

УДК 539.3

УСРЕДНЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕРМОУПРУГИХ КАРКАСОВ

КОЛПАКОВ А. Г.

Рассматривается задача об усредненном описании термоупругого поведения тел, содержащих большое количество мелких пустот. К таким телам относятся, в частности, каркасные конструкции: фермы, балочные и сотовые конструкции, высокопористые металлические и полимерные материалы. Для решения задачи применяется асимптотический метод усреднения [1-4], а для получения приближенных формул вычисления усредненных термоупругих постоянных — предложенный в [5] подход, основанный на том, что характерный элемент структуры высокопористых материалов представляет конструкцию балочного, оболочечного и подобных типов.

1. Усреднение в задаче термоупругости композитов, содержащих пустоты. Пусть рассматриваемая каркасная конструкция имеет периодическое строение и ее ячейка периодичности представляет из себя прямоугольный параллелепипед $P_\varepsilon = \varepsilon P_1 = \{x: x \in P_1\}$, где P_1 — параллелепипед ($-h_i/2 \leq x_i \leq h_i/2$, $i=1, 2, 3$) с характерной длиной ребер, равной единице ($h_i \sim 1$). При этом материал занимает не всю ячейку P_ε , а только ее часть, обозначаемую K_ε . Аналогично P_ε часть K_ε представима в виде $K_\varepsilon = \varepsilon K_1$, где K_1 — часть ячейки P_1 . Связь P_ε , K_ε и P_1 , K_1 очевидна: ячейка P_ε и ее часть K_ε получаются из ячейки P_1 и ее части K_1 сжатием в $1/\varepsilon$ раз. Характерный размер ячейки P_ε равен ε .

Рассмотрим задачу термоупругости в области Q_ε , содержащей большое количество периодически расположенных пустот (запись приводится для случая приращения температуры в один градус, справедливость результатов для температурных полей общего вида $\theta(x) \in C(Q)$ следует из [6]):

$$[a_{ijkl}(x/\varepsilon)u_{h,l}^\varepsilon - a_{ijkl}(x/\varepsilon)\beta_{hl}(x/\varepsilon)]_{,j} = f_i(x) \quad (x \in Q_\varepsilon) \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ni}^\varepsilon = [a_{ijkl}(x/\varepsilon)u_{h,l}^\varepsilon - a_{ijkl}(x/\varepsilon)\beta_{ij}(x/\varepsilon)]n_j = 0 \quad (x \in \partial Q_\varepsilon \setminus \partial Q) \quad (1.2)$$

$$u^\varepsilon|_{\partial Q} = 0 \quad (1.3)$$

где ∂Q — внешняя граница области Q , занятой каркасом; $Q_\varepsilon \subset Q$ — область, занятая собственно материалом (объединение ячеек K_ε); ∂Q_ε — границы пустот; u — вектор перемещений; $\{a_{ijkl}(x/\varepsilon)\}$, $\{\beta_{ij}(x/\varepsilon)\}$ — тензоры упругих и термоупругих постоянных. Функции $\{a_{ijkl}(y)\}$, $\{\beta_{ij}(y)\}$ периодичны с ячейкой периодичности P_1 (соответственно те же функции аргумента x/ε имеют ячейку периодичности P_ε и задают распределение материальных характеристик в мелкойячейстом каркасе). На $\{a_{ijkl}(x/\varepsilon)\}$, $\{\beta_{ij}(x/\varepsilon)\}$ накладываются стандартные условия $a_{ijkl}(x/\varepsilon)e_{ij}e_{kl} \geq a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}$ для всех $e_{ij} = e_{ji}$ и $x \in Q_\varepsilon$, где $\{a_{ijkl}\}$ — тензор упругих постоянных некоторого однородного изотропного материала; $|a_{ijkl}(x/\varepsilon)|$, $|\beta_{ij}(x/\varepsilon)| \leq M < \infty$ для всех $x \in Q_\varepsilon$; функции $\{a_{ijkl}(x/\varepsilon)\}$, $\{\beta_{ij}(x/\varepsilon)\}$ измеримы на Q_ε . Приведенные условия заведомо выполнены для композитов, образованных из конечного числа материалов.

Обозначим через $H^1(Q_\varepsilon)$ замыкание множества бесконечно дифференцируемых в Q_ε функций $C^\infty(Q_\varepsilon)$ по норме пространства $W_2^1(Q_\varepsilon)$ [1, 2], через $H^1(Q)$ — замыкание множества бесконечно дифференцируемых и финитных в Q функций $C_0^\infty(Q)$ по норме $W_2^1(Q)$ [1, 2]. Введем класс функ-

ций $V_\varepsilon = \{H^1(Q_\varepsilon)\}^3 \cap \{H^1(Q)\}^3$, определенных в области Q_ε с нормой из $\{H^1(Q_\varepsilon)\}^3$. Решение задачи (1.1)–(1.3) в классе функций V_ε существует и единственно при любом фиксированном $\varepsilon > 0$. Покажем, что при уменьшении характерного размера неоднородностей ε последовательность решений задач (1.1)–(1.3) обладает асимптотикой.

