

УДК 531.38

О СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЖИДКОСТЬ

КРЕМЕНТУЛО В. В., ТАЖЕКОВ А.

В рамках аналитической теории управления [1, 2] дано решение задачи стабилизации (в определенном смысле оптимальной) вращательного движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, и тремя управляемыми маховиками. Полученные в явном виде управляющие моменты обеспечивают асимптотическую устойчивость перманентного вращения рассматриваемой механической системы (гиростата) по фазовым координатам тела и минимум некоторого функционала интегрального типа.

1. Рассмотрим изолированную механическую систему, представляющую собой твердое тело с неподвижной точкой O , имеющую эллипсоидальную полость, целиком заполненную идеальной однородной несжимаемой жидкостью, совершающей вихревое движение. По главным осям инерции тела с жидкостью расположены оси трех симметричных маховиков, приводимых во вращение специальными двигателями. Описанная система относится к типу гиростатов, т. е. таких систем, распределение масс которых в процессе движения не изменяется.

Следуя [3], заменим жидкость эквивалентным твердым телом. На фиг. 1 представлены две системы координат: $OX_1X_2X_3$ — инерциальная; $Ox_1x_2x_3$ — подвижная, жестко связанная с гиростатом и направленная по его главным осям инерции (по осям маховиков).

Введем следующие обозначения: a_1, a_2, a_3 — полуоси эллипсоидальной полости; $\Omega(t) = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ — функция времени, характеризующая вихревое движение частиц жидкости со скоростями w согласно уравнению $\text{rot } w = 2\Omega$; p_1, p_2, p_3 — проекции мгновенной угловой скорости тела на оси $Ox_1x_2x_3$; C_1, C_2, C_3 — моменты инерции гиростата (твердое тело — эквивалентное тело — роторы) относительно осей $Ox_1x_2x_3$; A_1, A_2, A_3 — моменты инерции, равные разности моментов инерции жидкости и эквивалентного тела относительно осей $Ox_1x_2x_3$; J_1, J_2, J_3 — осевые моменты инерции маховиков; r_1, r_2, r_3 — относительные угловые скорости маховиков; $H_i = J_i r_i$ ($i=1, 2, 3$) — относительные кинетические моменты маховиков; u_1, u_2, u_3 — управляющие моменты, создаваемые двигателями и приложенные к маховикам; α_{ik} ($i, k=1, 2, 3$) — направляющий косинус угла между неподвижной осью OX_i и подвижной осью Ox_k .

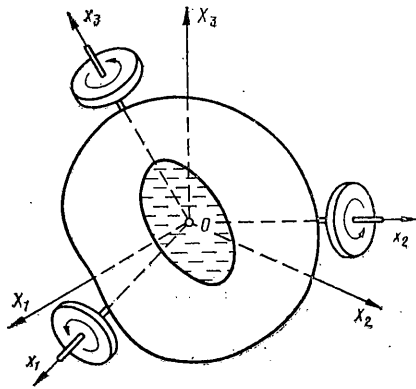
В соответствии с результатами [4, 5] движение рассматриваемой механической системы твердых тел с жидкостью может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями (здесь и далее символом (123) обозначается циклическая перестановка индексов):

$$C_1 p_1 \dot{+} + (C_3 - C_2) p_3 p_2 + A_1 \Omega_1 \dot{+} + A_3 \Omega_3 p_2 - A_2 \Omega_2 p_3 + H_1 \dot{+} + p_2 H_3 - p_3 H_2 = 0 \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (1.1)$$

