

УДК 531.8

## О ДИНАМИКЕ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА ПРИ НАЛИЧИИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ОПОРНЫМ РЕАКЦИЯМ

ГОРИНЕВСКИЙ Д. М., ШНЕЙДЕР А. Ю.

Шестиногий шагающий аппарат представляет собой статически неопределимую механическую систему. Проблема распределения реакций опоры, действующих на ноги, — одна из ключевых при построении движений аппарата. Критерии, на основании которых может быть решена задача распределения, различны: это требования принадлежности опорных реакций конусам трения, минимизации потребляемой приходами энергии, равномерного давления ног на грунт и так далее [1–4]. Заданные значения опорных реакций можно поддерживать с помощью обратной связи по показаниям датчиков силы, расположенных в ногах [3, 5–8]. При наличии обратных связей по позиции и силе нога реагирует на внешнее воздействие как упругая пружина с податливостью, пропорциональной коэффициенту обратной связи по силе. Такое поведение называют «активной податливостью» [9]. Реализуя активную податливость ног шагающего аппарата, удастся управлять распределением опорных реакций при движении по жесткому и нежесткому грунту<sup>1</sup>.

Отметим, что при рассмотрении различных схем и алгоритмов обратной связи по усилиям в робототехнике недостаточно ограничиваться определением желаемого стационарного состояния исполнительного механизма. Может оказаться, что стационарное состояние неустойчиво, в системе возникают незатухающие колебания [10–12]. Наиболее распространенный подход к описанию динамики и управлению шагающим аппаратом состоит в раздельном рассмотрении движений ног и корпуса [4, 13, 14]. Однако при наличии обратной связи по опорным реакциям управляющие сигналы в каждой ноге зависят от движения корпуса аппарата и, тем самым, от движений других ног. Такое взаимодействие многих степеней свободы может приводить к возникновению в системе неустойчивости, незатухающих колебаний. Незатухающие колебания наблюдаются и экспериментально в лабораторном макете шестиногго шагающего аппарата при некоторых значениях коэффициентов обратной связи по усилию.

Публикуемая статья посвящена рассмотрению переходных процессов в шагающем аппарате при наличии обратной связи по опорным реакциям.

**1. Принятая модель. Уравнения движения.** Рассмотрим электромеханический шагающий аппарат, стоящий на  $N$  ногах. Будем изучать его малые движения вокруг положения равновесия. Введем связанную с корпусом систему координат с началом в его центре. Введем также неподвижную систему координат, совпадающую со связанной, когда аппарат находится в равновесии.

Пусть  $\mathbf{R}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$  — векторы малого линейного и углового перемещения корпуса относительно положения равновесия. Обозначим  $\mathbf{q} = \|\mathbf{R}', \boldsymbol{\varphi}'\|'$  — шестикомпонентный вектор перемещения. Здесь и далее штрих обозначает транспонирование. Будем считать, что конец каждой ноги связан с опорной поверхностью через упругий элемент датчика опорных реакций. Пусть  $\mathbf{u}_i$  — вектор малого смещения конца  $i$ -й ноги аппарата в неподвижной системе координат вследствие деформации этого упругого элемента. Обозначим  $\mathbf{x}_i$  — вектор малого перемещения конца  $i$ -й ноги в системе координат, связанной с корпусом. Перемещение  $\mathbf{x}_i$  линейно зависит от малых угловых перемещений в шарнирах ноги. Векторы  $\mathbf{x}_i$  и  $\mathbf{u}_i$  связаны соотношением [1]  $\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{R} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_i$ , где  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор конца  $i$ -й ноги в состоянии

<sup>1</sup> Гориневский Д. М., Шнейдер А. Ю. Управление опорными реакциями шагающего аппарата при движении по грунтам с различными несущими свойствами. Препринт. Москва: Ин-т пробл. передачи информ. 1986. 72 с.

равновесия. Запишем это соотношение в виде ( $L_i$  — матрица размером  $3 \times 6$ ):

$$y_i = x_i + L_i q \quad (1.1)$$

Кинетическую энергию малых движений представим в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i' A_i^0 x_i' + \frac{1}{2} q' A q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N y_i' A_i y_i' + \sum_{i=1}^N y_i' A_i^* q \quad (1.2)$$

Здесь матрица  $A$  — размером  $6 \times 6$ ,  $A_i^0$ ,  $A_i$  —  $3 \times 3$ ,  $A_i^*$  —  $3 \times 6$ . Матрицы  $A$ ,  $A_i^0$ ,  $A_i$ ,  $A_i^*$  ( $i=1, \dots, N$ ) считаем постоянными. Первая сумма в (1.2) — это кинетическая энергия вращения роторов электродвигателей в предположении о большом коэффициенте редукции в приводе, остальные члены — кинетическая энергия корпуса и опорных ног аппарата. Кинетическая энергия  $i$ -й ноги аппарата — квадратичная форма обобщенных координат  $q$  и  $y_i$ . Таким образом, квадратичный по  $q$  член в (1.2) — сумма кинетической энергии корпуса аппарата и квадратичных по  $q$  членов из кинетической энергии ног. Ноги, не контактирующие с опорной поверхностью, предполагаются неподвижными относительно корпуса, их кинетическая энергия входит в энергию корпуса. По предположению, каждая нога связана с жесткой опорной поверхностью через упругий, невесомый трехкомпонентный датчик силы, показания которого линейно зависят от его деформаций (малого перемещения конца ноги  $y_i$ ). При рассматриваемых малых движениях контакт ноги с опорной поверхностью не утрачивается. Обозначим  $C_i$  матрицу жесткости датчика. Потенциальная энергия упругих деформаций датчика

