системы связанных между собой штампов, расположенных на произвольном расстоянии l_{ij} друг от друга.

2. Продифференцировав уравнения (1.2) и (1.3) по времени и принимая во внимание зависимость (1.1), преобразуем полученную систему уравнений к виду

$$q_j'(t) + \sum_{i=1}^M b_{ij} q_i'(t) = \gamma_1'(t) - B_j q_j^\alpha(t) \quad (j=1, \dots, M) \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^M q_j(t) = \frac{1 - \nu^2}{2a\gamma E} Q(t) \quad (2.2)$$

$$q_j(t) = \frac{1 - \nu^2}{2a\gamma E} Q_j(t), \quad b_{ij} = \frac{2}{\pi} (1 - \delta_{ij}) \arcsin \frac{a}{l_{ij}} \quad (2.3)$$

$$B_j = \frac{K}{\gamma} \left(\frac{v_j}{v_*} \right)^3 \left[\frac{2a\gamma E}{(1 - \nu^2) Q_*} \right]^\alpha, \quad \gamma_1(t) = \frac{\gamma(t)}{\gamma}$$

При заданном начальном распределении штампов по высоте h_j начальные значения $q_j(0)$ для системы дифференциальных уравнений (2.1) известны из соотношений (2.3) и (1.2), (1.3), (1.5) при $t=0$.

Исследуем решение системы дифференциальных уравнений (2.1) в соответствии с разными вариантами постановки задачи. Если система штампов при изнашивании перемещается по нормали к границе упругого полупространства с постоянной скоростью, т. е. $\gamma_1(t) = ct + 1$, то уравнения (2.1) принимают вид

$$q_j'(t) + \sum_{i=1}^M b_{ij} q_i'(t) = c - B_j q_j^\alpha(t) \quad (2.4)$$

а соотношение (2.2) служит для определения характера изменения нагрузки, действующей на систему штампов.

Представим решение системы уравнения (2.4) в виде

$$q_j(t) = (c/B_j)^{1/\alpha} + \varphi_j(t) \quad (j=1, \dots, M) \quad (2.5)$$

где функции $\varphi_j(t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\varphi_j'(t) + \sum_{i=1}^M b_{ij} \varphi_i'(t) = -d_j \varphi_j(t) + f_j(\varphi_j) \quad (2.6)$$

$$d_j = \alpha c^{(\alpha-1)/\alpha} B_j^{1/\alpha} \quad (d_j > 0), \quad f_j(\varphi_j) = \sum_{k=2}^{\infty} d_{jk} \varphi_j^k \quad (2.7)$$

Для функций $f_j(\varphi_j)$ справедлива оценка $\|f(\varphi)\| = o\|\varphi\|$. Система уравнений (2.6) имеет нулевое решение, которое является асимптотически устойчивым, если таким свойством обладает решение соответствующей линейной системы с постоянными коэффициентами [4, 5], имеющей в матричной форме вид

$$B\varphi' = -D\varphi \quad (2.8)$$

Здесь B — симметричная матрица с положительными элементами ($b_{ii}=1$; b_{ij} ($i \neq j$) определены формулой (2.3)), D — диагональная матрица с элементами $d_{jj}=d_j$ (2.7) и $d_{ij}=0$ ($i \neq j$).

Докажем, что матрица B — положительно определена, т. е.

$$(Bx, x) > 0 \quad (2.9)$$

для всех x , удовлетворяющих условию: $\|x\| \neq 0$. Пусть x — вектор, компонентами которого с точностью до множителя $(1-v^2)/(2\alpha\gamma E)$ являются силы Q_j , действующие на штампы ($j=1, 2, \dots, M$). Тогда компоненты вектора Bx представляют собой упругие перемещения соответствующих штампов η . Поэтому скалярное произведение (Bx, x) есть работа отличных от нуля сил на соответствующих упругих перемещениях, которая всегда положительна, что и доказывает неравенство (2.9).

В силу неравенства (2.9) матрица B — невырожденная и для нее существует обратная матрица B^{-1} . Поэтому уравнение (2.8) равносильно уравнению

$$\varphi' = -B^{-1}D\varphi \quad (2.10)$$

Рассмотрим функцию $V = (Bx, x)$, которая является положительно определенной в силу (2.9) и непрерывно дифференцируемой. Производная функции V в силу системы (2.10) имеет вид $V' = dV/dt = (-Dx, x) + (Bx, -B^{-1}Dx) = -2(x, Dx)$. Здесь принято во внимание, что $(Bx, -B^{-1}Dx) = -(x, -BB^{-1}Dx) = -(x, Dx)$, так как $B = B^T$ вследствие симметрии матрицы B .