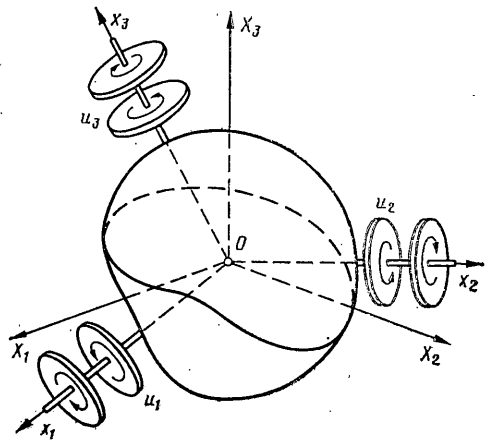
$$\alpha_{i1} \dot{+} + p_2 \alpha_{i3} - p_3 \alpha_{i2} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (1.2)$$

$$\Omega_1 \dot{+} = 2a_1^2 [p_3 \Omega_2 (a_1^2 + a_2^2)^{-1} - p_2 \Omega_3 (a_1^2 + a_3^2)^{-1}] - 2a_1^2 (a_3^2 - a_2^2) [(a_1^2 + a_2^2) (a_1^2 + a_3^2)]^{-1} \Omega_3 \Omega_2 \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (1.3)$$

$$J_i (r_i \dot{+} + p_i) = u_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Динамические уравнения (1.1) позволяют интерпретировать движение рассматриваемой системы как движение твердого тела вокруг неподвижной точки O с моментами инерции C_1, C_2, C_3 и шести маховиками, вращающихся относительно тела; трех неуправляемых маховиков с переменными кинетическими моментами $A_1\Omega_1, A_2\Omega_2, A_3\Omega_3$, соответствующих вихревому движению жидкости и подчиняющихся уравнениям (1.3), и трех управляемых маховиков с кинетическими моментами H_1, H_2, H_3 в соответствии с уравнениями (1.4), причем маховики расположены попарно на каждой из главных осей $Ox_1x_2x_3$ (на фиг. 2 управляемые маховики в отличие от неуправляемых помечены буквами u_1, u_2, u_3). Уравнения (1.3), являющиеся уравнениями Гельмгольца вихревого движения жидкости в проекции на оси $Ox_1x_2x_3$, допускают первый интеграл $a_2^2 a_3^2 \Omega_1^2 + a_3^2 a_1^2 \Omega_2^2 + a_1^2 a_2^2 \Omega_3^2 = \text{const}$, выражающий теорему Гельмгольца о постоянстве интенсивности вихря.

Следует, однако, подчеркнуть, что предложенный в данной работе гиросат — твердое тело с шестью маховиками — является лишь моделью реального гиросата, представляющего собой твердое тело с полостью, содержащей жидкость, и тремя управляемыми маховиками. Указанные три маховика осуществляют, как известно, активную пространственную стабилизацию движения реальных объектов.

Кинематические уравнения Пуассона (1.2) содержат девять переменных α_{ik} ($i, k=1, 2, 3$), из которых лишь три являются независимыми ввиду наличия шести геометрических соотношений $\alpha_{hi}\alpha_{ii} = \delta_{hl}$ ($k, l=1, 2, 3$), где δ_{hl} — символ Кронекера. Заметим, что в случае безвихревого движения жидкости проекции ее кинетического момента на оси $Ox_1x_2x_3$ будут постоянны [5], т. е. неуправляемые маховики вращаются равномерно относительно тела. При этом поставленная дальше задача стабилизации не будет отличаться от соответствующей задачи для твердого тела без жидкости (без неуправляемых маховиков) [6]. Следуя [6] и используя закон сохранения кинетического момента гиросата относительно точки O : $\Sigma(C_i p_i + A_i \Omega_i + H_i) \alpha_{hi} = h_k$ ($i, k=1, 2, 3$), где h_k — начальные возмущения кинетического момента системы, получим окончательную систему уравнений движения по фазовым координатам тела p_i, α_{ik} и жидкости Ω_i ($i, k=1, 2, 3$):

$$(C_1 - J_1) p_1^* + A_1 \Omega_1^* = p_3 \Sigma h_i \alpha_{i2} - p_2 \Sigma h_i \alpha_{i3} - u_1 \quad (1.5)$$