Приведем сводку некоторых результатов [4] в виде предложения.

Предложение. Существует семейство операторов продолжения $F_\varepsilon: V_\varepsilon \rightarrow \{H_0^1(Q)\}^3$, $\varepsilon \in R$, таких, что для любого $\mathbf{v} \in V_\varepsilon$ имеем: 1. $F_\varepsilon \mathbf{v} = \mathbf{v}$ в Q_ε ; 2. $\|F_\varepsilon \mathbf{v}\|_{\{H_0^1(Q)\}^3} \leq C_1 \|\nabla \mathbf{v}\|_{L_2(Q_\varepsilon)}$; 3. Выполнено неравенство Кирна

$$\int_{Q_\varepsilon} a_{ijkl}^\circ (\text{def } \mathbf{v})_{ij} (\text{def } \mathbf{v})_{kl} dx \geq c_1 \|\nabla \mathbf{v}\|_{L_2(Q_\varepsilon)}$$

где $\infty > C_1$, $c_1 > 0$ не зависят от $\varepsilon \in R$ (использовано обозначение $(\text{def } \mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$).

Доказательство приведенных в предложении утверждений см. в [4].

Лемма 1. Пусть $\{\mathbf{u}^\varepsilon\}$ — последовательность решений задачи (1.1)–(1.3). Последовательность $\{F_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon\}$ слабо компактна в $\{H_0^1(Q)\}^3$.

Доказательство. Умножив уравнение (1.1) на $\mathbf{u}^\varepsilon \in V_\varepsilon$ и проинтегрировав по частям с учетом краевых условий (1.2), (1.3), получим

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\varepsilon} a_{ijkl}^\circ (\text{def } \mathbf{u}^\varepsilon)_{ij} (\text{def } \mathbf{u}^\varepsilon)_{kl} dx - M^2 \int_{Q_\varepsilon} \sum_{i,j} |(\text{def } \mathbf{u}^\varepsilon)_{ij}| dx \leq \quad (1.4) \\ & \leq \int_{Q_\varepsilon} a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon) (\text{def } \mathbf{u}^\varepsilon)_{ij} (\text{def } \mathbf{u}^\varepsilon)_{kl} dx + \int_{Q_\varepsilon} b_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon) (\text{def } \mathbf{u}^\varepsilon)_{ij} dx \leq \|f\|_* \|\mathbf{u}^\varepsilon\| \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_*$ — нормы в пространстве V_ε и топологически ему сопряженном пространстве V_ε^* ; $\{b_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon)\} = -\{a_{ijhl}(\mathbf{x}/\varepsilon)\} \{\beta_{hl}(\mathbf{x}/\varepsilon)\}$. Величины $\{b_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon)\}$ далее называются характеристиками теплового расширения (в отличие от коэффициентов теплового расширения $\{\beta_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon)\}$). Из (1.4) получаем, что $\|\nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{L_2(Q)} \leq C_2 \|\mathbf{u}^\varepsilon\|$ для всех $\varepsilon \in R$, $C_2 < \infty$ не зависит от $\varepsilon \in R$.

В силу чего с учетом пп. 1, 2 приведенного предложения $\|F_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon\|_{\{H_0^1(Q)\}^3}^2 \leq C_1 C_2 \|F_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon\|_{\{H_0^1(Q)\}^3}$ для всех $\varepsilon \in R$, откуда следует неравенство $\|F_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon\|_{\{H_0^1(Q)\}^3} \leq C_1 C_2 < \infty$ для всех $\varepsilon \in R$. Следовательно, последовательность $\{F_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon\}$ слабо компактна в $\{H_0^1(Q)\}^3$ и компактна в $L_2(Q)$ [1]. Кроме того, если подпоследовательность $F_\eta \mathbf{u}^\eta \rightarrow \mathbf{u}$ в $L_2(Q)$ при $\eta \rightarrow 0$, то в силу п. 1 предложения $\|\mathbf{u}^\eta - \mathbf{u}\|_{L_2(Q_\eta)} \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$. Доказательство закончено.

Таким образом, при уменьшении характерного размера ячеек каркаса возможно асимптотическое описание последовательности решений задачи (1.1)–(1.3). Построим задачу для определения предельной функции \mathbf{u} . Усреднение задачи термоупругости связано с усреднением соответствующей задачи теории упругости [2]. Вместе с тем при этом возникают ситуации, отличные от классической, имеющей место при усреднении задачи теории упругости [1, 2].

Продолжим коэффициенты $\{a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)\}$, $\{\beta_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon)\}$ в $Q \setminus Q_\varepsilon$ (т. е. в пустоты) нулем. Введем в рассмотрение функции $N^{mn} \in \{H^1(P_1)\}^3$ как решения классической ячеечной задачи теории упругости [1–3]:

$$[a_{ijkl}(\mathbf{y}) N_{h,l}^{mn} + a_{ijmn}(\mathbf{y})]_{,j} = 0 \quad (\mathbf{y} \in K_1) \quad (1.5)$$

$$\sigma_{ni} = a_{ijkl}(\mathbf{y}) N_{h,l}^{mn} n_j \in \Pi(P_1), \quad \sigma_{ni} = 0 \quad (\mathbf{y} \in \partial K_1 \setminus \partial P_1) \quad (1.6)$$

где $\Pi(P_1)$ — множество функций, периодических на P_1 (в смысле равенства их следов в $H^{-1/2}$ на противоположных гранях ячейки P_1 [1, 2]). Величины

$$a_{ijkl}^* = \langle a_{ijkl} \rangle + \langle a_{ijpq} N_{p,q}^{kl} \rangle \quad (1.7)$$

являются усредненными упругими постоянными высоконеоднородного композита [1-4]. Треугольными скобками обозначается среднее по ячейке периодичности [3].

