**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1987**

УДК 531.38

ЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

ТРУППОВ В. А.

Находятся условия существования общего линейного по скоростям интеграла [1] уравнений движения твердого тела с закрепленной точкой в случае, когда функция Лагранжа содержит члены, линейные по скоростям. Исследование существования и отыскание общих линейных интегралов уравнений движения твердого тела в различных силовых полях проведено в [1, 2]. По постановке задачи публикуемая статья близка к [3].

1. Пусть имеется функция Лагранжа

$$L=\mathrm{T}-\sum_{i=1}^{3} U^i x^i - U \qquad (i,j=1,2,3)$$

$$\mathrm{T}={}^1/_2(A\omega_1{}^2+B\omega_2{}^2+C\omega_3{}^2)$$

где Т — кинетическая энергия твердого тела, $x^1=\psi$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$ — углы Эйлера, $x_1{}^i=dx^i/dt$, $U^i=U^i(x)$, $U=U(x)$ — трижды дифференцируемые функции в тех областях группы $SO(3)$, в которых будут производиться вычисления следующих величин: $\omega_1=\gamma_1 x_1{}^1+\xi x_1{}^2$, $\omega_2=\gamma_2 x_1{}^1-\sigma x_1{}^2$, $\omega_3=\gamma_3 x_1{}^1+$ $+x_1{}^3$, $\sigma=\sin x^3$, $\gamma_4=\sin x^2$, $\gamma_3=\cos x^2$, $\gamma_1=\gamma_4\sigma$, $\gamma_2=\gamma_4\xi$, $\gamma_5=\gamma_3\sigma$, $\gamma_6=\gamma_3\xi$, $\lambda=$ $=\sin x^1$, $h=\cos x^1$, $\xi=\cos x^3$.

Система уравнений Эйлера — Лагранжа $\partial/\partial t(\partial L/\partial x_1{}^i)-\partial L/\partial x^i=0$ может быть переписана в стандартном виде (используется циклическая перестановка индексов 1, 2, 3 и соответственно символов A, B, C):

$$\begin{gathered}\omega_1{}'=D_1\omega_2\omega_3+A^{-1}(\mathrm{N}_1{}^j\omega_j+\mathrm{N}_1{}^\circ),\ D_1=A^{-1}(B-C)\\ \mathrm{N}_3{}^2=\gamma_4{}^{-1}(\gamma_1\mathrm{H}_{23}-\xi\mathrm{H}_{13}),\ \mathrm{N}_1{}^3=\gamma_4{}^{-1}(\gamma_2\mathrm{H}_{23}+\sigma\mathrm{H}_{13})\\ \mathrm{N}_2{}^1=\gamma_4{}^{-1}(\gamma_3\mathrm{H}_{23}+\mathrm{H}_{12}),\ \mathrm{H}_{ij}=U_j{}^i,\ U_i=\partial_i U\\ U_i{}^j=\partial_i U^j,\ P^1=\sigma\partial_1+\gamma_2\partial_2-\gamma_5\partial_3,\ P^3=\partial_3\\ N_i{}^\circ=-\gamma_4{}^{-1}P^i(U),\ P^2=\xi\partial_1-\gamma_1\partial_2-\gamma_6\partial_3,\ \partial_i=\partial/\partial x^i\end{gathered} \tag{1.1}$$

Рассмотрим задачу отыскания условий на функции $\mathrm{N}_i{}^\circ$, $\mathrm{N}_j{}^i$, вытекающих из требования существования общего линейного по скоростям интеграла $J=a^i\omega_i+a$, $a^i=a^i(x)$, $a=a(x)$ для системы уравнений (1.1), а также нахождения формул для вычисления коэффициентов a^i, a. Подобная задача для функции Лагранжа $L=\mathrm{T}-U$ впервые была решена в [3].