$$\alpha_{i1}^* + p_2 \alpha_{i3} - p_3 \alpha_{i2} = 0, \quad \Omega_i^* = E_{12} p_3 \Omega_2 - E_{13} p_2 \Omega_3 - A_{132} \Omega_3 \Omega_2 \quad (1\ 2\ 3) \quad (i=1, 2, 3)$$

$$E_{12} = 2a_1^2 / (a_1^2 + a_2^2), \quad E_{13} = 2a_1^2 / (a_1^2 + a_3^2) \quad (1\ 2\ 3)$$

$$A_{132} = 2a_1^2 (a_3^2 - a_2^2) / (a_1^2 + a_3^2) (a_1^2 + a_2^2) \quad (1\ 3\ 2)$$

Предполагая гири стат и находящуюся в нем полость симметричными ($C_1=C_2=C$, $J_1=J_2=J$, $a_1=a_2=a$) и вводя вместо переменных p_i , α_{ik} , Ω_i , связанных с вращающейся системой координат $Ox_1x_2x_3$, новые переменные q_i , β_{ik} , ω_i , связанные с невращающейся системой координат $Ox_1'x_2'x_3'$ [6], приведем уравнения движения (1.5) к виду

$$\begin{aligned} (C-J)q_1^{\cdot} + (C-J)\varphi^{\cdot}q_2^{\cdot} + A(\omega_1^{\cdot} + \varphi^{\cdot}\omega_2^{\cdot}) &= (q_3 + \varphi^{\cdot})\Sigma h_i\beta_{i2} - q_2\Sigma h_i\beta_{i3} - w_1 \\ (C-J)q_2^{\cdot} - (C-J)\varphi^{\cdot}q_1^{\cdot} + A(\omega_2^{\cdot} - \varphi^{\cdot}\omega_1^{\cdot}) &= -(q_3 + \varphi^{\cdot})\Sigma h_i\beta_{i1} + \\ &+ q_1\Sigma h_i\beta_{i3} - w_2 \\ (C_3 - J_3)(q_3 + \varphi^{\cdot})^{\cdot} + A_3\omega_3^{\cdot} &= q_2\Sigma h_i\beta_{i1} - q_1\Sigma h_i\beta_{i2} - w_3 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\beta_{i1}^{\cdot} + q_2\beta_{i3} - q_3\beta_{i2} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (1 \ 2 \ 3)$$

$$\omega_1^{\cdot} + \varphi^{\cdot}\omega_2^{\cdot} = E_{12}(q_3 + \varphi^{\cdot})\omega_2^{\cdot} - E_{13}q_2\omega_3^{\cdot} - A_{132}\omega_3\omega_2^{\cdot}$$

$$\omega_2^{\cdot} - \varphi^{\cdot}\omega_1^{\cdot} = -E_{12}(q_3 + \varphi^{\cdot})\omega_1^{\cdot} + E_{13}q_1\omega_3^{\cdot} + A_{132}\omega_1\omega_2^{\cdot}$$

$$\omega_3^{\cdot} = E_{31}(q_2\omega_1 - q_1\omega_2)$$

Здесь введены обозначения: φ — угол собственного вращения гири стат вокруг оси Ox_3 , ω_i и w_i ($i=1, 2, 3$) — новые угловые скорости и управляющие моменты:

$$\omega_1 = \Omega_1 \cos \varphi - \Omega_2 \sin \varphi, \quad \omega_2 = \Omega_1 \sin \varphi + \Omega_2 \cos \varphi, \quad \omega_3 = \Omega_3 \quad (1.7)$$

$$w_1 = u_1 \cos \varphi - u_2 \sin \varphi, \quad w_2 = u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi, \quad w_3 = u_3$$

Уравнения (1.6) допускают частное решение

$$q_i = 0, \quad \varphi^{\cdot} = \varphi_0^{\cdot} = \text{const}, \quad \beta_{ik} = \delta_{ik}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega = \text{const}, \quad w_i = 0 \quad (1.8)$$

$$h_1^{\circ} = h_2^{\circ} = 0, \quad h_3^{\circ} = C_3\varphi_0^{\cdot} \quad (i, k=1, 2, 3)$$

представляющее собой равномерное вращение гири стат вокруг оси симметрии Ox_3 при выключенном управлении.