При доказательстве следующей леммы воспользуемся методом [1, 2] (подробно излагается только часть выкладок, отражающих специфику термоупругой задачи и отличных от приводимых в [1, 2]).

Лемма 2. При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место следующие пределы:

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon) (\text{def } F_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon)_{hl} + b_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon) \rightarrow \sigma_{ij} \text{ слабо в } L_2(Q) \quad (1.8)$$

$$F_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{в } L_2(Q), \quad \|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \rightarrow 0 \quad (1.9)$$

Доказательство. Напомним, что функции $\{a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)\}$, $\{b_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon)\}$ продолжены в $Q \setminus Q_\varepsilon$ (в пустоты) нулем. Тогда из интегрального равенства в области Q_ε для решения задачи (1.1)–(1.3) \mathbf{u}^ε следует равенство в Q для функции $F_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon$:

$$\int_Q a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon) (\text{def } F_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon)_{ij} (\text{def } \mathbf{v})_{hl} d\mathbf{x} + \int_Q b_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon) (\text{def } \mathbf{v})_{ij} d\mathbf{x} = - \int_Q f \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad (1.10)$$

для любой $\mathbf{v} \in \{H_0^1(Q)\}^3$. В силу леммы 1 и условий на $\{r_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)\}$, $\{b_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon)\}$ последовательности $\{F_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon\}$ и $\{\sigma_{ij}^\varepsilon\} = \{a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon) (\text{def } F_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon)_{hl} + b_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon)\}$ ограничены в $\{H_0^1(Q)\}^3$ и $L_2(Q)$ соответственно, в силу чего (1.8), (1.9) выполнены для некоторой подпоследовательности. Сохраним за этой подпоследовательностью индекс ε . Тогда в силу (1.8) из (1.10) предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем

$$\int_Q \sigma_{ij} (\text{def } \mathbf{v})_{ij} d\mathbf{x} = - \int_Q f \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad (1.11)$$

для всех $\mathbf{v} \in \{H_0^1(Q)\}^3$. Далее, функции $N^{mn}(\mathbf{y})$, определенные в (1.5), (1.6), продолжают по периодичности на все пространство R^3 , в силу чего в R^3 определены функции $F_\varepsilon N^{mn}(\mathbf{x}/\varepsilon)$. Оператор продолжения F_ε определен локально на ячейках P_ε [4], в силу чего функция $F_\varepsilon N^{mn}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ периодична в R^3 с ячейкой периодичности P_ε . Введем $\mathbf{w}^\varepsilon = \varepsilon F_\varepsilon N^{mn}(\mathbf{x}/\varepsilon) + \delta_{im} x_n \mathbf{e}_m$ (индексы m, n фиксированные). Для \mathbf{w}^ε в силу (1.5), (1.6) имеет место равенство

$$\int_Q a_{ijkl} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) (\text{def } \mathbf{w}^\varepsilon)_{ij} (\text{def } \Psi)_{hl} d\mathbf{x} = 0 \quad (1.12)$$

для всех $\Psi \in \{H_0^1(Q)\}^3$ (обращение Ψ в нуль на ∂Q является существенным условием). Возьмем произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ и положим в (1.10) $\mathbf{v} = \varphi \mathbf{w}^\varepsilon \in \{H_0^1(Q)\}^3$, а в (1.12) $\Psi = \varphi F_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon \in \{H_0^1(Q)\}^3$, после чего вычтем из (1.12) равенство (1.10). Приведя подобные с учетом симметрии упругих постоянных $\{a_{ijkl}\}$, получим

$$\int_Q \left\{ \left[a_{ijkl} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) w_{k,l}^\varepsilon \right] \varphi_{,j} u_i^\varepsilon - \left[a_{ijkl} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) (F_\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon)_{hl} \right] \varphi_{,j} w_i^\varepsilon - \right. \quad (1.13) \\ \left. - \left[b_{ij} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) w_{i,j}^\varepsilon \right] \varphi - \left[b_{ij} \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \varphi_{,j} w_i^\varepsilon \right] \right\} d\mathbf{x} = - \int_Q f_i \varphi w_i^\varepsilon d\mathbf{x}$$