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N y_i C_i y_i \quad (1.3)$$

Введем диссипативную функцию Релея

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N y_i' B_i y_i' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i' B_i^0 x_i' \quad (1.4)$$

Первая сумма в (1.4) описывает диссипацию в конструкции датчика, вторая — в двигателях. Пренебрегая индуктивностью двигателей, считаем отклонения моментов в шарнирах ног аппарата от стационарных значений пропорциональными добавками к управляющим напряжениям, подаваемым на двигатели. Отклонения от стационарных значений обобщенных сил, действующих по координатам  $x_i$ , линейно связаны с этими моментами

$$Q_i = -G_i x_i - k F_i \quad (i=1, \dots, N) \quad (1.5)$$

где  $G_i$  — матрица размером  $3 \times 3$ , описывающая позиционную обратную связь в следящей системе. Матрицы  $G_i$  считаем симметрическими и положительно-определенными. Это так, если, например, позиционные обратные связи замыкаются на уровне приводов. При этом  $G_i = J_i' G_i^0 J_i$ , где  $J_i$  — якобиан перехода от малого перемещения конца ноги  $x_i$  к шарнирным углам, а  $G_i^0$  — диагональная матрица.

Вектор  $F_i = C_i y_i$  — отклонение силы, измеряемой датчиком в  $i$ -й ноге, от поддерживаемого значения. Второе слагаемое в формуле (1.5) описывает обратную связь по опорной реакции, в результате которой реализуется искусственная податливость ног аппарата.

Будем считать, что  $k > 0$  — скаляр, т. е. обратная связь по силе «изотропна». Это — упрощающее предположение, которое позволяет достаточно полно исследовать задачу. В общем случае  $k$  — матрица размером  $3 \times 3$ , вид которой зависит от способа организации обратной связи по силе. Можно, однако, обобщить дальнейшие результаты на случай, когда  $k$  — матрица, одинаковая для всех ног.

Действием сил тяжести пренебрежем. В самом деле, изменение соответствующих обобщенных сил при малом угловом отклонении  $\alpha$  в шарнирах имеет порядок  $P\alpha$ , где  $P$  — вес аппарата, а перемещения  $x_i$  и  $y_i$  — порядок  $l_*\alpha$ , где  $l_*$  — характерный размер звена. Таким образом, отношение гравитационных сил к управляющим в (1.5) имеет порядок  $P/(\gamma_*l_*)$ , где  $\gamma_*$  — характерная жесткость позиционной следящей системы. Эта величина равна отношению статической ошибки в позиционной следящей системе, вызванной действием веса аппарата, к размерам его звеньев, а это — малая величина. Аналогично силы тяжести малы и по сравнению с силами упругости из (1.3).

Пользуясь формулами (1.4) — (1.5), выпишем уравнения Лагранжа движения по обобщенным координатам  $q$  и  $x_i$ . Заменяя в этих уравнениях  $x_i$  на  $y_i$  в соответствии с (1.1), получим

$$\left( A + \sum_{i=1}^N L_i' A_i^* \right) \ddot{q} + \sum_{i=1}^N [(L_i' A_i + A_i^*) \ddot{y}_i + L_i' B_i \dot{y}_i + L_i' C_i y_i] = 0$$

$$(A_i^* - A_i^0 L_i^0 \ddot{q} - B_i^0 L_i^0 \dot{q} + G_i L_i^0 q + (A_i + A_i^0) \ddot{y}_i + (B_i + B_i^0) \dot{y}_i + [C_i(1+k) + G_i] y_i = 0 \quad (i=1, \dots, N) \quad (1.6)$$

Об устойчивости положения равновесия системы (1.6) можно судить по корням ее характеристического уравнения  $S(z) = 0$ . Отметим, что в рамках рассматриваемой модели упругости ноги можно также учесть податливость опорной поверхности.

**2. Устойчивость при «жестких» ногах.** Изучим поведение корней характеристического уравнения системы (1.6) в важном предельном случае «жестких» ног. Это случай, когда жесткость конструкций ног аппарата велика по сравнению с жесткостью позиционной следящей системы. Коэффициент обратной связи по усилиям при этом считается величиной порядка единицы. Будем считать, что

$$C_i = C_i^1 \lambda^2, \quad B_i = B_i^1 \lambda, \quad \lambda \gg 1, \quad \varepsilon = \lambda^{-1} \ll 1 \quad (2.1)$$

где  $\lambda$  — большой параметр. Такое соотношение между жесткостью и диссипацией соответствует случаю примерно постоянного декремента колебаний в конструкции при увеличении ее жесткости [15]. Корни характеристического уравнения системы (1.6) в случае (2.1) распадаются на две группы [16].

