УДК 534.014

О ВЛИЯНИИ МЕДЛЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ ЖЕСТКОСТИ НА КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ СЛУЧАЙНОЙ СИЛОЙ

ДИМЕНТБЕРГ М. Ф., МЕНЯЙЛОВ А. И., СОКОЛОВ А. А.

Методом усреднения с последующим применением метода моментов решена задача о влиянии медленных периодических изменений жесткости на колебания системы второго порядка, возбуждаемой случайной силой. Построен алгоритм идентификации медленных изменений собственной частоты в исходной системе.

Рассмотрим колебания системы с одной степенью свободы с широкополостным внешним случайным возбуждением и периодически изменяющейся жесткостью

$$x^{\bullet\bullet}+2\alpha x^{\bullet}+\Omega[1+\lambda f(\nu t)]x=\zeta(t) \qquad (1)$$

Здесь $\zeta(t)$ – стационарный центрированный широкополосный случайный процесс со спектральной плотностью $\Phi_{\zeta\zeta}(\Omega)$, а $f(\nu t)$ – периодическая функция с нулевым средним значением и частотой ν. В отличие от [1] будем считать частоту ν много меньшей, чем Ω и пропорциональной малому параметру, так же как и $\Phi_{\zeta\zeta}(\Omega)$, λ, α. Положив

$$x(t)=x_c(t)\cos\Omega t+x_s(t)\sin\Omega t, \qquad x^{\bullet}(t)\Omega(-x_c(t)\sin\Omega t+x_s(t)\cos\Omega t) \qquad (2)$$

получим из (1) систему уравнений в стандартной форме относительно $x_c(t)$, $x_s(t)$. Последующее применение операции усреднения за период в соответствии с теоремой работы [2] (при этом усреднении «медленная» функция f полагается постоянной) приводит к следующей системе укороченных стохастических уравнений относительно $x_c(t)$, $x_s(t)$:

$$x_c^{\bullet}=-\alpha x_c+{}^1/_2\lambda\Omega x_s f(\nu t)-\zeta_c(t), \qquad x_s^{\bullet}=-\alpha x_s-{}^1/_2\lambda\Omega x_c f(\nu t)+\zeta_s(t) \qquad (3)$$

где $\zeta_c(t)$, $\zeta_s(t)$ – эквивалентные некоррелированные белые шумы с одинаковой интенсивностью $D=\pi\Phi_{\zeta\zeta}(\Omega)/\Omega^2$.

Будем анализировать стохастические уравнения (3) методом моментов [3]. Начнем с моментов второго порядка $K_{cc,ss}=\langle x_{c,s}^2\rangle$, $K_{cs}=\langle x_c x_s\rangle$ значений процессов $x_c(t)$, $x_s(t)$ в совпадающие моменты времени (угловыми скобками обозначается вероятностное усреднение). Что касается моментов первого порядка $m_{c,s}=\langle x_{c,s}\rangle$, то из (3) можно получить для m_c, m_s систему уравнений вида (6) (см. ниже). Эта система допускает аналитическое решение в замкнутой форме вида (7), в силу которого $m_c(t)$, $m_s(t)$ экспоненциально затухают во времени, тогда как в данной заметке основной интерес представляет движение, которое устанавливается при $t\to\infty$.

Система трех уравнений для моментов второго порядка, получаемая из (3) согласно общей процедуре метода моментов, имеет вид

$$K_{cc}^{\bullet}=-2\alpha K_{cc}+\lambda\Omega K_{cs}f(\nu t)+D, \qquad K_{ss}^{\bullet}=-2\alpha K_{ss}-\lambda\Omega K_{cs}f(\nu t)+D$$
$$K_{cs}^{\bullet}=-2\alpha K_{cs}+{}^1/_2\lambda\Omega(K_{ss}-K_{cc})f(\nu t) \qquad (4)$$

Эта система уравнений имеет частное решение

$$K_{cc}=K_{ss}=D/2\alpha, \qquad K_{cs}=0 \qquad (5)$$

Можно найти и общее решение соответствующей однородной системы (4). Действительно, после замены $K_\pm=K_{cc}\pm K_{ss}$ из (4) выделяется уравнение первого порядка относительно K_+, которое оказывается несвязанным с парой уравнений относительно K_- и K_{cs}. Последняя имеет вид (6) и, следовательно, ее решение, так же как и процесс $K_+(t)$, экспоненциально затухает во времени. Таким образом, частное решение (5) действительно представляет установившееся движение системы при $t\to\infty$. Видно, что медленные периодические изменения собственной частоты на этом решении для дисперсий никак не сказываются.