Как следует из определения \mathbf{w}^ε , при $\varepsilon \rightarrow 0$ $w_i^\varepsilon \rightarrow \delta_{im} x_n$ в $L_2(Q)$. Перейдем в (1.13) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. С учетом (1.8), (1.9) и сходимости w_i^ε получим

$$\int_Q \{a_{ijmn}^* \varphi_{,j} u_{,i} - \sigma_{ij} \varphi_{,j} [\delta_{im} x_n]\} dx - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q \left[b_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) w_{i,j}^\varepsilon \right] \varphi dx = \quad (1.14)$$

$$= \int_Q f_i \varphi [\delta_{im} x_n] dx = \int_Q \{-\sigma_{ij} \varphi_{,j} [\delta_{im} x_n] - \sigma_{ij} \varphi_{,j} [\delta_{im} x_n]\} dx$$

Последнее равенство в (1.14) есть следствие (1.11) при $v = \varphi \delta_{im} x_n e_m \in \{H_0^1(Q)\}^3$. Отметим, что присутствующий в левой части (1.14) предел связан как раз с рассмотрением термоупругой задачи, в задаче теории упругости (при $\{\beta_{ij}(x/\varepsilon)\} = 0$) он отсутствует. Рассмотрим этот предел подробнее.

Лемма 3. При $\varepsilon \rightarrow 0$ существует слабый предел последовательности функций $\{b_{ij}(x/\varepsilon) w_{i,j}^\varepsilon\}$ в $L_2(Q)$. Имеет место равенство (m, n — зафиксированные при определении функций N^{mn} индексы):

$$w\text{-lim}(L_2) (b_{ij}(x/\varepsilon) w_{i,j}) = \langle b_{mn} \rangle + \langle b_{ij} N_{i,j}^{mn} \rangle = b_{mn}^* \quad (1.15)$$

где $w\text{-lim}(L_2)$ обозначает слабый предел в $L_2(Q)$ [1].

Доказательство следует из периодичности функций $b_{ij}(x/\varepsilon) w_{i,j}^\varepsilon = b_{ij}(x/\varepsilon) (F_\varepsilon N^{mn})_{i,j}(x/\varepsilon) + \delta_{im} \delta_{jn}$ и известной связи между слабым пределом в $L_2(Q)$ и средним по ячейке периодичности для периодических функций аргумента x/ε [1, 2]. С учетом (1.15) из (1.14) получаем

$$\int_Q [a_{ijmn}^* u_{,i} \varphi_{,j} - b_{mn} \varphi] dx = - \int_Q \sigma_{mn} \varphi dx \quad (1.16)$$

для любой $\varphi \in C_0^\infty(Q)$. Проинтегрировав первый член (1.16) по частям, приходим к равенству

$$\int_Q [\sigma_{mn} - (a_{ijmn}^* u_{i,j} + b_{mn}^*)] \varphi dx = 0 \quad (1.17)$$

для любой $\varphi \in C_0^\infty(Q)$. В силу симметрии $a_{ijmn}^* = a_{mnij}^*$ [4] из (1.17) получаем

$$\sigma_{mn} = a_{mnij}^* u_{i,j} + b_{mn}^* = a_{mnij}^* (\text{def } u)_{ij} + b_{mn}^* \quad (1.18)$$

Следовательно, предельная функция u есть решение сильно эллиптической системы (так как $\{a_{ijkl}^*\}$ задают сильно положительно-определенную форму на $(R^3)^2$ [2]), в силу чего элемент u единствен. Тогда (1.8), (1.9) выполнены для всей последовательности индексов ε . Доказательство закончено.

Величины $\{b_{mn}^*\}$, определенные (1.15), естественно назвать усредненными характеристиками теплового расширения и определить усредненные коэффициенты теплового расширения высокопористого композиционного материала формулой $\{\beta_{ij}^*\} = -\{a_{ijkl}^*\}^{-1} \{b_{kl}^*\}$. Как следует из (1.8), (1.9), (1.18), такое определение гарантирует, что при $\varepsilon \ll 1$ поведение исходного композита будет близко к поведению материала с упругими постоянными $\{a_{ijkl}^*\}$ и коэффициентами теплового расширения $\{\beta_{ij}^*\}$ (имеет место близость перемещений, средних напряжений (1.8), (1.9), и, как можно проверить, пользуясь (1.8), (1.9), близость энергий деформации [7]).

Формулы (1.15) дают выражение усредненных характеристик теплового расширения $\{b_{ij}^*\}$ композита через решение ячеечной задачи теории упругости (1.5), (1.6) и характеристики теплового расширения компонентов композита. Формулы (1.15), ранее не приводившиеся в литературе, удобны при численном счете, так как дают возможность вычислять упругие и термоупругие усредненные характеристики композитов через решение одной ячеечной задачи (теории упругости). При проведении анализа ячеечной задачи удобно исходить из выражения $\{b_{ij}^*\}$ через решение термоупругой задачи (такое выражение имеет место в случае сплошных

композиатов [6]). Рассмотрим по аналогии с [6] термоупругую ячеичную задачу относительно функции N° :

$$[a_{ijkl}(\mathbf{y})N_{h,l} + b_{ij}(\mathbf{y})]_{,j} = 0 \quad (\mathbf{y} \in K_1) \quad (1.19)$$

$$[a_{ijkl}(\mathbf{y})N_{h,l} + b_{ij}(\mathbf{y})]n_j = 0 \quad (\mathbf{y} \in \partial K_1 \setminus \partial P_1) \quad (1.20)$$

$$[a_{ijkl}(\mathbf{y})N_{h,l}^\circ + b_{ij}(\mathbf{y})]n_j, \quad N^\circ \in \Pi(P_1) \quad (1.21)$$