1. Рассмотрим сначала корни первой группы, имеющие порядок  $\lambda$ . Эти корни описывают быстрые движения ног аппарата при установлении стационарных значений сил реакции. Сделав в характеристическом уравнении системы (1.6) замену  $z = \lambda w$ , получим

$$\varepsilon^{6N+12} S(w) = O(\varepsilon) + S_1(w) w^{12} \quad (2.2)$$

Пользуясь теоремой Руше [17], можно показать, что  $6N$  корней характеристического уравнения (1.7) имеют вид  $z_j = \lambda w_j + O(1)$ , где  $w_j$  — корни уравнения

$$0 = S_1(w) = \det \begin{vmatrix} A + \sum_{i=1}^N L_i' A_i^* & \dots & P_j(w) & \dots & P_N(w) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_j^* - A_j^0 L_j & \dots & Q_j(w) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_N^* - A_N^0 L_N & \dots & 0 & \dots & Q_N(w) \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

$$P_n(w) = (L_n' A_n + A_n^*) w^2 + L_n' B_n^1 w + L_n' C_n^1$$

$$Q_n(w) = (A_n + A_n^0) w^2 + B_n^1 w + (1+k) C_n^1$$

После ряда преобразований, не изменяющих детерминант (сложение с коэффициентами строк и столбцов блочной матрицы в (2.3)); получим из уравнения (2.3) равносильное ему

$$\det A_q \cdot \det \|\Lambda w^2 + Mw + N\| = 0 \quad (2.4)$$

Здесь матрица  $A_q = A + \sum_{i=1}^N L_i' A_i^0 L_i$  — положительно-определенная и

симметрическая, как сумма симметрических и положительно-определенных;  $\Lambda = \Lambda_0 - \Lambda_1$ ,  $M$ ;  $N = N_0 - N_1$  — блочные квадратные матрицы размера  $3N$ , состоящие из блоков размером  $3 \times 3$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \text{diag} \{ (A_j^0 + A_j) \}, \Lambda_1 = \{ (L_i' A_i^0 - A_i^{*'})' A_q^{-1} (L_j' A_j^0 - A_j^{*'}) \} \\ M &= \text{diag} \{ B_j^4 \}, N_0 = \text{diag} \{ (1+k) C_j^4 \} \\ N_1 &= \{ k [ (L_i' A_i^0 - A_i^{*'}) A_q^{-1} L_j' C_j \} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Матрицы  $\Lambda_0$ ,  $\Lambda_1$ ,  $M$ ,  $N_0$  — симметрические и положительно-определенные. Симметрическая матрица  $\Lambda = \Lambda_0 - \Lambda_1$ , положительно определена. В самом деле, при  $k=0$  система асимптотически устойчива вследствие диссипативности, а значит, корни уравнения (2.4) лежат в левой полуплоскости. Поскольку при  $k=0$ ,  $M$  и  $N$  в (2.4) положительно определены,  $\Lambda$  также должна быть положительно определена.

Матрица  $N$  может быть симметрической и положительно-определенной, например, если  $A_i^{*'} = 0$ , и  $C_i^4 = \alpha A_i^0$  ( $i=1, \dots, N$ ), где  $\alpha > 0$  — скаляр. В частности, это условие выполнено, если все матрицы  $A_i^0$  и  $C_i^4$  шаровые — этот случай рассмотрен в п. 3. При этом корни уравнения (2.4) для всех  $k > 0$  лежат в левой полуплоскости.

В случае несимметрической матрицы  $N_1$  представим  $N$  в виде  $N = N_a + N_s$ , где  $N_a$  — коссимметрическая, а  $N_s$  — симметрическая матрицы. В соответствии с (2.5)  $N_a = k N_{a1}$  и  $N_s = N_{s0} + k N_{s1}$ . Представим характеристическое уравнение (2.4) в виде

$$\det \|\Lambda \xi^2 + \kappa M \xi + \kappa N_{s0} + N_{a1} + N_{s1}\| = 0 \quad (2.6)$$

где  $\xi = w k^{-1/2}$ ,  $\kappa = k^{-1/2}$ . В соответствии с теоремами Метелицына [18] уравнение (2.6) при  $\kappa=0$  «неустойчиво» — имеет корни в правой полуплоскости. Из теоремы Руше следует, что уравнение (2.6) неустойчиво и при достаточно малых  $\kappa$  (достаточно больших  $k$ ).

Условие устойчивости, приведенное в [18] для системы (2.4), имеет вид  $b_0^2 p > e^2 a$ , где  $a$  — значение квадратичной формы  $\mathbf{u}^* \Lambda \mathbf{u} = \mathbf{u}_1' \Lambda \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2' \Lambda \mathbf{u}_2$  на собственном векторе  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + i \mathbf{u}_2$  — нетривиальном решении системы уравнений  $(\Lambda w^2 + Mw + N) \mathbf{u} = 0$  ( $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_1' - i \mathbf{u}_2'$ ),  $b = \mathbf{u}^* M \mathbf{u}$ ,  $p = \mathbf{u}^* N_s \mathbf{u}$ ,  $e = 2 \mathbf{u}_2' N_a \mathbf{u}_1$ . Для выполнения этого неравенства на всех собственных векторах достаточно, чтобы на любом единичном векторе  $\mathbf{u}$  выполнялось неравенство

$$b_0^2 p > e^2 a \quad (2.7)$$

где  $b_0$  — минимальное значение формы  $b$ ,  $e^{02}$  — максимальное значение квадрата формы  $e$  на единичных векторах. Значения  $b$  и  $e^{02}$  могут быть определены как, соответственно, минимальное и максимальное собственные значения матриц  $M$  и  $E = N_a' N_a$ . Неравенство (2.7) при этом выполнено на любом векторе, если минимальное собственное число матрицы  $b_0^2 N_s - e^{02} \Lambda$  положительно.