Таким образом, можно указать непрерывную функцию $W = 2(x, Dx) > 0$ для всех x ($\|x\| \neq 0$), что производная функция Ляпунова V в силу системы (2.10) удовлетворяет условию $V' = -W$. По лемме Ляпунова [5] решение $\varphi=0$ системы (2.10) или равносильной ей системы (2.8) асимптотически устойчиво. На основании доказанного можно утверждать существование асимптотически устойчивого стационарного решения $q_{j\infty} = (c/B_j)^{1/\alpha}$ системы (2.4). Случай $c=0$ соответствует решению задачи о движении системы штампов в направляющих.

Практически осуществима и другая постановка задачи, когда предполагается заданной нагрузка $Q(t)$. Для определенности положим $Q(t) = Q_0$. По-прежнему будем искать решение системы уравнений (2.1) и (2.2) в виде (2.5), где постоянная c на основании соотношения (2.2) имеет вид

$$c = \left[\frac{1}{2} Q_0 (1-v^2) / \left(\alpha\gamma E \sum_{j=1}^M (1/B_j)^{1/\alpha} \right) \right]^\alpha \quad (2.11)$$

а функции $\varphi_j(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\varphi_j'(t) + \sum_{i=1}^M b_{ij} \varphi_i'(t) = -d_j \varphi_j(t) + \gamma_i'(t) - c + f_j(\varphi_j) \quad (2.12)$$

$$\sum_{j=1}^M \varphi_j(t) = 0 \quad (2.13)$$

Разделим каждое j -е уравнение системы (2.12) на постоянную $d_j > 0$ ($j=1, 2, \dots, M$) и сложим M полученных уравнений. Тогда на основании (2.13) будем иметь

$$\sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{d_j} + \sum_{i=1}^M \frac{b_{ij}}{d_i} \right) \varphi_j' = [\gamma_i'(t) - c] \sum_{j=1}^M \frac{1}{d_j} + o(\|\varphi\|)$$

откуда следует

$$\gamma_i'(t) - c = \sum_{j=1}^M a_j \varphi_j'(t) + o(\|\varphi\|) \quad (2.14)$$

$$a_j = \left(\frac{1}{d_j} + \sum_{i=1}^M \frac{b_{ij}}{d_i} \right) / \sum_{k=1}^M (1/d_k)$$

С учетом (2.14) система уравнений (2.12) примет вид

$$\varphi_j'(t) + \sum_{i=1}^M b_{ij} \varphi_i'(t) - \sum_{i=1}^M a_i \varphi_i'(t) + d_j \varphi_j(t) = o(\|\varphi\|) \quad (2.15)$$

Для доказательства асимптотической устойчивости нулевого решения системы уравнений (2.15) рассмотрим соответствующую ей линеаризованную систему, которую запишем в матричном виде

$$B\varphi' - A\varphi + D\varphi = 0 \quad (2.16)$$

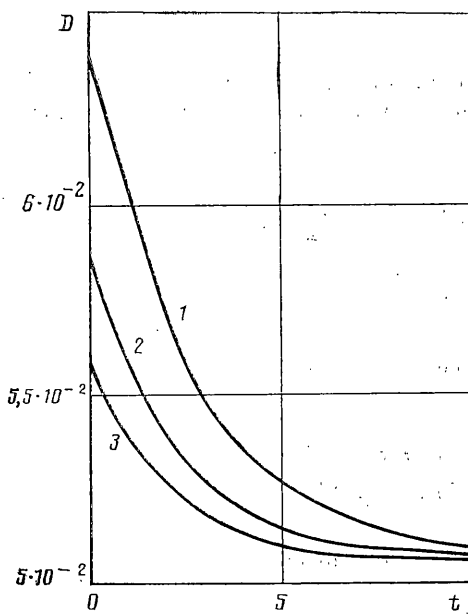
где A — квадратная матрица с M одинаковыми строками. Для доказательства асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.16) применим, как и прежде, метод Ляпунова. Рассмотрим у положительно-определенной и непрерывно дифференцируемой функции $V = (Bx, x)$ производную в силу системы (2.16). Получим $V' = dV/dt = (Ax', x) - (Dx, x) + (Bx, B^{-1}Ax') - (Bx, B^{-1}Dx) = -2(Dx, x) + 2(Ax', x)$.