Перейдем к определению корреляционных функций процессов $x_c(t)$, $x_s(t)$. Умножив уравнения (3), записанные для момента времени t, на $x_c(\theta)$, $\theta<t$, получим после вероятностного усреднения следующую систему двух уравнений относительно моментов $K_{cc\tau}=\langle x_c(\theta)x_c(t)\rangle$, $K_{cs\tau}=\langle x_c(\theta)x_s(t)\rangle$:

$$\dot{K}_{cc\tau}=-\alpha K_{cc\tau}+{}^1/_2\lambda\Omega K_{cs\tau}f(\nu t), \qquad \dot{K}_{cs\tau}=-\alpha K_{cs\tau}-{}^1/_2\lambda\Omega K_{cc\tau}f(\nu t) \qquad (6)$$

Аналогичная пара уравнений получается для моментов $K_{ss\tau}=\langle x_s(\theta)x_s(t)\rangle$, $K_{sc\tau}=\langle x_s(\theta)x_c(t)\rangle$. Решение этих уравнений и уравнений (6) должно удовлетворять начальным условиям $K_{ij\tau}(\theta,\theta)=K_{ij}$ $(i, j=c, s)$, где K_{ij} определены выражениями (5).

Систему уравнений (6) (и систему относительно $K_{ss\tau}$, $K_{sc\tau}$) удается решить в явном виде с помощью логарифмической замены переменных. Окончательный результат имеет вид

$$K_{cc\tau}(t,\theta)=K_{ss\tau}(t,\theta)=K_{cc}\exp(-\alpha\tau)\cos[{}^1/_2\lambda\Omega F(t,\theta)]$$

$$K_{s c \tau}(t,\theta)=-K_{c s \tau}(t,\theta)=K_{cc}\exp(-\alpha\tau)\sin[{}^1/{}_2\lambda\Omega F(t,\theta)]$$
$$F(t,\theta)=\nu^{-1}\int\limits_{\theta}^{t} f(t')\,dt',\quad \tau=t-\theta \tag{7}$$

Отметим, что параметр $\lambda\Omega/(2\nu)$ может иметь величину порядка единицы, так что отличия решения (7) от соответствующего решения для системы без периодических изменений собственной частоты ($\lambda=0$) необязательно должны считаться малыми.

В силу линейности уравнений (3) процессы $x_c(t)$, $x_s(t)$ являются нормальными, так что из (7) можно согласно общей формуле [4] получить следующее выражение для нормированной автокорреляционной функции амплитуды $V_0(t)=x_c^2+x_s^2-K_{ss}-K_{cc}$ процесса $x(t)$:

$$\langle V_0(t)V_0(\theta)\rangle/\langle V_0^2(\theta)\rangle=R_c^2+R_s^2=\exp(-2\alpha\tau),\qquad \tau=t-\theta$$
$$R_c=K_{cc\tau}/K_{cc},\qquad R_s=K_{sc\tau}/K_{cc} \tag{8}$$

Таким образом, амплитуда процесса $x(t)$, представляющего установившееся движение системы (1) при $t\to\infty$, есть стационарный (по крайней мере, в широком смысле) случайный процесс. Более того, моменты первого и второго порядка этого процесса никак не зависят от медленных периодических изменений жесткости: они оказываются такими же, как и при $\lambda=0$. Напротив, процессы $x_c(t)$ и $x_s(t)$ не являются стационарными: в силу (7) их корреляционные функции зависят от обоих аргументов t, θ, а не только от разности $\tau=t-\theta$.

Решение (7) можно использовать для обнаружения периодических изменений собственной частоты и оценки уровня этих изменений (параметра λ) по данным измерений процесса $x(t)$. Для этого, по-видимому, удобно воспользоваться отношением взаимной и автокорреляционных функций $K_{sc\tau}(t,\theta)/K_{cc\tau}(t,\theta)=\mathrm{tg}[{}^1/{}_2\lambda\Omega F(t,\theta)]$ (разумеется, определение этих функций по известным реализациям периодически нестационарных процессов практически возможно лишь при условии, что частоты Ω и ν известны с большой точностью).

Отметим в заключение, что к полученному в данной работе решению можно прийти и другим путем – применив метод моментов непосредственно к точным уравнениям в стандартной форме относительно x_c, x_s (в предположении о том, что $\zeta(t)$ есть процесс типа белого шума) и воспользовавшись затем усреднением по методу Крылова – Боголюбова [5] для полученных точных уравнений с периодическими коэффициентами относительно моментов первого и второго порядков процессов x_c, x_s. Эта несколько более громоздкая процедура вывода доставляет строгое обоснование результатов, поскольку принцип усреднения для детерминистических систем строго доказан для бесконечного интервала времени [5] (тогда как в работе [2] такое доказательство дано лишь для конечных интервалов).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диментберг М. Ф.* Колебания линейной системы с периодическим параметрическим и внешним случайным возбуждением // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 2. С. 263–264.
2. *Хасьминский Р. З.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11. № 3. С. 444–462.
3. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука. 1980. 368 с.
4. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 1. М.: Сов. радио. 1966. 728 с.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз. 1958. 408 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.XI.1986

УДК 531.8:534

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДВУНОГОЙ ХОДЬБЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ УПРАВЛЕНИИ

МАРТЫНЕНКО С. В.

Двуногие шагающие механизмы представляют собой управляемую механическую систему соединенных шарнирно физических маятников. Рассмотрим случай, когда управляющие силы заданы. Пусть механизм, имеющий n весомых звеньев и две невесомые стопы, движется по горизонтальной поверхности, причем фаза опоры на две ноги является мгновенной. Стопа в фазе опоры неподвижна относительно опорной поверхности. Считаем, что управляющие моменты в суставах механизма дейст-