2. Рассмотрим теперь корни второй группы, имеющие порядок единицы. Двенадцать таких корней описывают «медленные» движения корпуса и ног аппарата при абсолютно жестких датчиках опорных реакций.

Считая в характеристическом уравнении системы (1.7)  $z \sim 1$ , получим

$$\varepsilon^{6N} S(z) = O(\varepsilon) + S_2(z) \quad (2.8)$$

В соответствии с теоремой Руше, двенадцать корней уравнения (2.8) имеют вид  $z_{\varepsilon N+j} = z_j' + O(\varepsilon)$ , где  $z_j'$  — корни уравнения

$$0 = S_2(z) = \det \begin{vmatrix} \left( A + \sum_{i=1}^N L_i' A_i^* \right) z^2 & \dots & L_j' C_j^1 & \dots & L_n' C_n^1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_n(z) & \dots & 0 & \dots & (1+k) C_n^1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

$$R_n(z) = (A_n^* - A_n^0 L_n) z^2 - B_n^0 L_n z - G_n L_n$$

После ряда равносильных преобразований уравнение (2.9) примет вид

$$\det \|(A_q + k A_F) z^2 + Bz + G\| = 0 \quad (2.10)$$

Матрицы  $A_q = A + \sum L_i' A_i^0 L_i$ ,  $B = \sum L_i' B_i^0 L_i$ ,  $G = \sum L_i' G_i L_i$  положительно-определенные симметрические. Матрица  $A_F = A + \sum L_i' A_i^*$ , вообще говоря, несимметрическая. Представим матрицу  $A_q + k A_F$  в виде  $A_q + k A_F = A_s + A_a$ , где  $A_s$  — симметрическая,  $A_a$  — кососимметрическая матрицы. Сделаем в характеристическом уравнении (2.10) замену  $z = w^{-1}$ . Комплексное число  $z$  лежит в левой полуплоскости тогда и только тогда, когда в ней лежит  $w$ . Поэтому об устойчивости уравнения (2.10) можно судить по уравнению

$$\det \|G w^2 + Bw + A_s + A_a\| = 0 \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) имеет вид, сходный с уравнением (2.4). При  $k \rightarrow \infty$   $A_s \sim k$  и  $A_a \sim k$ . Поэтому, так же как и уравнение (2.4), уравнение (2.11) неустойчиво при достаточно больших  $k$ , если матрица  $A_a$  ненулевая. Пользуясь условием устойчивости, приведенным в [18], можно получить для уравнения (2.11) достаточное условие устойчивости, аналогичное условию (2.7):

$$b_0^2 a_0 - g^0 f^{02} > 0 \quad (2.12)$$

где  $g^0$  — максимальное,  $b_0$  и  $a_0$  — минимальные собственные значения, соответственно, матриц  $G$ ,  $B$  и  $A_s$ ;  $f^{02}$  — максимальное собственное значение симметрической матрицы  $F = A_a' A_a$ .

Отметим, что частоты «быстрых» движений растут с увеличением коэффициента обратной связи по силе  $k$ , как  $k^{1/2}$ . Можно предполагать поэтому, что рассмотренные асимптотики оправданы также и в случае, когда жесткости конструкции и позиционной обратной связи сравнимы, а значение коэффициента  $k$  велико.

Выполнение условий (2.7) и (2.12) проверялось численно для модели, соответствующей шагающему аппарату Института механики МГУ и Института проблем передачи информации АН СССР [14]. В результате моделирования получено, что при используемых коэффициентах обратной связи возникновение неустойчивости возможно только для быстрых движений. Этот вывод подтверждается экспериментально.

**3. Упрощенная модель ног.** Более подробно изучить поведение системы (1.6) удается в случае «изотропной» модели ног. Положим

$$A_i^* = 0, A_i = mE, A_i^0 = m_0 E, C_i = cE \quad (3.1)$$

$$B_i = \beta E, B_i^0 = \beta_0 E, G_i = \gamma E \quad (i=1, \dots, N)$$

где  $E$  — единичная матрица размером  $3 \times 3$ . Этот случай соответствует тому, что масса ног сосредоточена в их концах, а приведенные к концу ноги диссипация, жесткость позиционной обратной связи и инерция роторов электродвигателей изотропны. Матрицы жесткости датчика усилий и диссипации в датчике также предполагаются шаровыми. В случае (3.1) уравнения (1.6) примут вид ( $D$  — оператор дифференцирования по времени):

$$\begin{aligned}
 AD^2\mathbf{q} + (mD^2 + \beta D + c)\Sigma L_i' \mathbf{y}_i &= 0 \\
 - (m_0 D^2 + \beta_0 D + \gamma) L_i \mathbf{q} + [(m + m_0) D^2 + (\beta + \beta_0) D + \\
 + (1+k)c + \gamma] \mathbf{y}_i &= 0 \quad (i=1, \dots, N)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Обозначим  $L = \Sigma L_i' L_i$  матрицу размером  $6 \times 6$ ,  $Y = \Sigma L_i' \mathbf{y}_i$  — 6-мерный вектор ( $i=1, \dots, N$ ). Матрица  $L$  имеет физический смысл матрицы кинетической энергии невесомого твердого тела с  $N$  точечными единичными массами, закрепленными в точках опоры ног. Вектор  $Y = \|\mathbf{Y}_r, \mathbf{Y}_\alpha\|'$ , где  $\mathbf{Y}_r = \Sigma \mathbf{y}_i$  и  $\mathbf{Y}_\alpha = \Sigma \mathbf{r}_i \times \mathbf{y}_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) пропорциональны, соответственно, главному вектору и главному моменту сил, действующих со стороны ног на корпус. Сложив последние  $N$  уравнений в (3.2) с коэффициентами  $L_i'$ , получим

