$$K_{sc\tau}(t,\theta)=-K_{cs\tau}(t,\theta)=K_{cc}\exp(-\alpha\tau)\sin[{}^1/{}_2\lambda\Omega F(t,\theta)]$$
$$F(t,\theta)=\nu^{-1}\int\limits_{\theta}^{t}f(t')\,dt',\quad \tau=t-\theta \tag{7}$$

Отметим, что параметр $\lambda\Omega/(2\nu)$ может иметь величину порядка единицы, так что отличия решения (7) от соответствующего решения для системы без периодических изменений собственной частоты ($\lambda=0$) необязательно должны считаться малыми.

В силу линейности уравнений (3) процессы $x_c(t)$, $x_s(t)$ являются нормальными, так что из (7) можно согласно общей формуле [4] получить следующее выражение для нормированной автокорреляционной функции амплитуды $V_0(t)=x_c^2+x_s^2-K_{ss}-K_{cc}$ процесса $x(t)$:

$$\langle V_0(t)V_0(\theta)\rangle/\langle V_0^2(\theta)\rangle=R_c^2+R_s^2=\exp(-2\alpha\tau),\qquad \tau=t-\theta$$
$$R_c=K_{cc\tau}/K_{cc},\qquad R_s=K_{sc\tau}/K_{cc} \tag{8}$$

Таким образом, амплитуда процесса $x(t)$, представляющего установившееся движение системы (1) при $t\to\infty$, есть стационарный (по крайней мере, в широком смысле) случайный процесс. Более того, моменты первого и второго порядка этого процесса никак не зависят от медленных периодических изменений жесткости: они оказываются такими же, как и при $\lambda=0$. Напротив, процессы $x_c(t)$ и $x_s(t)$ не являются стационарными: в силу (7) их корреляционные функции зависят от обоих аргументов t, θ, а не только от разности $\tau=t-\theta$.

Решение (7) можно использовать для обнаружения периодических изменений собственной частоты и оценки уровня этих изменений (параметра λ) по данным измерений процесса $x(t)$. Для этого, по-видимому, удобно воспользоваться отношением взаимной и автокорреляционных функций $K_{sc\tau}(t,\theta)/K_{cc\tau}(t,\theta)=\mathrm{tg}[{}^1/{}_2\lambda\Omega F(t,\theta)]$ (разумеется, определение этих функций по известным реализациям периодически нестационарных процессов практически возможно лишь при условии, что частоты Ω и ν известны с большой точностью).

Отметим в заключение, что к полученному в данной работе решению можно прийти и другим путем – применив метод моментов непосредственно к точным уравнениям в стандартной форме относительно x_c, x_s (в предположении о том, что $\zeta(t)$ есть процесс типа белого шума) и воспользовавшись затем усреднением по методу Крылова – Боголюбова [5] для полученных точных уравнений с периодическими коэффициентами относительно моментов первого и второго порядков процессов x_c, x_s. Эта несколько более громоздкая процедура вывода доставляет строгое обоснование результатов, поскольку принцип усреднения для детерминистических систем строго доказан для бесконечного интервала времени [5] (тогда как в работе [2] такое доказательство дано лишь для конечных интервалов).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диментберг М. Ф.* Колебания линейной системы с периодическим параметрическим и внешним случайным возбуждением // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 2. С. 263–264.
2. *Хасьминский Р. З.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11. № 3. С. 444–462.
3. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука. 1980. 368 с.
4. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 1. М.: Сов. радио. 1966. 728 с.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз. 1958. 408 с.

Москва

Поступила в редакцию 3.XI.1986

УДК 531.8:534

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДВУНОГОЙ ХОДЬБЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ УПРАВЛЕНИИ

МАРТЫНЕНКО С. В.