2. Примем (1.8) в качестве невозмущенного движения и составим на основании (1.6) уравнения возмущенного движения, сохраняя за возмущениями обозначения исходных переменных. Эти уравнения имеют вид

$$q_1^{\cdot} = -v_1q_2 + v_2\beta_{32} + Q_1 + v_1 \quad (2.1)$$

$$q_2^{\cdot} = v_1q_1 - v_2\beta_{31} + Q_2 + v_2, \quad q_3^{\cdot} = Q_3 + v_3$$

$$\beta_{i1}^{\cdot} = B_{ii}, \quad \beta_{i2}^{\cdot} = -q_3 + B_{i2}, \quad \beta_{i3}^{\cdot} = q_2 + B_{i3} \quad (1 \ 2 \ 3)$$

$$\omega_i^{\cdot} = P_i(q_3, q_2; \omega_3, \omega_2) \quad (1 \ 2 \ 3) \quad (i=1, 2, 3)$$

Здесь Q_i , P_i ($i=1, 2, 3$) — члены второго порядка малости, причем функции $Q_i = Q_i(q_1, q_2, q_3; \beta_{11}, \dots, \beta_{33}; \omega_1, \omega_2, \omega_3; h_1, h_2, h_3)$ обращаются в нуль при $q_i = 0$, $\beta_{ik} = 0$ ($i, k=1, 2, 3$), управления v_i выражаются через w_i :

$$(C-J)v_1 = -w_1 - A[E_{12}\varphi_0^{\cdot} - A_{132}(\omega + \omega_3)]\omega_2 + \varphi_0^{\cdot}h_2 \quad (2.2)$$

$$(C-J)v_2 = -w_2 + A[E_{12}\varphi_0^{\cdot} - A_{132}(\omega + \omega_3)]\omega_1 - \varphi_0^{\cdot}h_1$$

$$(C_3 - J_3)v_3 = -w_3$$

Кроме того

$$v_1 = [1 + C_3/(C-J)]\varphi_0^{\cdot} - AE_{13}\omega/(C-J)$$

$$v_2 = C_3\varphi_0^{\cdot 2}/(C-J)$$

$$B_{ii} = q_3\beta_{i2} - q_2\beta_{i3} \quad (i=1, 2, 3) \quad (1 \ 2 \ 3)$$

Поставим задачу определения такого управления v_i в виде функций фазовых координат системы q_i , β_{ik} , ω_i ($i, k=1, 2, 3$), чтобы нулевое

решение уравнений (2.1):

$$q_i=0, \beta_{ik}=0, \omega_i=0 \quad (i, k=1, 2, 3) \quad (2.3)$$

было асимптотически устойчивым по фазовым координатам тела q_i, β_{ik} ($i, k=1, 2, 3$) и при этом выполнялось условие минимума функционала

$$\int_0^{\infty} \Phi(q_1, q_2, q_3; \beta_{11}, \dots, \beta_{33}; \omega_1, \omega_2, \omega_3; v_1, v_2, v_3) dt \quad (2.4)$$

где положительно-определенная функция Φ будет найдена в процессе решения задачи.

Следуя [1, 2], отметим, что здесь решаются две задачи: основная задача стабилизации движения (2.3) и вспомогательная задача минимизации функционала (2.4). Конструируемый в процессе решения функционал (2.4) может и не иметь физического смысла, его выбор диктуется возможностью получения замкнутого аналитического решения основной задачи стабилизации. Найденные ниже управляющие моменты v_i имеют простую структуру, удобную для практической реализации.