$$\begin{aligned}
 AD^2\mathbf{q} + (mD^2 + \beta D + c)Y &= 0 \\
 - (m_0 D^2 + \beta_0 D + \gamma) L \mathbf{q} + [(m + m_0) D^2 + (\beta + \beta_0) D + (1+k)c + \gamma] Y &= 0
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Отделившиеся уравнения описывают движения ног, не создающие главного вектора и главного момента сил, действующего на корпус, а приводящие только к перераспределению усилий между ногами. Корни отделившихся  $3N-6$  уравнений совпадают с корнями уравнения  $(m+m_0)z^2 + (\beta+\beta_0)z + (1+k)c + \gamma = 0$ . Это — уравнение затухающих колебаний, частота которых растет, как  $k^{1/2}$ , а декремент уменьшается, как  $k^{-1/2}$  при больших  $k$ .

Две симметрические, положительно-определенные матрицы  $A$  и  $L$  можно одновременно привести к диагональной форме. Пусть  $R'LR = \text{diag}\{l_n\}$ ,  $R'AR = \text{diag}\{M_n l_n\}$ , где  $R$  — матрица размером  $6 \times 6$ . Сделаем в (3.3) замену  $\mathbf{q} = R\xi$ ,  $Y = LR\eta$ . Система (3.3) при этом распадется на 6 не связанных систем с переменными  $\xi_n, \eta_n$ . Эти системы описывают движения корпуса аппарата по «нормальным» координатам. Характеристические уравнения движений по нормальным координатам имеют сходный вид ( $n=1, \dots, N$ ):

$$0 = S_n(z) = \det \begin{vmatrix} M_n z^2 & m z^2 + \beta z + c \\ -(m_0 z^2 + \beta_0 z + \gamma) & (m + m_0) z^2 + (\beta + \beta_0) z + (1+k)c + \gamma \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

В случае (2.1) жестких ног корни этого уравнения, имеющие порядок единицы, можно представить в виде  $z_j^{(n)} = z_j^{(n)'} + O(\varepsilon)$ , где  $z_j^{(n)'} — корни уравнения$

$$S_n'(z) = [(1+k)M_n + m_0]z^2 + \beta_0 z + \gamma = 0 \tag{3.5}$$

Уравнение затухающих колебаний (3.5) соответствует уравнению (2.9), если в (2.9) считать матрицы  $B_k^0, G_k$  шаровыми и  $A_k^* = 0$ . Выпишем характеристическое уравнение для движения по нормальным координатам  $\xi_n$  и  $\eta_n$ . В соответствии с (3.4), получим

$$\begin{aligned}
 a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 &= 0 \\
 a_4 = M_n(m + m_0) + m m_0, \quad a_3 = \beta(M_n + m_0) + \beta_0(M_n + m) \\
 a_2 = \gamma(M_n + m) + c(M_n + m_0) + k c M_n \\
 a_1 = c\beta_0 + \gamma\beta, \quad a_0 = c\gamma
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Коэффициенты характеристического полинома (3.6) положительны при всех значениях  $k \geq 0$ . Поскольку при  $k=0$  система устойчива, достаточно проверить лишь последнее условие Гурвица  $a_1 a_2 a_3 > a_1^2 a_4 + a_0 a_3^2$ . В левой части этого неравенства стоит монотонно возрастающая функция коэффициента  $k$ , правая часть от  $k$  не зависит. Значит, корни уравнения (3.6) лежат в левой полуплоскости при всех  $k > 0$ . Запас устойчивости по Цыпкину — Бромбергу [19] системы (3.6)  $\delta \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Сделаем в характеристическом уравнении замену  $w = z + \delta$ . Пользуясь условием, что после замены система находится на границе области устойчивости, получим из неравенств Гурвица асимптотическую формулу

$$\delta = (c\beta_0 + \gamma\beta) / (2kcM_n) + O(k^{-2}) \tag{3.7}$$

Определим теперь амплитудно-частотные характеристики системы. Эти характеристики нужны для сравнения с экспериментальными. Рассмотрим колебания аппарата под действием внешней вынуждающей силы. Будем считать, что на  $i$ -ю ногу действует внешняя сила  $f_i$ . В этом случае выражение (1.5) примет вид  $Q_i = -G_i x_i - k C_i y_i + f_i$ . Обозначим  $\Phi = R' \sum L_i f_i$ . После замены  $q = R \xi$ ,  $Y = LR \eta$  получим вместо уравнения движения (3.3) для  $n$ -й нормальной координаты

$$M_n D^2 \xi_n + (m D^2 + \beta D + c) \eta_n = 0, \quad -(m_0 D^2 + \beta_0 D + \gamma) \xi_n + \\ + [(m + m_0) D^2 + (\beta + \beta_0) D + \gamma + (1 + k) c] \eta_n = \Phi_n \quad (3.8)$$