Двуногие шагающие механизмы представляют собой управляемую механическую систему соединенных шарнирно физических маятников. Рассмотрим случай, когда управляющие силы заданы. Пусть механизм, имеющий n весомых звеньев и две невесомые стопы, движется по горизонтальной поверхности, причем фаза опоры на две ноги является мгновенной. Стопа в фазе опоры неподвижна относительно опорной поверхности. Считаем, что управляющие моменты в суставах механизма действуют в период двухопорной фазы, а в период одноопорной фазы происходит движение по инерции, т. е. рассмотрим задачу об импульсном управлении [1].

Уравнения движения в одноопорной фазе при сделанных предположениях можно представить в виде

$$(A+B)z^{\cdot\cdot}+Cz^{2\cdot}+D=0 \tag{1}$$

где A – постоянная матрица, z – вектор-столбец угловых отклонений звеньев, B, C, D – матрицы, элементы которых соответственно равны (γ_{ij}, δ_{ij} – постоянные, зависящие от геометрических и механических параметров механизма):

$$b_{ij}=\gamma_{ij}\cos(z_i-z_j),\qquad c_{ij}=\gamma_{ij}\sin(z_i-z_j)$$

$$d_{ij}=\delta_{ij}\sin z_i\quad (i,\ j=\overline{1,n})$$

К уравнениям движения (1) необходимо добавить условия повторяемости положения звеньев через период T одного шага механизма, т. е. краевые условия первого рода

$$z(0)=z_0,\quad z(T)=z_T \tag{2}$$

Таким образом, задача о движении двуногого механизма в математической постановке представляет собой нелинейную краевую задачу (1), (2).

Исследование задач типа (1), (2) на ЭВМ требует больших затрат машинного времени. Сложность исследования обусловлена тем, что система существенно нелинейна (соответствующая линейная задача имеет особенности типа резонанса). Нелинейная задача может иметь неединственное решение, причем найти требуется ту ветвь, которая не «порождается» линейной задачей. При этом область неединственности решений неизвестна. Ветви решения, не порождаемые линейной задачей, имеют место, например, в случае двузвенных ног и им соответствуют движения механизма, внешне похожие на ходьбу человека [1].

Следовательно, необходимо на первом этапе провести аналитические исследования с тем, чтобы выделить интересующую ветвь решения и область ее существования. Отметим, что неединственность решения обусловлена нелинейностью задачи.

Для построения приближенных решений используем идею метода Бубнова – Галеркина, который изложен в [2] для исследования линейных краевых задач первого рода.

Назовем замену переменных, позволяющую перейти к задаче с однородными краевыми условиями $z^{(0)}(t)$, нулевым приближением, а собственными функциями $W_i(t)$ – функции, которые образуют полную систему на $[0,\ T]$ и удовлетворяют однородным краевым условиям. Следовательно, решение в n-м приближении имеет вид

$$z^{(n)}=z^{(0)}(t)+\sum_{i=1}^{n}a_iW_i(t) \tag{3}$$

$$z^{(0)}(0)=z_0,\qquad z^{(0)}(T)=z_T$$

$$W_i(0)=W_i(T)=0\qquad (i=\overline{1,n})$$

Коэффициенты a_i разложения (3) выбираются так, чтобы решение (3) на $[0,\ T]$ удовлетворяло вариационным уравнениям [3]:

$$\int_0^T L\left[z^{(0)}(t)+\sum_{i=1}^{n}a_iW_i(t)\right]W_k(t)\,dt=0\qquad (k=\overline{1,n})$$

где через $L(z)$ обозначена левая часть уравнения (1).

Рассмотрим на примере движения шагающего робота вопрос о выборе нулевого приближения и собственных функций.

Считаем, что в нулевом приближении механизм представляет собой совокупность несвязанных маятников на неподвижном основании, т. е. условно «разрезаем» механизм в точках шарнирных соединений на составляющие его однозвенные маятники. Затем эта совокупность маятников «сращивается» в механизм в первом (втором и так далее) приближении.