Поскольку уравнения системы (2.16) удовлетворяют соотношению (2.13), то $(Ax', x) = 0$. Таким образом, $V' = -W$, где $W = 2(Dx, x)$ — положительно-определенная непрерывная функция. По лемме Ляпунова [5] решение $\varphi = 0$ системы (2.16) асимптотически устойчиво. Таким же свойством обладает нулевое решение системы (2.15) и стационарное решение $q_{j\infty} = (c/B_j)^{1/\alpha}$ системы уравнений (2.1) и (2.2) при $Q(t) = Q_0$.

Стационарное или установившееся решение $q_{j\infty}$, как это следует из (2.11), зависит от общей силы, действующей на систему штампов, скорости скольжения, характера расположения и размера штампов, упругих характеристик материала основания и не зависит от начальных значений $q_j(0)$. Начальные значения влияют на время выхода на установившийся режим изнашивания (время приработки).

В качестве примера был исследован процесс приработки системы M штампов радиуса a , равномерно расположенных внутри круга радиуса R с плотностью $\kappa = Ma^2/R^2$. Все штампы первоначально были расположены на одном уровне. Система совершала возвратно-поступательные перемещения по границе упругого полупространства таким образом, что средние скорости скольжения каждого штампа были одинаковы $v_1 = \dots = v_M = v$, т. е. были равны пути трения, проходимые штампами. На систему штампов действовала постоянная нагрузка Q_0 .

Характер влияния плотности распределения штампов в модели на процесс выхода на установившийся режим изнашивания показан на графиках, изображенных на фиг. 1 ($\alpha=1$, $2aEKv^\beta/[(1-v^2)Q_*v_*^\beta]=8,39 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$). Степень перераспределения усилий между штампами в каждый момент времени оценивалась величиной



Фиг. 1

$$D = (M/Q_0) \left(\sum_{j=1}^M (Q_j - Q_0/M)^2 \right)^{1/2}$$

Кривой 1 соответствует $\kappa_1=0,35$, кривой 2 — $\kappa_2=0,16$, кривой 3 — $\kappa_3=0,09$. Как следует из расчетов, с уменьшением плотности требуется меньше время для достижения равновесного состояния (с определенной степенью точности).

Аналогичным образом исследуется кинетика изнашивания системы штампов, участвующих во вращательном движении вокруг некоторой фиксированной точки.

3. Установившееся значение нагрузки $Q_{j\infty}$, действующей на j -й штамп системы, определяется на основании выражений (2.3) и (2.5) следующим образом:

$$Q_{j\infty} = (c\gamma/K)^{1/\alpha} (v_*/v_j)^{\beta/\alpha} Q_* \quad (3.1)$$

где постоянная c задается либо известной скоростью смещения системы штампов в перпендикулярном к поверхности трения направ-

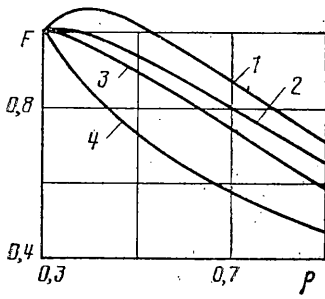
лении $c=\gamma'/\gamma$, либо известной общей силой, действующей на систему штампов, по формуле (2.11).

Распределение усилий между штампами согласно (3.1) обеспечивает одинаковую скорость изнашивания $dw_j/dt=c\gamma$ для каждого штампа системы, в чем можно убедиться с помощью соотношения (1.1). Поэтому форма изношенной поверхности системы штампов в момент времени t , описываемая функцией $h_j-w_j(t)$, при установившемся режиме изнашивания будет эквидистантна. Из условия контакта (1.2) следует, что форма изношенной поверхности с точностью до общего для всех штампов слагаемого $\gamma(t)$ может быть определена соотношением (1.3). В установившемся режиме изнашивания, когда усилия между штампами распределяются по формуле (3.1), получим

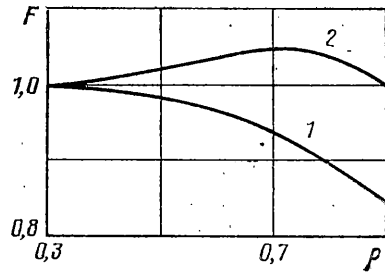
$$\eta_{j\infty} = \frac{(1-v^2)Q_*}{2aE} \left[\frac{c\gamma v_*^\beta}{K} \right]^{1/\alpha} \left[\frac{1}{v_j^{\beta/\alpha}} + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^M (1-\delta_{ij}) \frac{1}{v_i^{\beta/\alpha}} \arcsin \frac{a}{l_{ij}} \right] \quad (3.2)$$

Таким образом, соотношение между высотами штампов при установившемся режиме изнашивания зависит от их расположения внутри контурной области Ω и характера движения системы штампов.