Пусть выполнено предположение (2.4). В соответствии с теоремой Тихонова [20], в этом случае решение сингулярно возмущенной системы (3.8), начиная с некоторого момента времени, близко к решению невозмущенной системы

$$- \{ (1 + k) M_n + m_0 \} D^2 + \beta_0 D + \gamma \} \xi_n = \Phi_n \quad (3.9)$$

Амплитуда вынужденных колебаний  $\xi_n^0$  при действии гармонической возбуждающей силы с частотой  $\omega$  и амплитудой  $\Phi_n^0$  равна  $\xi_n^0 = W_n(\omega) \Phi_n^0$ ,  $W_n(\omega)$  — амплитудно-частотная характеристика. Согласно (3.9), имеем

$$W_n(\omega) = \{ [\gamma - \omega^2 (M_n (1 + k) + m_0)]^2 + \beta_0^2 \omega^2 \}^{-1/2} \quad (3.10)$$

Как видно из (3.10), увеличение коэффициента обратной связи должно приводить к уменьшению амплитуды вынужденных колебаний на высоких частотах. Амплитуда колебаний для  $\omega \rightarrow 0$  при этом не изменяется. При больших  $k$  ( $k \gg m_0^0 / M_n$ ) декремент колебаний и их частота убывают как  $k^{-1/2}$ .

**4. Сравнение с экспериментом.** В экспериментах использовался макет шестиного шагающего аппарата Института механики МГУ и Института проблем передачи информации АН СССР [3, 14]. Каждая нога аппарата — трехзвеник с тремя вращательными шарнирами, с одной стороны прикреплена к корпусу, с другой оканчивается стопой, подвешенной на трехступенном кардановом шарнире. Длины звеньев; считая от корпуса, 75, 100 и 174 мм (конец последнего звена считается расположенным в центре шарнира). Последнее звено ноги (голень) представляет собой упругий трехкомпонентный датчик усилий. В приводах используются двигатели постоянного тока и шестеренчатые редукторы. В позиционной следящей системе положение ноги определяется с помощью потенциометров, установленных в шарнирах.

В нашем случае жесткость ног  $c \approx 5 \cdot 10^4$  Н/м, приведенная к концам ног масса роторов электродвигателей  $m_0 \sim 10^3$  кг, коэффициент демпфирования в двигателях  $\beta_0 \approx 3 \cdot 10^4$  Н·с/м, жесткость позиционной обратной связи  $\gamma \approx 1,5 \cdot 10^8$  Н/м, масса корпуса аппарата 4 кг, ног — 16 кг (считаем приведенную массу аппарата при неподвижных концах ног  $M \sim 10$  кг), коэффициент обратной связи по усилиям составлял  $k \approx 80, 160, 320$ .

Поскольку жесткость позиционной следящей системы  $\gamma$  в три раза больше жесткости конструкции ног аппарата  $c$ , предположение (2.4) нельзя считать выполненным. Будем, однако, пользоваться для оценок результатами п. 2. Это оправдывается большими значениями коэффициента обратной связи по силе  $k$ , так как для справедливости асимптотических формул п. 2 важно, фактически, чтобы величина  $\gamma$  была малой по сравнению с произведением  $kc$ .

Воспользуемся для числовых оценок собственных частот моделью изотропных ног (3.1). При  $k = 160$  для быстрых движений получим  $\nu = (kc/m_0)^{1/2} / (2\pi) \approx 14$  Гц, для медленных —  $\nu = [\gamma / (m_0 + kM)]^{1/2} / (2\pi) \approx 1,2$  Гц, коэффициент затухания  $\xi = \beta_0 [\gamma (m_0 + kM)]^{-1/2} \sim 1$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае частоты быстрых движений на порядок больше частот медленных. Отметим, что для численной модели, описанной в п. 5, шесть частот медленных движений различаются менее чем в два раза.

При значительных коэффициентах усиления в цепи обратной связи по усилиям ( $k \approx 200$ ) для некоторых конфигураций шагающего аппарата наблюдались незатухающие колебания ног небольшой амплитуды и высокой частоты (около 10 Гц). Колебания корпуса при этом были малы. Можно предположить, что эти колебания соответствуют «быстрым» движениям в п. 2.

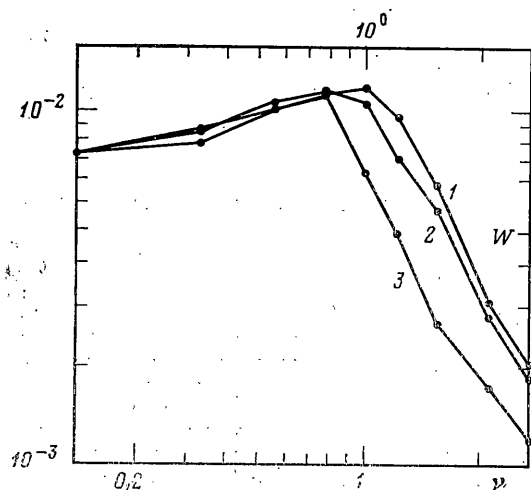
Движения корпуса аппарата сильно задемпфированы. Поэтому для определения характерных частот и коэффициентов затухания использовался метод амплитудно-частотных характеристик.