Для простоты дальнейшего изложения рассмотрим двузвенный механизм при $n=2$, т. е. считаем что двуногая ходьба моделируется двузвенным маятником (типа «ходьбы» циркуля), при этом корпус механизма моделируется точечной массой в точке крепления звеньев. В нулевом приближении имеем два маятника – обыкновенный (переносимая нога в фазе переноса) и перевернутый (опорная нога в фазе опоры), причем

$$z_i(0)=(-1)^{i-1}z_i(T)\equiv\alpha\qquad (i=1,\ 2) \tag{4}$$

Согласно асимптотическому методу Боголюбова – Митропольского [4], решение в первом приближении для обыкновенного маятника, угол отклонения которого от вертикали z_2, имеет вид

$$z_2^{(1)}=a\cos kt+b\sin kt \tag{5}$$

При этом частота нелинейных колебаний k зависит от начальных условий. Для краевой задачи (1), (4) известно начальное положение и период T, поэтому в решении (5) считаем неизвестными a и k и подчиним это решение краевым условиям (4). Получим $a=\alpha$, $k=n\pi/T$ $(n=1,2,\ldots)$. Эти равенства показывают, что решение краевой задачи в n-м приближении можно представить в виде

$$z_2^{(n)}=\left(\alpha-\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\right)\cos\frac{\pi}{T}t+a_1\sin\frac{\pi}{T}t+\sum_{i=2}^{n}\left[\alpha_i\cos\frac{i\pi}{T}t+a_i\sin\frac{i\pi}{T}t\right] \quad (6)$$

Решение (6) охватывает возможные движения физического маятника. При этом ряд косинусов можно рассматривать как ряд, отвечающий за выполнение краевых условий, и с его помощью строить нулевое приближение, а ряд синусов – как ряд собственных функций.

Поставим задачу о нахождении решений, соответствующих одному качанию маятника. Тогда решение в первом приближении можно представить в виде

$$z_2^{(1)}=\alpha\cos\pi t/T+a_1\sin\pi t/T \quad (7)$$

где в правой части первое слагаемое представляет собой нулевое приближение задачи с одним качанием, второе – первую гармонику ряда собственных функций. Коэффициент a_1 определяется из вариационного уравнения, которое имеет три решения

$$a_1=0,\quad a_1^2=8[1-\alpha^2/8-\pi/(T^2\omega^2)] \quad (8)$$

Последние два решения существуют при

$$T>\pi(1-\alpha^2/8)^{-1/2}/\omega \quad (9)$$

Соответственно движению на фазовой плоскости назовем тривиальное решение (8) симметричным, а нетривиальное – несимметричным.

Таким образом, краевая задача о переводе маятника из начального положения в конечное за одно качание в первом приближении имеет не более трех решений (8). Область существования несимметричных решений представлена неравенством (9).

Исследования показывают, что для перевернутого маятника в качестве нулевого приближения можно взять решение соответствующей линейной задачи, а в качестве собственных функций – ряд синусов (6), т. е. решение в первом приближении представить в виде

$$z_1^{(1)}=\alpha\,\mathrm{sh}\,\zeta(^1/_2T-t)\,(\mathrm{sh}\,^1/_2\zeta T)^{-1}+b_1\sin\pi t/T \quad (10)$$

Следовательно, решение краевой задачи о движении двузвенника в первом приближении можно брать в виде (8), (10). При этом в уравнениях движения (1) учитываются нелинейности до третьего порядка включительно.

Вариационные уравнения для двузвенного механизма при этом представимы в виде (f_1, f_2 – некоторые функции ε):

$$a_1=b_1=0,\quad a_1^2=f_i(\varepsilon)\quad (i=1,2)$$
$$\varepsilon=b_1/a_1 \quad (11)$$

Тривиальное решение (11) соответствует симметричному движению. Для его построения необходимо учитывать следующую гармонику ряда синусов (заметим, что симметричное решение – это решение, которое порождается линейной задачей). Нетривиальные решения (11) существуют в некоторой области значений T, приближенную оценку которой, как показывают исследования, можно получить согласно неравенству (9). Для случая, когда неравенство (9) не выполняется, кривые (11) представлены на фиг. 1. Так как каждой точке пересечения этих кривых соответствует два несимметричных решения, то задача может иметь восемь несимметричных решений (четвертая точка при $\varepsilon\approx 8{,}5$ на фиг. 1 не приведена) и одно симметричное.