В качестве примера рассмотрим систему M штампов, находящихся внутри кольцевой области Ω ($R_1 \leq r \leq R_2$), которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг центра O . На систему действует общая нагрузка Q_0 . Штампы расположены симметрично относительно точки O с относительной плотностью $\xi(r)$, под которой будем понимать среднее количество штампов, приходящееся на единицу площади в некоторой подобласти Ω_r области Ω , находящейся на расстоянии r от центра O . Если система состоит из достаточно большого числа штампов, то суммирование в (3.2) можно заменить интегрированием, поскольку дополнительное внедрение штампа от действия на расстоянии l от него M_r сосредоточенных сил внутри подобласти Ω_r зависит только от суммарной интенсивности этих сил и не зависит от их



Фиг. 2



Фиг. 3

расположения внутри подобласти Ω_r [2]. Для некоторого фиксированного штампа L , находящегося на расстоянии $r = \rho R_2$ от точки O , получим

$$\eta_{\infty}(\rho) = \frac{(1-\nu^2)Q_0 a_1}{4ER_2 P} \left[\frac{1}{\rho^{\beta/\alpha}} + \frac{2}{\pi^2 a_1^2} \int_{\xi}^1 \int_0^{2\pi} y^{1-\beta/\alpha} \chi(y) \Psi(\rho, y, \varphi) dy d\varphi \right] \quad (3.3)$$

$$\Psi(\rho, y, \varphi) = 0 \quad (s^2 \leq l_0^2), \quad \Psi(\rho, y, \varphi) = \arcsin \frac{a_1}{s} \quad (s^2 > l_0^2)$$

$$P = \int_{\xi}^1 y^{1-\beta/\alpha} \chi(y) dy, \quad s^2 = \rho^2 + y^2 - 2\rho y \cos \varphi$$

$$a_1 = a/R_2, \quad \chi(\rho) = \pi a_1^2 \zeta(\rho), \quad \xi = R_1/R_2, \quad l_0 = a_1/\sqrt{\chi(\rho)}$$

где l_0 — радиус круга с центром в середине штампа L , внутри которого нет других штампов, кроме рассматриваемого штампа L ($\chi(\rho)\pi l_0^2 = \pi a_1^2$).

На фиг. 2 приведены графики функции $F(\rho) = \eta_{\infty}(\rho)/\eta_{\infty}(\xi)$ при $\alpha = \beta$, $\xi = 0,3$ и постоянных по области значениях относительной площади контакта χ . Кривые 1, 2 и 4 построены для значений χ , равных 0,05; 0,01 и 0,001 соответственно и $a_1 = 0,001$. Кривая 3 характеризуется следующими значениями параметров: $\chi = 0,05$ и $a_1 = 0,01$. Расчеты показывают, что при неизменном значении a_1 , чем выше относительная плотность контакта χ , тем больше отличие графика функции $F(\rho)$ от функции ξ/ρ , соответствующей высотному распределению штампов без учета их взаимного влияния друг на друга. При одинаковых значениях относительной плотности контакта χ (кривые 1 и 3) роль взаимного влияния возрастает с уменьшением размера штампов и, следовательно, с ростом их числа $M = \chi(1 - \xi^2)/a_1^2$.

В случае возврата-поступательного движения рассматриваемой системы штампов, когда линейные скорости v_i скольжения всех штампов одинаковы, форма изношенной поверхности в установившемся режиме, согласно (3.2), определяется следующим образом:

$$\eta_{\infty}(\rho) = \frac{(1-\nu^2)Q_0 a_1}{4ER_2 P} \left[1 + \frac{2}{\pi^2 a_1^2} \int_{\xi}^1 \int_0^{2\pi} y \chi(y) \Psi(\rho, y, \varphi) dy d\varphi \right] \quad (3.4)$$

На фиг. 3 приведены графики функции $F(\rho) = \eta_{\infty}(\rho)/\eta_{\infty}(\xi)$ ($a_1 = 0,001$; $\xi = 0,3$). Кривая 1 построена для постоянного по области значения относительной площади контакта $\chi_* = 0,05$. Вид кривых 1 на фиг. 2 и 3 показывает влияние характера движения штампов на их распределение по высоте в установившемся режиме изнашивания.