В эксперименте вынуждающая сила создавалась путем введения гармонической возмущающей добавки к напряжению на двигателях. Коммутация напряжения от генератора синусоидальных сигналов на приводы отдельных шарниров осуществлялась через аналого-цифровой и цифроаналоговый преобразователи универсальной цифровой вычислительной машины и преобразователи координат нижнего уровня

системы управления шагающим аппаратом так, чтобы возбуждались различные формы колебаний. Перемещения корпуса аппарата в процессе вынужденных колебаний регистрировали с помощью тонкой гибкой металлической пластины с наклеенными на нее тензорезисторами. Чувствительность такого датчика перемещений составляла около 3 В/см. Амплитуда возмущений силы была порядка  $10^3$  Н, амплитуда колебаний различных точек корпуса — порядка 1 см.

Амплитудно-частотные характеристики шагающего аппарата при колебаниях корпуса по углу тангажа, полученные для различных значений  $k$ , приведены на фигуре. Кривые соответствуют значениям: 1 —  $k=80$ , 2 —  $k=160$ , 3 —  $k=320$ . По осям отложены частота возбуждения  $\nu$  (Гц) и амплитуда колебаний  $W$  (мм/Н). Собственная частота системы составляет около 1 Гц, а коэффициент затухания  $\zeta \sim 1$ , что соответствует теоретической оценке. Как видно из фиг. 1, увеличение коэффициента обратной связи по силе  $k$  приводит к уменьшению амплитуды колебаний на высоких частотах, что соответствует выражению (3.10). Относительно небольшое изменение формы амплитудно-частотной характеристики при увеличении  $k$  можно объяснить тем, что приведенная масса роторов электродвигателей ног аппарата на два порядка больше массы корпуса.

**5. Численные результаты.** Опишем вначале динамическую модель аппарата. Аппарат состоит из прямоугольного корпуса и шести идентичных ног. Введем прямоугольную систему координат  $Oxyz$  с началом в центре корпуса. Ось  $x$  направим вдоль корпуса, ось  $z$  по строительной вертикали аппарата. Координаты точек подвеса ног  $(x_i^0, y_i^0, z_i^0)$ , где  $x_i^0 = a/2$  ( $i=1, 2$ );  $x_i^0 = 0$  ( $i=3, 4$ );  $x_i^0 = -a/2$  ( $i=5, 6$ );  $y_i^0 = b/2$  ( $i=1, 3, 5$ );  $y_i^0 = -b/2$  ( $i=2, 4, 6$ );  $z_i^0 = 0$  ( $i=1, \dots, 6$ ). Каждая нога состоит из трех звеньев с длинами  $l_0, l_1, l_2$ , соединенных тремя цилиндрическими шарнирами. Первый шарнир поворачивает плоскость ноги вокруг строительной вертикали



аппарата, второй и третий — поворачивают соответствующие звенья вокруг горизонтальных осей, перпендикулярных плоскости ноги.

Звенья ног считались однородными стержнями с массами  $m_1, m_2$  и  $m_3$  соответственно. Кроме того, в шарнирах расположены точечные массы  $M_1, M_2$  и  $M_3$ , соответствующие приводам. Координаты центра масс корпуса  $(0, 0, d)$ , его масса  $M_c$ , тензор инерции  $I = \text{diag} \{I_x, I_y, I_z\}$ . Кинетическая энергия ног, не имеющих контакта с опорной поверхностью, входит в кинетическую энергию корпуса. Коэффициенты редукции в приводах —  $n_1, n_2, n_3$ , момент инерции ротора электродвигателя —  $J$ . Плоскость каждой ноги предполагалась перпендикулярной к продольной оси корпуса  $Ox$ , а соответствующие шарнирные углы всех ног — одинаковыми.

Различные конфигурации ноги задавались положением ее конца относительно точки подвеса в плоскости ноги (менялись клиренс и колея аппарата). Расчеты проводились для параметров, соответствующих параметрам шагающего аппарата.

$l_0$	$l_1$	$l_2$	$a$	$b$	$d$	$M_c$	$I_x$	$I_y$	$I_z$
0,075	0,1	0,174	0,7	0,21	0,05	4,0	0,02	0,16	0,18
$m_1$	$m_2$	$m_3$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$J$
0,3	0,3	0,3	0,7	0,7	0,7	$10^3$	$2 \cdot 10^3$	$1,5 \cdot 10^3$	$2,9 \cdot 10^{-6}$

Здесь значения параметров приведены в международной системе единиц. При расчетах в качестве единицы измерения длины выбиралась величина  $l_d = l_0 + l_1 + a/2$ .

Выполнение условий (2.7) и (2.12), гарантирующих устойчивость быстрых и медленных движений аппарата, проверялось численно для различных коэффициентов обратной связи по силе  $k$ .

1. Быстрые движения. Рассмотрено несколько моделей упругости конструкции. Матрицы демпфирования  $B_i$  во всех случаях выбирались пропорциональными матрицам жесткости  $C_i$  с коэффициентом пропорциональности 0,6 с. Это соответствует случаю так называемой внутренней диссипации [21].

В первом случае предполагалось, что в системе координат, связанной с последним звеном (голенью) ноги, матрица жесткости — заданная диагональная, причем две боковые жесткости равны между собой, а произведение осевой на боковую равно  $25 \cdot 10^8$  Н<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>. При этом было рассмотрено три варианта: боковая и осевая жесткости равны, осевая жесткость в четыре раза меньше боковой и осевая жесткость в четыре раза больше боковой.