2. Из требования, чтобы функция J была общим интегралом системы (1.1), следует система дифференциальных уравнений относительно функций a^i, a:

$$P^2(a^1)+P^1(a^2)+\gamma_4 D_3 a^3=0 \tag{2.1}$$

$$P^1(a^1)=0,\ P^2(a^2)=0,\ a_3{}^3=0,\ P^1(a^3)+\gamma_4(a_3{}^1+D_2a^2)=0,$$

$$P^2(a^3)+\gamma_4(a_3{}^2+D_1a^1)=0$$

$$P^1(a)+\gamma_4(B^{-1}a^2\mathrm{N}_2{}^1+C^{-1}a^3\mathrm{N}_3{}^1)=0 \tag{2.2}$$

$$a_3+A^{-1}a^1N_1{}^3+B^{-1}a^2N_2{}^3=0$$

$$P^2(a)+\gamma_4(A^{-1}a^1N_1{}^2+C^{-1}a^3N_3{}^2)=0$$

$$A^{-1}a^1N_1{}^\circ+B^{-1}a^2N_2{}^\circ+C^{-1}a^3N_3{}^\circ=0$$

где $a_j{}^i=\partial_j a^i$, $a_i=\partial_i a$. Система (2.1), как и последнее соотношение в (2.2), с точностью до обозначений совпадают с соответствующими соотношениями из [3].

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом продолжений систем дифференциальных уравнений [4].

Перепишем систему (2.1), положив $v^1=a_3{}^1$, $v^2=a_3{}^2$ и вводя новую переменную $z=z(x)$, в следующей форме:

$$P^1(a^1)=0,\ P^2(a^1)=z-D_3\gamma_4a^3,\ P^1(a^2)=-z \tag{2.3}$$

$$P^2(a^2)=0,\ P^1(a^3)=-\gamma_4(v^1+D_2a^2)$$

$$P^2(a^3)=-\gamma_4(v^2+D_1a^1),\ a_3{}^3=0$$

Первое продолжение (2.3) приводит к системе

$$\gamma_3v_2{}^1=\gamma_4v^1+\gamma_6D_3a^3-\xi z_2-\gamma_4{}^{-1}\sigma z_1-D_3\gamma_4(v^1+D_2a^2)$$

$$v_1{}^1=\gamma_3v_3{}^1+\gamma_1D_3a^3+\xi z_3-\sigma z,\ v_2{}^1=\gamma_4{}^{-1}(\gamma_2D_3a^3-\sigma z_3-\xi z),$$

$$\gamma_3v_2{}^2-\gamma_4v^2=\sigma z_2-\gamma_4{}^{-1}\xi z_1$$

$$v_1{}^2=\gamma_3v_3{}^2-\xi z,\ v_2{}^2=-\gamma_4{}^{-1}(z_3\xi-\sigma z)$$

$$\gamma_5(v^1+D_2a^2)+\gamma_1(v_2{}^1+D_2a_2{}^2)+\gamma_6(v^2+D_1a^1)+$$
$$+\gamma_2(v_2{}^2+D_1a_2{}^1)=\gamma_4{}^{-1}(\gamma_2(v_1{}^1+D_2a_1{}^2)-\gamma_1(v_1{}^2+D_1a_1{}^1))$$

$$\gamma_1(v_3{}^1+D_2v^2)+\gamma_2(v_3{}^2+D_1v^1)=\gamma_1(v^2+D_1a^1)-\gamma_2(v^1+D_2a^2)$$

$$\gamma_2(v_3{}^1+D_2v^2)-\gamma_1(v_3{}^2+D_1v^1)=\gamma_2(v^2+D_1a^1)+\gamma_1(v^1+D_2a^2)$$

которая после преобразований принимает вид

$$v_1{}^1=\gamma_3v_3{}^1+\gamma_1D_3a^3-\sigma z,\quad v_2{}^1=\gamma_4{}^{-1}(\gamma_2D_3a^3-\xi z) \tag{2.4}$$

$$v_3{}^1=(1-D_2)v^2+D_1a^1,\ v_1{}^2=\gamma_3v_3{}^2-\xi z$$

$$v_2{}^2=\gamma_4{}^{-1}\sigma z,\ v_3{}^2=-(1+D_1)v^1-D_2a^2$$

$$v_j{}^i=\partial_jv^i,\ P^1(z)=\gamma_6z+\gamma_4{}^2v^1-D_3\gamma_4{}^2(v^1+D_2a^2)$$

$$P^2(z)=\gamma_4{}^2v^2-\gamma_5z,\ z_3=0,\ z_j=\partial_jz$$

Частичное продолжение системы (2.4) приводит к трем новым соотношениям между функциями a^i, v^1, v^2, z:

$$(D_1+D_3)v^1+(1+D_3)D_2a^2=0,\ (D_2+D_3)v^2- \tag{2.5}$$
$$-(1-D_3)D_1a^1=0,\ (D_1+D_2)z-\gamma_4(1+D_1)D_3a^3=0$$