Лемма 4. Имеет место равенство

$$b_{mn}^* = \langle b_{mn} \rangle + \langle b_{ij} N_{i,j}^{mn} \rangle = \langle b_{mn} \rangle + \langle a_{mnhl} N_{h,l}^\circ \rangle \quad (1.22)$$

Доказательство. Умножим (1.19) на N_i^{mn} и проинтегрируем по частям на K_1 . С учетом условия периодичности (1.21) граничные интегралы в формуле интегрирования по частям имеют вид

$$\begin{aligned} & \int_{\partial P_1 \setminus \partial K_1} (a_{ijkl}(\mathbf{y})N_{h,l}^\circ + b_{ij}(\mathbf{y}))n_j N_i^{mn} dy = \\ & = \sum_{i=1}^3 \int_{\Pi_i^+ \cap \partial K_1} [(a_{ijkl}(\mathbf{y})N_{h,l}^\circ + b_{ij}(\mathbf{y})N_i^{mn})^+ -]_i n_j dy = 0 \end{aligned}$$

где Π_i^\pm — грани ячейки периодичности P_1 , лежащие в плоскостях $y_i = \pm h_i/2$; через $[f]_{-i}^+$ обозначена разность значений функции f на гранях Π_i^\pm . При этом использована противоположность нормалей $\{n_j\}$ к граням Π_i^+ и Π_i^- . Граничные интегралы по $\partial K_1 \setminus \partial P_1$ в силу (1.20) равны нулю. В итоге получаем

$$\langle a_{ijkl} N_{hl}^\circ N_{i,j}^{mn} \rangle + \langle b_{ij} N_{i,j}^{mn} \rangle = 0 \quad (1.23)$$

Из (1.5), (1.6) аналогично получаем равенство

$$\langle a_{ijkl} N_{hl}^{mn} N_{i,j}^\circ \rangle + \langle a_{mnij} N_{i,j}^\circ \rangle = 0 \quad (1.24)$$

Сравнение (1.23) с (1.24) с учетом $a_{ijkl} = a_{hlij}$ приводит к (1.22). Доказательство закончено. Ячеичная задача термоупругости (1.19)–(1.21) является искомой.

Замечания. 1. Задача (1.19)–(1.21) определяет функцию N° с точностью до постоянной, не влияющей на $\{b_{mn}^*\}$. Обычно выделяют решение (1.19)–(1.21) условием $\int N^\circ(\mathbf{y}) dy = 0$ (интегрирование производится по области K_1). Как следует, например, из [3], указанное условие выделяет единственное решение.

2. В формулу (1.22) фактически входят только деформации, определяемые из решения ячеичной задачи.

Следствие. Для каркаса, выполненного из материала с не зависящими от x коэффициентами теплового расширения, в частности для каркаса из однородного материала, усредненные коэффициенты теплового расширения $\{\beta_{ij}^*\} = \{\beta_{ij}\}$.

Доказательство. По условию, $\{\beta_{ij}\} = \text{const}$ в Q . Следуя [6], введем функцию $N_n^\circ(\mathbf{y}) = \beta_{mi} N_i^{mn}(\mathbf{y})$, где $N^{mn}(\mathbf{y})$ — решение задачи (1.5), (1.6). Сравнительная задача (1.5), (1.6) и (1.19)–(1.21), нетрудно убедиться, что при $\{\beta_{ij}\} = \text{const}$ функция $N^\circ(\mathbf{y})$ является решением (1.19)–(1.21). После чего из (1.22) и (1.7) получаем, что $\{b_{ij}^*\} = -\{a_{hlij}^*\} \{\beta_{ij}\}$. Откуда $\{\beta_{ij}^*\} = \{\beta_{ij}\}$ для любого распределения локальных упругих постоянных $\{a_{ijkl}(x/\varepsilon)\}$.

2. **Вычисление усредненных термоупругих постоянных композиционных каркасов.** В [5] изложен метод приближенного вычисления усредненных упругих постоянных каркасных конструкций, основанный на том, что для каркасов ячеичная конструкция — область K_1 занятая материалом, представляет собой балочную или оболочечную конструкцию (так как область K_1 занимает незначительную часть ячейки периодичности P_1). Это

позволяет применить для решения ячеечной задачи соответствующие методы теории балок, пластинок и оболочек. Указанный подход может быть использован и для решения термоупругой ячеечной задачи (1.19) — (1.21).