Во втором случае матрицы жесткости  $C_i$  выбирались такими, как если бы податливость была сосредоточена в шарнирах. Угловая жесткость в каждом шарнире была принята равной  $10^3$  Н·м/рад.

При стоянии на шести ногах условие устойчивости (2.7) для  $k=40$  выполнено, только если положение конца ноги относительно корпуса принадлежит области размером менее  $0,3 l_2$ . Конфигурация этой области, ее расположение и размер различны для разных рассмотренных моделей упругой податливости. При стоянии на трех ногах аналогичная ситуация имеет место для  $k=240$ .

2. Медленные движения. Угловая жесткость позиционной обратной связи в  $j$ -м шарнире вычислялась как  $\gamma_j = n_j \gamma_0$ , где  $n_j$  — коэффициент редукции,  $\gamma_0 = 0,82$  Н·м/рад. Коэффициент диссипации в  $j$ -м шарнире  $b_j = n_j^2 b_0$ , где  $b_0 = 7,25 \cdot 10^{-5}$  Н·м·с/рад.

При опоре на шесть ног для  $k \leq 10^3$  неравенство (2.12) выполнено, если конец ноги находится на расстоянии более  $0,35 l_2$  от оси вращения первого шарнира и более  $0,03 l_2$  от остальных границ области кинематической достижимости.

При опоре на три ноги при  $k \leq 10^3$ , а также опоре на шесть ног и  $k \leq 320$  неравенство (2.12) выполнено, если конец ноги находится на расстоянии, большем  $0,06 l_2$  от оси вращения первого шарнира и большем  $0,02 l_2$  от остальных границ области достижимости.

Таким образом, при использовавшихся в эксперименте значениях коэффициента  $k$  ( $k \leq 320$ ) неравенство (2.12) выполнено практически при всех конфигурациях ног аппарата.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Охоцимский Д. Е., Голубев Ю. Ф. Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М.: Наука. 1984. 310 с.
2. Охоцимский Д. Е., Ефимов В. А., Кудрявцев В. А. и др. Математическое моделирование динамики движения электромеханического шагающего аппарата: Препринт № 96. М.: Ин-т прикл. математики АН СССР. 1982. 28 с.
3. Девянин Е. А., Каргашев В. А., Ленский А. В., Шнейдер А. Ю. Силовая обратная связь в системе управления шагающего аппарата // Исследование робототехнических систем. М.: Наука. 1982. С. 147—159.
4. Waldron K. J. Force and motion management in legged locomotion // IEEE J. Robotics and Automation. 1986. V. RA-2. No. 4. P. 214—220.
5. Голубев Ю. Ф., Каргашев В. А., Шнейдер А. Ю. Распределение усилий в ногах шагающего аппарата // Тез. докл. 2-й Всесоюз. конф. по пробл. биомеханики. Рига: Зинатне. 1979. Т. 3. С. 152—153.
6. Gurfinkel E. V., Devjanin E. A. et al. Walking robot with supervisory control // Mechanism and Machine Theory. 1981. V. 16. No. 1. P. 31—36.
7. Briggs R. L. A real time digital system for control of hexapod vehicle utilising force feedback: Ph. D. Diss // Ohio State Univ. Columbus. 1979. 258 p.
8. Klein Ch. A., Briggs R. L. Use of active compliance in the control of legged vehicles // IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern. 1980. V. SMC-10. No. 7. P. 393—400.
9. Mason M. T. Compliance and force control of computer controlled manipulator // IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern. 1981. V. SMC-11. No. 6. P. 418—432.
10. Whitney D. E. Force feedback control of manipulator fine motions // Trans. ASME J. of Dynam. Syst., Measur. and Control. 1977. V. 99. No. 2. P. 91—97.
11. Гурфинкель В. С., Девянин Е. А., Ленский А. В. и др. Силовая обратная связь в системе управления манипулятором // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 56—64.
12. Гориневский Д. М., Формальский А. М. Об устойчивости движений упругого манипулятора с обратной связью по силе // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 49—56.
13. Каргашев В. А. Приближенная модель динамики шагающего аппарата: Препринт № 123. М.: Ин-т прикл. математики АН СССР. 1979. 28 с.
14. Гурфинкель В. С., Гурфинкель Е. В., Девянин Е. А. и др. Макет шестиногого шагающего аппарата с супервизорным управлением // Исследование робототехнических систем. М.: Наука. 1982. С. 98—147.
15. Вибрации в технике. Справочник: В 6 т. Т. 6. Защита от вибраций и ударов/Под ред. К. В. Фролова. М.: Машиностроение. 1981. 456 с.
16. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами // Успехи мат. наук (УМН). 1957. Т. 12. Вып. 5. С. 3—122.
17. Лаурентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1965. 716 с.
18. Мегелицын И. И. К вопросу о гироскопической стабилизации // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1952. Т. 86. № 1. С. 31—34.
19. Булгаков Б. В. Колебания. М.: Гостехиздат. 1954. 892 с.
20. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31. Вып. 3. С. 575—586.
21. Вибрации в технике. Справочник: В 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем/Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение. 1978. 352 с.

Москва

Поступила в редакцию  
27.II.1986