Пусть в дальнейшем выполняются условия

$$D_1+D_2\neq0,\ D_2+D_3\neq0,\ D_3+D_1\neq0 \tag{2.6}$$

Тогда система (2.5) принимает вид

$$v^1=AB^{-1}a^2,\ v^2=BA^{-1}a^1,\ z=-\gamma_4BC^{-1}a^3 \tag{2.7}$$

Объединение уравнений (2.7) и (2.3) приводит к системе

$$a_1{}^1=A(B^{-1}\gamma_3a^2-C^{-1}\gamma_2a^3),\ a_2{}^1=AC^{-1}\sigma a^3$$

$$a_3{}^1=AB^{-1}a^2,\ a_1{}^2=B(C^{-1}\gamma_1a^3-A^{-1}\gamma_3a^1)$$

$$a_2{}^2=BC^{-1}\xi a^3,\ a_3{}^2=-BA^{-1}a^1,\ a_3{}^3=0$$

$$a_1{}^3=C(A^{-1}\gamma_2a^1-B^{-1}\gamma_1a^2),\ a_2{}^3=-C(A^{-1}\sigma a^1+B^{-1}\xi a^2)$$

которая удовлетворяет следствиям (2.4). Если выполнены условия (2.6), то имеем выражения

$$a^1=A(b_1\gamma_1+b_2(\gamma_5 h+\xi\lambda)+b_3(\gamma_5\lambda-\xi h)) \tag{2.8}$$
$$a^2=B(b_1\gamma_2+b_2(\gamma_6 h-\sigma\lambda)+b_3(\gamma_6\lambda+\sigma h))$$
$$a^3=C(b_1\gamma_3-b_2\gamma_4 h-b_3\gamma_4\lambda)$$

где b_1, b_2, b_3 — постоянные интегрирования, являющиеся решениями системы (2.1). Полученные решения совпадают с соответствующими решениями [3], однако условия (2.6) отличаются от подобных условий [3].

3. Рассмотрим случаи, исключенные условием (2.6).

1. Пусть выполняются условия $A=B$, $D_2+D_3\neq 0$, $D_3+D_1\neq 0$. Из системы (2.5) следуют уравнения $v^1=a^2$, $v^2=-a^1$, решения которых имеют вид

$$a^1=c_1{}^1\sigma+c_2{}^1\xi,\quad a^2=c_1{}^1\xi-c_2{}^1\sigma \tag{3.1}$$

где $c_1{}^1=c_1{}^1(x^1, x^2)$, $c_2{}^1=c_2{}^1(x^1, x^2)$ — произвольные функции. Подстановка (3.1) в уравнения системы (2.1) приводит к условиям на произвольные функции $c_1{}^1$, $c_2{}^1$:

$$\overset{1}{c}_{1,1}+\gamma_3 c_2{}^1=0,\qquad \overset{1}{c}_{2,1}+\gamma_4\overset{1}{c}_{1,2}-\gamma_3 c_1{}^1=0,\qquad \overset{1}{c}_{2,2}=0$$
$$a_1{}^3=CA^{-1}\gamma_4 c_2{}^1,\quad a_2{}^3=-CA^{-1}c_1{}^1 \tag{3.2}$$