Обозначим μ_1, μ_2, μ_3 характерные размеры элементов, образующих ячейку K_1 , вдоль соответствующих осей координат. В зависимости от того, одна или две из величин μ_i являются малыми $0 < \mu_i \ll h_i \sim 1$, имеем оболочечную или балочную конструкцию [8, 9]. Отметим, что величина $1 - \mu_i/h_i$, или $1 - \mu_i \mu_j / h_i h_j$, есть пористость конструкции p . Для применения полученных результатов, использующих неравенство Корна [4], величины μ_i должны быть фиксированными, хотя бы и малыми. Физически это соответствует рассмотрению высокопористых каркасов, пористость p которых при уменьшении размера пор ε остается постоянной. Далее, осуществляя аппроксимации ячеечной задачи теории термоупругости задачами теории балок, пластинок и другими, будем ориентироваться на показатель тонкостенности ячеечной конструкции $\mu_i/h_i \leq 10^{-1}$ (при котором указанные аппроксимации могут быть применены [8, 9]). Физически это соответствует рассмотрению достаточно широко распространенных каркасов с пористостью $p \geq 0,9$.

Пусть выбранная теория балок, пластинок и так далее имеет погрешность аппроксимации соответствующей задачи теории термоупругости, равную α , в том смысле, что для решения задачи (1.19) — (1.21) $N^\circ(y)$ и функции $U(y)$; восстановленной на основании принятых кинематических гипотез во всей области K_1 по решению задачи теории балок или оболочек $\{v_\gamma, w_\gamma\}$ (индексом γ нумеруются элементы конструкции), выполнено неравенство

$$\|N^\circ - U\| = \|\text{def } N^\circ - \text{def } U\|_{L_2(K_1)} \leq \alpha \quad (2.1)$$

Введем величины

$$B_{mn} = \langle b_{mn} \rangle + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \int_{K_1} a_{mnl} (y) (\text{def } U)_{kl} dy \quad (2.2)$$

которые естественно назвать приближенными усредненными термоупругими характеристиками каркаса (в том смысле, что для их вычисления использованы приближенные решения задачи (1.19) — (1.21)).

Лемма 5. Величины $\{B_{mn}\}$ аппроксимируют в норме R^9 точные значения усредненных термоупругих постоянных $\{b_{mn}^*\}$ с точностью

$$\Lambda_0 = a^\circ \alpha (\text{mes } K_1)^{1/2} / (h_1 h_2 h_3) \quad (2.3)$$

где $a^\circ = \max_{i,j,k,l} |a_{ijkl}|$.

Решение задачи термоупругости u с точными значениями усредненных постоянных $\{a_{ij}^*, \{b_{ij}^*\}$ аппроксимируется в норме $\{H^1(Q)\}^3$ решением V задачи с приближенными значениями $\{A_{ijkl}\}, \{B_{ij}\}$ этих постоянных (по поводу $\{A_{ijkl}\}$ см. [5]) с точностью

$$\Lambda_1 = (\alpha \|V\| C_1 + \alpha^{1/2} C_2) / \beta(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \quad (2.4)$$

где $\beta(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ — постоянная эллиптичности оператора с коэффициентами $\{A_{ijkl}\}$ [5]. Постоянная C_1 в (2.4) имеет порядок $\max_{\alpha, \beta} \|U^{\alpha\beta}\|$ (величины

$U^{\alpha\beta}$ определены в [5]), постоянная C_2 определяется только величиной $\max_{i,j,k,l} |A_{ijkl}|$ [5]. Кроме того

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - V\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \leq C_B \Lambda_1$$

при фиксированных, хотя бы и малых μ_1, μ_2, μ_3 . Постоянная C_B есть норма оператора вложения пространства $\{H_0^1(Q)\}^3$ в $L_2(Q)$.

Доказательства утверждений леммы 5 подобны проводившимся в [5] для задачи теории упругости. Из леммы 5 следует, что приближенные значения термоупругих постоянных $\{B_{ij}\}$ действительно аппроксимируют точные значения $\{b_{ij}^*\}$, а решение V соответствующей задачи термоупругости аппроксимирует как решение u задачи с точными значениями усредненных характеристик, так и решение u^0 исходной задачи (1.1)–(1.3) в нормах и с точностью, указанной в лемме.

3. Балочные каркасы. Типичные примеры ячеек периодичности плоских балочных каркасов приведены на фиг. 1, 2. Обозначим v_γ, w_γ касательные и нормальные перемещения точек γ -й балки, $\gamma=1, \dots, M$ (M – общее число балок, образующих ячейку периодичности каркаса). В рамках гипотезы о недеформируемой нормали [8] получаем аналогично [5], что $\{v_\gamma, w_\gamma\}$ удовлетворяют уравнениям термоупругого равновесия балок с нулевыми массовыми силами и красвым условием

$$N e_{1\gamma} + Q e_{2\gamma}, M, n_\gamma - e_{2\gamma}, v_\gamma e_{1\gamma} + w_\gamma e_{2\gamma} + 1/2 h_\gamma (n_\gamma - e_{2\gamma}) \in \Pi(P_i) \quad (3.1)$$

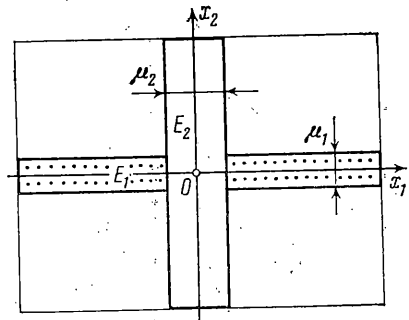
где N – растягивающее усилие, Q – перерезывающая сила, M – момент, $e_{1\gamma}, e_{2\gamma}$ – касательный и нормальный орты оси балки. Отметим, что при восстановлении функции $U(y)$ по решению задачи теории балок $\{v_\gamma, w_\gamma\}$ должны использоваться гипотезы, учитывающие тепловое расширение балок как вдоль, так и поперек их осей.