Рассмотрим сначала приближенную систему уравнений

$$\dot{q}_1 = -v_1 q_2 + v_2 \beta_{32} + v_1 \quad (2.5)$$

$$\dot{q}_2 = v_1 q_1 - v_2 \beta_{31} + v_2, \quad \dot{q}_3 = v_3$$

$$\dot{\beta}_{31} = -q_2, \quad \dot{\beta}_{32} = q_1, \quad \dot{\beta}_{33} = q_2 \beta_{31} - q_1 \beta_{32}$$

совпадающую с точностью до коэффициентов с ранее изученной системой уравнений [6]. Следовательно, поставленная задача стабилизации для системы (2.5) решается с помощью функции Ляпунова

$$2V^0 = k(\beta_{31}^2 + \beta_{32}^2 + \beta_{33}^2) + m \Sigma q_i^2 + 2q_1(a_{31}\beta_{31} + a_{32}\beta_{32}) + 2q_2(b_{31}\beta_{31} + b_{32}\beta_{32}) \quad (2.6)$$

при функционале (2.4) с подынтегральной функцией

$$\Phi = e_{11}(q_1^2 + q_2^2) + e_{33}q_3^2 + a(\beta_{31}^2 + \beta_{32}^2) + n \Sigma v_i^2 + \Lambda \quad (2.7)$$

Здесь k, m, n — исходные положительные параметры, Λ — члены не ниже третьего порядка малости

$$e_{11} = e_{22} = d^2 n - a_{32}, \quad e_{33} = d^2 n$$

$$a = \varepsilon(k + m v_2)(k - m v_2)/4n, \quad \varepsilon = (d^2 + v_1^2)^{-1}$$

$$a_{31} = b_{32} = -\varepsilon v_1(k + m v_2), \quad a_{32} = -b_{31} = \varepsilon d(k + m v_2)$$

Функция (2.7) является положительно-определенной при достаточно большом d и условии $v_2 < k/m$, дающем ограничение на выбор φ_0 . Найденное в силу (2.6) оптимальное управление имеет вид

$$-v_1 = dq_1 + (a_{31}\beta_{31} + a_{32}\beta_{32})/(2n) \quad (2.8)$$

$$-v_2 = dq_2 + (b_{31}\beta_{31} + b_{32}\beta_{32})/(2n), \quad -v_3 = dq_3$$

Исходные управления u_i определяются по формулам (1.7), (2.2). Итак, управления (2.8), (1.7), (2.2) обеспечивают при условии $v_2 < k/m$ оптимальную стабилизацию движения (2.3) по фазовым координатам тела $q_1, q_2, q_3, \beta_{31}, \beta_{32}$ в силу приближенной системы уравнений возмущенного движения (2.5). Ввиду зависимости β_{ik} из стабилизируемости движения (2.3) по β_{31}, β_{32} вытекает стабилизируемость этого движения по всем β_{ik} ($i, k=1, 2, 3$) [6].

По аналогии с [6] полученное управление сохраняет силу и для точных уравнений возмущенного движения (2.1), если к подынтегральной квадратичной форме Φ (2.7) добавить соответствующие члены более высокого порядка малости с учетом Q_i ($i=1, 2, 3$). Эти члены не нарушат знакоопределенность формы Φ в силу того, что функции Q_i , как было

отмечено, обращаются в нуль при равенстве нулю стабилизируемых переменных q_i, β_{ik} ($i, k=1, 2, 3$). Следовательно, найденное управление обеспечивает асимптотическую устойчивость вращательного движения гиростата (1.8) по фазовым координатам q_i, β_{ik} при наличии обычной устойчивости по фазовым координатам жидкости ω_i .

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4. М.: Наука. 1966. С. 475-514.
2. Легов А. М. Динамика полета и управления. М.: Наука. 1969. 359 с.
3. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью // Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат. 1949. Т. 2. С. 152-309.
4. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 157-168.
5. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука. 1965. 439 с.
6. Крементуло В. В. Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс. М.: Наука. 1977. 263 с.

Москва, Алма-Ата

Поступила в редакцию
9.VII.1986