Индекс после запятой в (3.2) и далее означает дифференцирование по соответствующей переменной. Дифференцирование второго уравнения системы (3.2) по x^2 приводит к уравнению $\overset{1}{c}_{1,22}+c_1{}^1=0$, решением которого является функция $c_1{}^1=b_1{}^{11}(x^1)\gamma_4+b_1{}^{12}(x^1)\gamma_3$, где $b_1{}^{11}(x^1)$, $b_1{}^{12}(x^1)$ — произвольные функции переменной x^1. Подстановка найденного выражения для $c_1{}^1$ в первые два уравнения (3.2) позволяет получить систему уравнений относительно функций $b_1{}^{11}$, $b_1{}^{12}$: $b_1{}^{11}=0$, $b\quad+c_2{}^1=0$, $c\ -b_1{}^{12}=0$, из которых, в свою очередь, следует (b_1, b_2, b_3 — постоянные интегрирования):

$$b_1{}^{11}=Ab_1,\quad b_1{}^{12}=A(b_2h+b_3\lambda),\quad c_2{}^1=A(b_2\lambda-b_3h) \tag{3.3}$$

С учетом двух последних уравнений (3.2) и (3.3) запишем: $a^3=\int a_1{}^3dx^1+a_2{}^3dx^2+c^1$ ($c^1=\mathrm{const}$) или $a^3(x)=C(b_1\gamma_3-b_2\gamma_4h-b_3\gamma_4\lambda+b)$ ($b=\mathrm{const}$). Из полученных формул следует решение системы (2.1) при $A=B$:

$$a^1=A(b_1\gamma_1+b_2(\gamma_5h+\xi\lambda)+b_3(\gamma_5\lambda-\xi h)) \tag{3.4}$$
$$a^2=A(b_1\gamma_2+b_2(\gamma_6h-\sigma\lambda)+b_3(\gamma_6\lambda+\sigma h))$$
$$a^3=C(b_1\gamma_3-b_2\gamma_4h-b_3\gamma_4\lambda+b)$$

2. Пусть выполняются условия

$$C=A+B,\ D_2+D_3\neq 0,\ D_3+D_1\neq 0 \tag{3.5}$$

Из формул (2.5) следует $v^1=AB^{-1}a^2$, $v^2=-BA^{-1}a^1$. Как и в предыдущем случае, имеем (b_1, b_2, b_3 — постоянные интегрирования):

$$a^1=c_1{}^1\sigma+c_2{}^1\xi,\quad a^2=BA^{-1}(c_1{}^1\xi-c_2{}^1\sigma)$$
$$c_1{}^1=A(b_1\gamma_4+\gamma_3(b_2h+b\lambda)),\quad c_2{}^1=A(b_2\lambda-b_3h)$$

В случае 1 из второго уравнения (2.1) дополнительных соотношений на функции $c_1{}^1$, $c_2{}^1$ получено не было. В данном случае упомянутое уравнение после незначительных преобразований приводит к условию $(A-B)(Aa^3-Cc\quad)=0$, т. е. дополнительно к условиям (3.5) следует добавить $A\neq B$. В результате окончательное решение системы (2.1) при условиях $C=A+B$, $D_2+D_3\neq 0$, $D_3+D_1\neq 0$, $A\neq B$ запишется в форме

$$a^1=A(b_1\gamma_1+b_2(\gamma_5h+\xi\lambda)+b_3(\gamma_5\lambda-\xi h))$$
$$a^2=B(b_1\gamma_2+b_2(\gamma_6h-\sigma\lambda)+b_3(\gamma_6\lambda+\sigma h))$$
$$a^3=C(b_1\gamma_3-b_2\gamma_4h-b_3\gamma_4\lambda)$$

3. Пусть $A=B$, $C=2A$, $D_2+D_3\neq 0$, $D_3+D_1\neq 0$. Поскольку при получении решения в случае 1 условие $C\neq 2A$ не имело места, то это означает, что в случае 3 решение системы (2.1) будет определяться формулами (3.4), в которых лишь нужно учесть $C=2A$.