Рассмотрим плоский балочный каркас, ячейка периодичности P_i которого изображена на фиг. 1. Будем применять гипотезу о недеформируемой нормали (с условием равенства нулю нормальных напряжений в балках): Рассмотрим горизонтальную балку. Уравнения равновесия для нее имеют вид [8, 9]: $(E_1^0(v_1' - \beta_1))' = 0$, $(D w_1'')' = 0$, где $E_1^0 = E_1 \mu_1 (1 + \beta_1)$, $D = 1/12 E_1 \mu_1^3 (1 + \beta_1)^3$, μ_1 – толщина балки при нулевой температуре. При вычислениях E_1^0, D учтено, что деформация балки в поперечном направлении есть $e_{22} = \beta_1 - \nu(e_{11} - \beta_1)$. Краевые условия (3.1) с учетом периодичности векторов $e_{1\gamma}, e_{2\gamma}$ приводятся к следующим: $v_1, v_1', w_1, w_1', w_1'', w_1'''$ периодичны на $[-h_1/2, h_1/2]$. Полученная задача имеет решение $v_1 = C_3, w_1 = C_4$. Деформации в области, занятой балкой, восстановленные на основании принятых гипотез (т. е. def U), есть $e_{11} = e_{12} = e_{21} = 0, e_{22} = \beta_1(1 + \nu)$. Аналогичные формулы для вертикальной балки получаются взаимной заменой индексов 1 и 2. Подставляя полученные выражения в (2.2) с учетом замечания 2 и интегрируя по осям балок, получим $B_{ii} = -\beta_i E_i (1 + \beta_i) \mu_i / h_i, B_{ij} = 0 (i \neq j)$. Усредненные коэффициенты теплового расширения каркаса даются формулой $\{\omega_{ij}\} = -\{A_{ijkl}\}^{-1} \{B_{kl}\}$, где $\{A_{ijkl}\}$ – усредненные упругие постоянные. Как следует из [5], для рассматриваемого каркаса $A_{iiii} = -E_i \mu_i (1 + \beta_i) / h_i (i=1, 2)$, остальные A_{ijkl} равны нулю. Отсюда $\omega_{ii} = \beta_i (i=1, 2)$, остальные ω_{ij} равны нулю. Отметим, что рассмотренный каркас является композиционным ($E_1 \neq E_2, \beta_1 \neq \beta_2$) и следствие на него не распространяется. В рассматриваемом случае имеет место эффект расщепления усредненного оператора [3]: усредненные характеристики в направлении осей Ox_1 и Ox_2 вычисляются независимо. Методами [5] можно проверить, что для ячейки K_1 , достаточно жесткой на изгиб ($E_1 \mu_1^3 \gg 1$), погрешность в (2.4) имеет порядок $\alpha^{1/2}$. Рассмотренный пример достаточно исчерпывающе характеризует метод сведения ячейочной задачи термоупругости (1.19) – (1.24) к задаче деформирования балочной конструкции и способ вычисления приближенных значений усредненных термоупругих характеристик каркаса.

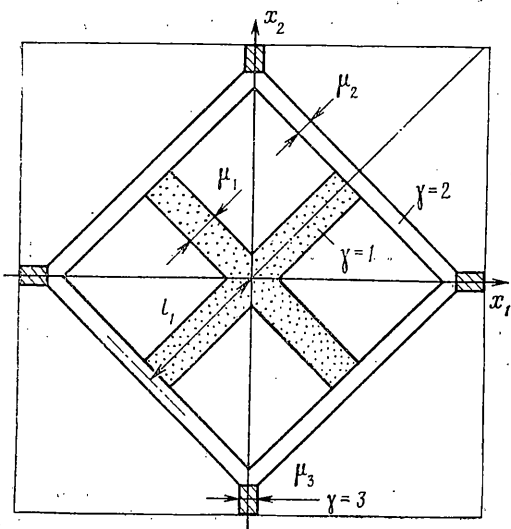
Укажем плоский балочный каркас, обладающий отрицательными коэффициентами теплового расширения. Проведем некоторые вспомогательные преобразования. Умножим (1.19) на функцию $F(y) = \delta_{im} y_n e_m$ и проинтегрируем по частям в области K_1 . При $m=n=1$ получим

$$b_{11}^* = \langle b_{11} + a_{11k1} N_{k,1} \rangle = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\partial P_1 \cap \partial K_1} \sigma_{1j} n_j y_1 dy = \\ = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\int_{\Pi_1 \cap \partial K_1} + \int_{\Pi_2 \cap \partial K_1} \right) \sigma_{11} n_1 y_1 dy = \frac{1}{h_2} \int_{\Pi_1 \cap \partial K_1} \sigma_{11} dy_2$$