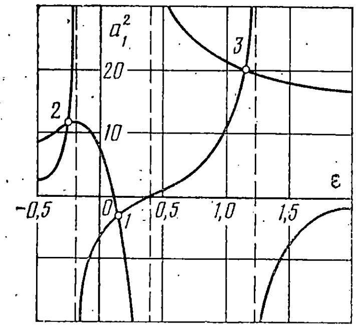
Из возможных решений выберем лишь те, при которых $|z_i|<\pi$. Этому условию «малости» удовлетворяют решения, соответствующие точке *1* на фиг. 1, причем, если условие (9) выполняется, эта точка переходит в верхнюю полуплоскость.

Можно показать, что при учете в уравнениях движения нелинейностей пятого порядка задача допускает 25 решений. При этом условию малости по-прежнему удовлетворяют два несимметричных решения, соответствующие точке *1* на фиг. 1. Следовательно, задачу в этом смысле можно рассматривать в первом приближении.

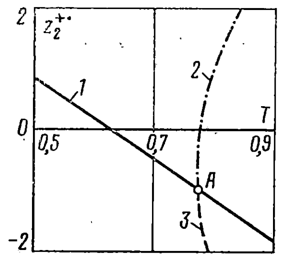
Для рассматриваемой модели механизма проведено сравнение приближенного решения и численного. Погрешность первого приближения по начальным скоростям звеньев не превосходит 10% при максимальном отклонении порядка 100°.

На фиг. 2 показана зависимость начальной скорости переносимой ноги $\dot z_2^{+}$ (c^{-1}) от периода шага $T(c)$. Кривые соответствуют (A – точка ветвления решений): *1* – симметричному решению; *2* – несимметричному решению с максимальным отклонением переносимой ноги вперед; *3* – несимметричному решению с максимальным отклонением переносимой ноги назад.

Аналогичные исследования проведены для трехзвенной (корпус – перевернутый маятник и две однозвенные ноги) и пятизвенной (корпус – перевернутый маятник



Фиг. 1



Фиг. 2

и две двузвенные ноги) моделей [1]. Как и для двузвенной модели, в случае трехзвенной и пятизвенной найдено три решения, удовлетворяющие условию малости. При этом для пятизвенной модели одно из несимметричных решений соответствует движению, внешне похожему на движение человека (переносимая нога движется все время коленом вперед над поверхностью), т. е. полученные типы движений аналогичны описанным в [1].

Во всех рассмотренных случаях область существования несимметричных решений можно определить рассматривая переносимую ногу как маятник на неподвижном основании. При этом получаем оценку снизу.

Относительная погрешность приближенных решений в сравнении с численным не превосходит 10%. Можно отметить, что погрешность линейной задачи для соответствующей ей симметричной ветви решения составляет в интервале $T\in[0{,}5;\ 1{,}0]$ 200–300%.

Таким образом, исследования показывают возможность проведения приближенного решения нелинейной краевой задачи по указанной выше схеме. Эта схема решения достаточно проста и поэтому может быть применена для исследования систем с несколькими степенями свободы. Получаемые приближенные решения при этом точно удовлетворяют краевым условиям и приближенно уравнениям движения. На этапе выбора нулевого приближения можно сразу рассматривать лишь те решения, которые приемлемы по условию задачи. Исследования также показывают, что от удачно выбранного нулевого приближения в основном зависит быстрота сходимости ряда (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Формальский А. М.* Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука. 1982. 368 с.
2. Вибрации в технике. Справочник. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем/Под ред. И. И. Блехмана. М.: Машиностроение. 1979. 351 с.
3. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М:. Наука. 1968. 560 с.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. 503 с.

Киев

Поступила в редакцию
8.IV.1985

---

[1] *Мартыненко С. В.* Исследование динамики шагающих механизмов при импульсном управлении. Киев, 1984. 16 с.– Деп. в УкрНИИНТИ 28.03.84; № 575.