4. Пусть $C=B$, $D_1+D_2\neq 0$, $D_3+D_1\neq 0$. Заметим, что этот случай не получается из случая Лагранжа $A=B$ прямой заменой букв, поскольку функция Т, записанная в эйлеровых координатах, и уравнения (2.1) несимметричны относительно A, B, C. Из (2.5) следуют уравнения

$$v^1=AB^{-1}a^2,\ z+\gamma_4 a^3=0 \tag{3.6}$$

учет которых позволяет привести систему (2.3) к виду

$$P^1(a^1)=0,\ P^2(a^1)+AC^{-1}\gamma_4 a^3=0,\ P^3(a^1)=v^1 \tag{3.7}$$

$$P^1(a^2)+z=0,\ P^2(a^2)=0,\ P^1(a^3)+\gamma_4 a^2=0$$

$$P^2(a^3)+\gamma_4(v^2+D_1a^1)=0,\ P^3(a^3)=0,\ v_1{}^2+\gamma_3a^2=\gamma_2a^3$$

$$v_2{}^2+\sigma a^3=0,\ P^3(a^2)=v^2,\ v_3{}^2+a^2=0$$

Из последних двух уравнений следует

$$a^2=c^1\sigma+c^2\xi,\ v^2=c^1\xi-c^2\sigma \tag{3.8}$$

где $c^1=c^1(x^1,\ x^2)$, $c^2=c^2(x^1,\ x^2)$ — произвольные функции. Подстановка a^2, v^2 в систему (3.7) и учет (3.6) позволяет получить условия на функции $c^1(x^1, x^2)$, $c^2(x^1, x^2)$:

$$c_{,1}{}^1=\gamma_4a^3-\gamma_3c^2,\ c_{,2}{}^1=0,\ a_2{}^3+c^2=0$$

$$c_{,1}{}^2=\gamma_3c^1,\ c_{,2}{}^2=a^3,\ a_1{}^3+\gamma_4c^1=0$$

Общее решение системы (3.7) определяется формулами

$$a^1=A(b_1\gamma_1+b_2(\gamma_5h+\xi\lambda)+b_3(\gamma_5\lambda-\xi h)+b) \tag{3.9}$$

$$a^2=C(b_1\gamma_2+b_2(\gamma_6h-\sigma\lambda)+b_3(\gamma_6\lambda+\sigma h))$$

$$a^3=C(b_1\gamma_3-b_2\gamma_4h-b_3\gamma_4\lambda)$$

5. К формулам (2.8) приводит случай $A=B+C$, $D_1+D_2\neq 0$, $D_3+D_1\neq 0$.

6. Пусть $C=B$, $A=2B$, $D_1+D_2\neq 0$, $D_3+D_1\neq 0$. В этом случае в (3.9) нужно учесть условие $A=2B$ (неравенство $A\neq 2B$ при получении этих формул не использовалось).

Аналогичные исследования в следующих случаях:

7. $A=C$, $D_1+D_2\neq 0$, $D_2+D_3\neq 0$

8. $B=A+C$, $D_1+D_2\neq 0$, $D_2+D_3\neq 0$

9. $A=C$, $B=2A$, $D_1+D_2\neq 0$, $D_2+D_3\neq 0$

также приводят к формулам (2.8), в которых в каждой конкретной ситуации нужно учитывать лишь соответствующие соотношения между A, B, C.

4. Случаи $D_1+D_2=0$, $D_2+D_3=0$, $D_2+D_3=0$, $D_3+D_1=0$, $D_3+D_1=0$, $D_1+D_2=0$ в силу $ABC\neq 0$ возможны лишь при условии $A=B=C$. Тогда система (2.4) принимает вид

$$v_1{}^1=\gamma_3v^2-\sigma z,\ v_2{}^1=-\gamma_4{}^{-1}\xi z,\ v_3{}^1=v^2 \tag{4.1}$$

$$v_1{}^2=-\gamma_3v^1-\xi z,\ v_2{}^2=\gamma_4{}^{-1}\sigma z,\ v_3{}^2=-v^1$$

$$z_1=\gamma_4(\gamma_2v^2+\gamma_1v^1),\ z_2=\gamma_2v^1-\gamma_1v^2+\gamma_3\gamma_4{}^{-1}z,\ z_3=0$$