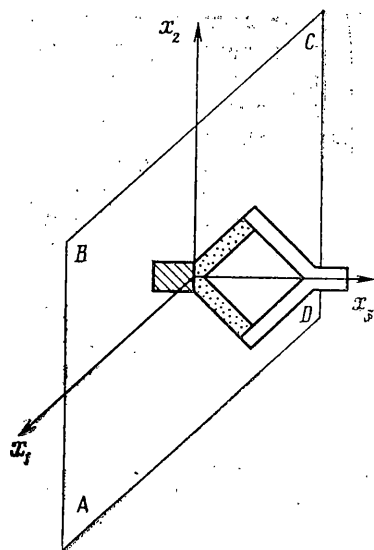
Рассмотрим симметричный каркас, ячейка периодичности которого изображена на фиг. 2. Усредненный коэффициент теплового расширения этого каркаса равен $\omega_{11} = (1 - \nu_{12}) B_{11} / E_{11} = \omega_{22}$, где E_{11}, ν_{12} – усредненные модули Юнга и коэффициенты Пуассона. Поскольку $1 - \nu_{12} > 0$, для построения каркаса с положительными B_{ii} и соответственно с отрицательными коэффициентами теплового расширения достаточно указать такие характеристики балок $E_\gamma, \beta_\gamma, \mu_\gamma (\gamma=1, 2, 3)$, образующих кар-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

кас, чтобы в термоупругой задаче напряжение σ_{11} было положительным (E_T, β_T — модуль Юнга и коэффициент теплового расширения γ -го элемента каркаса, см. фиг. 2). Было выполнено решение ячеечной задачи для конструкции, изображенной на фиг. 2. Размер ячейки P_1 в расчетах был взят 1×1 , остальные характеристики конструкции указаны на фиг. 2. С использованием гипотезы недеформируемой нормали при $\nu = 1/3$ получено следующее выражение:

$$\sigma_{11} = \frac{\mu_2 E_3 \beta_2}{h_2} \left[\frac{l_1}{\mu_1} \left(\frac{E_2}{E_1} + \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) - \frac{\sqrt{2}-1}{6\sqrt{2}} \left(\frac{l_1}{\mu_2} \right)^2 \right] \quad (3.2)$$

При $E_2/E_1 \gg 1$ или $\beta_1/\beta_2 \gg 1$ ($\beta_1, \beta_2 > 0$) выражение (3.2) становится положительным и каркас соответственно приобретает отрицательные коэффициенты теплового расширения (с точностью порядка α при условии достаточной жесткости элементов каркасной конструкции K_1 на изгиб: $E_T \mu_1^3 \approx 1$).

Укажем также пространственный каркас, обладающий отрицательными коэффициентами теплового расширения. Рассматриваемая задача основана на применении принципа расщепления усредненного оператора [3]. Из рассмотрения предыдущих задач следует, что если ячеечная конструкция K_1 представима в виде двух конструкций, лежащих в ортогональных плоскостях, то с точностью (2.3) ее усредненные характеристики в этих плоскостях вычисляются независимо. Пусть на фиг. 3 параллелограмм $ABCD$, лежащий в плоскости Ox_1x_2 , есть условное обозначение плоской конструкции с отрицательными коэффициентами теплового расширения, построенной выше. Тогда изображенная на фиг. 3 конструкция имеет в плоскости Ox_1x_2 коэффициенты теплового расширения (3.2), а в направлении оси Ox_3 — коэффициент теплового расширения, вычисляемый для балочной конструкции, изображенной на фиг. 3 в плоскости Ox_2x_3 . Подбором характеристик балок, образующих эту конструкцию, можно добиться отрицательности усредненного коэффициента теплового расширения ω_{33} . Несложные, но громоздкие выкладки, обосновывающие этот факт, не воспроизводятся. Таким образом, у каркаса, обладающего ячейкой периодичности P_1 , изображенной на фиг. 3, усредненные коэффициенты теплового расширения $\beta_{11}^*, \beta_{22}^*, \beta_{33}^*$ отрицательны с точностью, определяемой оценкой (2.3). Кубик, образованный на основе предложенного мелкоячеечного каркаса, при нагревании сожмется в направлении всех осей координат и уменьшится в объеме (разумеется, с макроскопической точки зрения, на микроуровне все компоненты каркаса расширяются, так как их локальные коэффициенты теплового расширения выбирались положительными).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp. 1978. 700 p.
2. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир. 1984. 472 с.
3. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука. 1984. 352 с.
4. Берлянд Л. В. О колебаниях упругого тела с большим числом мелких пустот // Докл. АН УССР. Сер. А. 1983. № 2. С. 3—5.
5. Коллаков А. Г. К определению усредненных характеристик упругих каркасов // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 969—977.

6. Колпаков А. Г. Эффективные термоупругие характеристики неоднородного материала // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-во Ин-т. гидродинамики СО АН СССР. 1980. Вып. 49. С. 45—55.
7. Колпаков А. Г. Эффективные жесткости композиционных пластинок // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 666—673.
8. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Физматгиз. 1963. 635 с.
9. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1979. 744 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
16.I.1986