Для кривой 2 на фиг. 3 функция $\chi(\rho)$ определена соотношением

$$\chi(\rho) = 0,03 \quad (\xi \leq \rho < 1/2(\xi + 1)), \quad \chi(\rho) = 0,0615 \quad (1/2(\xi + 1) \leq \rho \leq 1) \quad (3.5)$$

При этом выполнено условие $\int_{\xi}^1 \chi(\rho) \rho d\rho = 1/2 \chi_* (1 - \xi^2)$. Сопоставление кривых 1 и 2 (фиг. 3) дает возможность оценить влияние характера расположения одного и того же количества штампов внутри области Ω на распределение штампов по высоте в установившемся режиме изнашивания.

Износ $w(\rho)$ штампа, находящегося на расстоянии ρ от центра O , определяется по формуле $w(\rho) = h(\rho) + \gamma(t) - \eta_{\infty}(\rho)$.

4. Из анализа полученных результатов следует, что время приработки и степень неравномерности износа штампов уменьшаются, если начальное распределение усилий между штампами $Q_j(0)$, определяемое формулой

(1.3) при $t=0$, близко к распределению усилий $Q_{j\infty}$ в установившемся режиме изнашивания (3.4).

Для системы M штампов, нагруженных силой Q_0 , можно поставить задачу определения такого расположения штампов в системе, чтобы при заданном характере движения системы штампов (v_j) и их начальном распределении по высоте (h_j) значения $Q_j(0)$ и $Q_{j\infty}$ были близки, что обеспечивало бы равномерный износ штампов системы, как это следует из формул (1.1) и (3.1). В случае симметричного расположения штампов в области Ω соотношения (3.3) и (3.4) можно рассматривать как интегральные уравнения для определения искомой функции относительной площади контакта $\kappa(\rho)$ при двух вариантах движения системы штампов, если в левой части положить $\eta_\infty(\rho) = h(\rho)$. При этом следует иметь в виду, что функция $\kappa(\rho)$, очевидно, удовлетворяет неравенству $0 \leq \kappa(\rho) < 1$ и условию

$\int \kappa(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2} M a_1^2$ ($\xi \leq \rho \leq 1$). Решение этой задачи может быть найдено методом подбора в классе K_n функций, постоянных на отрезках $[(i-1)/n, i/n]$ ($i=1, \dots, n$) и удовлетворяющих соотношениям (3.3) или (3.4). В силу очевидной компактности множества K_n в L_2 и непрерывности интегральных операторов в (3.3) и (3.4) задача построения методом подбора приближенного решения интегрального уравнения первого рода является корректной по Тихонову [6].

Для системы штампов, первоначально расположенных на одном уровне ($h(\rho) = H$) и совершающих возвратно-поступательные перемещения по границе упругого полупространства ($v_j = \text{const}$), функция $\kappa(\rho)$ (3.5) является приближенным решением поставленной задачи ($n=2$), при котором величина D_0 , определяемая как

$$D = \left(\int \left[\eta_\infty(\rho) - \int \eta_\infty(t) dt \right]^2 d\rho \right)^{1/2} / \int \eta_\infty(t) dt$$

удовлетворяет условию $D=0,0414$. Постоянное значение относительной площади контакта $\kappa_* = 0,05$ дает величину $D=0,0831$.

Таким образом, варьируя параметром плотности расположения штампов в системе, можно определенным образом влиять на кинетику изнашивания и установившуюся форму изношенной поверхности системы штампов.

Наличие установившегося решения системы уравнений (2.1) объясняет известный экспериментальный факт существования не зависящей от начальной микрогеометрии контакта равновесной шероховатости, формирующейся в результате приработки [7, 8]. Полученные результаты применимы также к исследованию изнашивания неоднородных поверхностей, представляющих собой некоторое связующее с расположенными в нем более жесткими включениями (например, абразивных инструментов).

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука. 1980. 303 с.
2. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Теоретические основы метода расчета жесткости стыка шероховатых тел с учетом взаимного влияния микроконтактов // Машиноведение. 1979. № 6. С. 66–71.
3. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Оценка точности метода расчета жесткости стыка шероховатых тел с учетом взаимного влияния микроконтактов // Машиноведение. 1980. № 1. С. 70–77.
4. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1964. 477 с.
5. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1970. 279 с.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 285 с.
7. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Механизм формирования шероховатости в процессе приработки // Трение и износ. 1982. Т. 3. № 4. С. 632–642.
8. Комбалов В. С. Влияние шероховатости твердых тел на трение и износ. М.: Наука. 1974. 111 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.X.1986