Третье и шестое уравнения из (4.1) означают, что

$$v^1=c_1{}^1\sigma+c_2{}^1\xi,\ v^2=c_1{}^1\xi-c_2{}^1\sigma \tag{4.2}$$

где $c_1{}^1$, $c_2{}^1$ — произвольные функции аргументов x^1, x^2. Подстановка (4.2) в (4.1) приводит к системе дифференциальных уравнений относительно функций $c_1{}^1$, $c_2{}^1$:

$$c^1_{1,1}+\gamma_3c_2{}^1+z=0,\qquad c^1_{2,1}=\gamma_3c_1{}^1,\qquad \gamma_4c_{2,2}+z=0 \tag{4.3}$$

$$c^1_{1,2}=0, \quad c^1_{2,21}+\gamma_4 c_1{}^1=0, \quad c^1_{2,22}+c_2{}^1=0$$

Из последнего уравнения следует

$$c_2{}^1=b_2{}^{11}(x^1)\gamma_4+b_2{}^{12}(x^1)\gamma_3 \tag{4.4}$$

где $b_2{}^{11}$, $b_2{}^{12}$ — произвольные функции указанного аргумента. Из первого и третьего уравнения (4.3) с учетом (4.4) получаем зависимость

$$c_{1,1}+b_2{}^{12}=0 \tag{4.5}$$

Дифференцирование второго уравнения (4.3) по x^1 с учетом (4.4) дает

$$b^{11}_{2,11}=0, \quad b^{12}_{2,11}+b_2{}^{12}=0 \tag{4.6}$$

Уравнения (4.5) и (4.6) приводят к результату $b_2{}^{12}=b_2h+b_3\lambda$, $c_1{}^1=$ $=b_3h-b_2\lambda+l^1$, где b_2, b_3, l^1 — постоянные интегрирования. Из пятого уравнения системы (4.3) следует $l^1=0$, $b^{11}_{2,1}=0$, т. е. $b_2{}^{11}=\mathrm{const}$, $b_1=\mathrm{const}$. Учет полученных формул в (4.2) и последующее интегрирование позволяет получить выражения для a^1, a^2:

$$a^1=A(b_1\gamma_1+b_2(\gamma_5h+\xi\lambda)+b_3(\gamma_5\lambda-\xi h))+b_4(x^1,\ x^3)$$
$$a^2=A(b_1\gamma_2+b_2(\gamma_6h-\sigma\lambda)+b_3(\gamma_6\lambda+\sigma h))+b_5(x^1,\ x^2)$$

где b_4 и b_5 — произвольные функции указанных аргументов. Использование (2.1) приводит к окончательному результату (b_i — постоянные):

$$\begin{aligned} a^1&=A(b_1\gamma_1+b_2(\gamma_5h+\xi\lambda)+b_3(\gamma_5\lambda-\xi h)+b_4)\\ a^2&=A(b_1\gamma_2+b_2(\gamma_6h-\sigma\lambda)+b_3(\gamma_6\lambda+\sigma h)+b_5)\\ a^3&=A(b_1\gamma_3-b_2\gamma_4h-b_3\gamma_4\lambda+b_6)\end{aligned} \tag{4.7}$$

Теорема. Общее решение системы (2.1) определяется формулами

$$a^1=A(b_1\gamma_1+b_2(\gamma_5h+\xi\lambda)+b_3(\gamma_5\lambda-\xi h)+c_1)$$
$$a^2=B(b_1\gamma_2+b_2(\gamma_6h-\sigma\lambda)+b_3(\gamma_6\lambda+\sigma h)+c_2)$$
$$a^3=C(b_1\gamma_3-b_2\gamma_4h-b_3\gamma_4\lambda+c_3),\quad c_1=b_4(1-\mathrm{sgn}|B-C|)$$
$$c_2=b_5(1-\mathrm{sgn}|C-A|),\quad c_3=b_6(1-\mathrm{sgn}|A-B|)$$

5. Пусть $\mathbf{Y}=\mathbf{N}\times\mathbf{A}$, $\mathbf{Y}=[y^1,\ y^2,\ y^3]$, $\mathbf{Y}_i=\mathbf{N}_i\times\mathbf{A}$, $\mathbf{Y}_i=[y_i{}^1,\ y_i{}^2,\ y_i{}^3]$, $\mathbf{N}_i=\partial_i\mathbf{N}$, $\mathbf{N}=$ $=[\mathrm{N}_3{}^2,\ \mathrm{N}_1{}^3,\ \mathrm{N}_2{}^1]$, $\mathbf{A}=[A^{-1}a^1,\ B^{-1}a^2,\ C^{-1}a^3]$, тогда из совместности первых трех уравнений системы (2.2) следуют необходимые и достаточные условия существования общего линейного интеграла

$$\begin{aligned} &(\mathbf{N}_2,\ \mathbf{A},\ \boldsymbol{\gamma})-\xi y_1{}^1+\sigma y_1{}^2+K_1{}^1\mathrm{N}_3{}^2+K_1{}^2\mathrm{N}_1{}^3+K_1{}^3\mathrm{N}_2{}^1=0\\ &(\mathbf{N}_3,\ \mathbf{A},\ \boldsymbol{\gamma})-y_1{}^3+K_2{}^1\mathrm{N}_3{}^2+K_2{}^2\mathrm{N}_1{}^3+K_2{}^3\mathrm{N}_2{}^1=0\\ &\xi y_3{}^1-\sigma y_3{}^2-y_2{}^3+K_3{}^1\mathrm{N}_3{}^2+K_3{}^2\mathrm{N}_1{}^3+K_3{}^3\mathrm{N}_2{}^1=0\\ &(\mathbf{N}^\circ,\ \mathbf{A})=0,\qquad \mathbf{N}^\circ=[\mathrm{N}_1{}^\circ,\ \mathrm{N}_2{}^\circ,\ \mathrm{N}_3{}^\circ]\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$K_1{}^1=B^{-1}(\gamma_3a_2{}^2-\gamma_4a^2)-C^{-1}(\gamma_6a^3+\sigma a_1{}^3+\gamma_2a_2{}^3)$$
$$K_1{}^2=C^{-1}(\gamma_1a_2{}^3-\xi a_1{}^3+\gamma_5a^3)+A^{-1}(\gamma_4a^1-\gamma_3a_2{}^1)$$
$$K_1{}^3=B^{-1}(\xi a_1{}^2-\gamma_1a_2{}^2-\gamma_5a^2)+A^{-1}(\gamma_2a_2{}^1+\sigma a_1{}^1+\gamma_6a^1)$$
$$K_2{}^1=C^{-1}\gamma_1a^3+B^{-1}(\gamma_3a_3{}^2-a_1{}^2),\qquad K_3{}^1=C^{-1}\xi a^3+B^{-1}a_2{}^2$$
$$K_2{}^2=C^{-1}\gamma_2a^3+A^{-1}(a_1{}^1-\gamma_3a_3{}^1),\qquad K_3{}^2=A^{-1}a_2{}^1-C^{-1}\sigma a^3$$
$$K_2{}^3=A^{-1}(\gamma_2a_3{}^1-\gamma_1a^1)-B^{-1}(\gamma_1a_3{}^2+\gamma_2a^2)$$
$$K_3{}^3=B^{-1}(\sigma a^2-\xi a_3{}^2)-A^{-1}(\xi a^1+\sigma a_3{}^1)$$

Если функции $\mathrm{N}_j{}^i$ удовлетворяют условиям (5.1), а потенциальная функция $U(x)$ удовлетворяет последнему уравнению системы (2.2), то линейный интеграл

$J = a^i(x)\omega_i + a(x)$ системы (1.1) существует, причем функция $a(x)$ определяется формулой

$$a = \int (\Upsilon, \gamma)\,dx^1 + (\xi y^1 - \sigma y^2)\,dx^2 + y^3\,dx^3 + c^* \qquad (c^* = \mathrm{const})$$

Автор благодарит В. В. Румянцева, В. Н. Рубановского, В. Д. Иртегова за внимание, поддержку и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сумбатов А. С.* Интегралы, линейные относительно скоростей. Обобщение теории Якоби // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ. 1973. Т. 4. С. 3—57.
2. *Харламов М. П.* Об условно-линейном интеграле уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 9—17.
3. *Горячев Д. Н.* Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава. 1910. 62 с.
4. *Картан Э.* Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во МГУ. 1962. 237 с.

Иркутск

Поступила в редакцию
28.III.1986