МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1987

УДК 531.36

О ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

МАРХАШОВ Л. М.

Излагается новый способ получения частных решений уравнений движения механических систем из заданных первых интегралов, общих или частных. От известных способов его отличает, в частности, более широкая область применения: в рассмотрение включаются ситуации, когда, подобно случаю Горячева – Чаплыгина в задаче о твердом теле, дополнительный интеграл возникает на вырожденном уровне других интегралов. Предлагается новая формулировка классической теоремы Рауса – Ляпунова, тесно связанная с алгоритмом вычисления решений. Рассмотрены примеры. Для случая Гесса – Аппельрота найдено новое семейство периодических движений. Полученные результаты позволяют унифицировать и упростить задачи поиска стационарных движений и исследования их устойчивости.

1. Об условном экстремуме функций нескольких переменных. Пусть требуется найти экстремум функции $\omega_0=\omega_0(z_1,\ldots,z_N)$ на многообразии

$$\omega_1(z)=h_1,\ldots,\omega_k(z)=h_k \quad (k<N) \tag{1.1}$$

где $h_1,\ldots,h_k$ – произвольные фиксированные постоянные.

Для решения этой задачи обычно применяется метод неопределенных множителей Лагранжа. Изложим другой способ, не связанный с процедурой исключения множителей. Этот способ оказывается и более прямым, если соотношения (1.1) – первые интегралы движений, записанных в канонической форме Пуанкаре – Четаева [1].

Предположим, известен оператор $Z=\xi_j(z)\partial/\partial z_j$ $(j=1,\ldots,N)$, удовлетворяющий условиям

$$Z\omega_i=0 \quad (i=1,\ldots,k) \tag{1.2}$$

который можно рассматривать как оператор дифференцирования вдоль векторного поля $(\xi_1,\ldots,\xi_N)$, определяющего некоторую локальную однопараметрическую группу преобразований. Траектории этой группы описываются решением задачи Коши $dz_j'/d\tau=\xi_j(z')$, $z_j'|_{\tau=0}=z_j$. С точностью до τ^3 имеем

$$z_j'=z_j+\tau\xi_j(z)+{}^1/_2\tau^2 Z\xi_j(z) \tag{1.3}$$

Условия (1.2) показывают, что вдоль орбиты группы функции $\omega_1(z),\ldots,\omega_k(z)$ сохраняют постоянные значения. Очевидно, в точках общего положения существует ровно $N-k$ линейно не связанных операторов рассматриваемого типа

$$Z_1,\ldots,Z_{N-k},\quad Z_l=\xi_{jl}\partial/\partial z_j \tag{1.4}$$

$$Z_l\omega_i=0 \quad (l=1,\ldots,N-k;\quad i=1,\ldots,k) \tag{1.5}$$

определяющих максимальное число $N-k$ независимых направлений, задающих начало траекториям, вдоль которых функции $\omega_1(z),\ldots,\omega_k(z)$ остаются постоянными.

Таким образом, множество M^0 точек, в которых достигается условный экстремум функции $\omega_0(z)$, определяется условиями

$$Z_1\omega_0=0,\ldots,Z_{N-k}\omega_0=0 \tag{1.6}$$

Если заранее известно $m>N-k$ операторов, удовлетворяющих условиям (1.5), между ними будут существовать $m+k-N$ линейных связей

$$\beta_{ij}Z_j \equiv 0 \quad (i=1,\ldots,m+k-N;\ j=1,\ldots,m) \tag{1.7}$$

выполняющихся тождественно по всем переменным $z_1,\ldots,z_N$. Для получения достаточных условий локального минимума (максимума) функции $\omega_0(z)$ на многообразии (1.1) рассмотрим оператор $Z=c_iZ_i$ (c_i — произвольные вещественные параметры; $i=1,\ldots,N-k$; Z_i — операторы (1.4)). Оператору Z отвечают все возможные направления, касательные к многообразию (1.1). Найдем изменение функции $\omega_0(z)$ в окрестности точки $z=z_0$ вдоль общего направления, определяемого вектором $(\xi_1(z),\ldots,\xi_N(z))$, $\xi_j=c_i\xi_j^i$. С точностью до τ^3 с учетом формул (1.3) получим $\Delta\omega_0=\tau Z\omega_0|_{z=z_0}+$ $+{}^1/_2\tau^2Z^2\omega_0|_{z=z_0}$. Если $z_0\in M^0$, то, согласно формулам (1.6), $\Delta\omega_0={}^1/_2\tau^2Z^2\omega_0|_{M^0}$. Таким образом, достаточное условие локального условного минимума (максимума) функции $\omega_0(z)$ в точках множества M^0 имеет вид $Z^2\omega_0|_{M^0}>0$ $(Z^2\omega_0|_{M^0}<0)$.

Для суждения о минимуме (максимуме) функции $\omega_0(z)$ по ее второй вариации требуется, следовательно, положительная (отрицательная) определенность величины $Z^2\omega_0$ как квадратичной формы параметров c_i.

2. Получение частных решений из известного интеграла движения. Рассмотрим механическую систему с идеальными голономными связями, движение которой описывается каноническими уравнениями Пуанкаре — Четаева [1]

$$x_\alpha^{\boldsymbol{\cdot}}=Y_\alpha^*H^*+\xi_\alpha,\quad y_j^{\boldsymbol{\cdot}}=-X_j^*H^*+c_{0j}{}^py_p \quad (\alpha=1,\ldots,N;\ j=1,\ldots,s)$$

$$Y_\alpha^*=\xi_\alpha{}^i\partial/\partial y_i,\ X_j^*=\xi_\alpha{}^j\partial/\partial x_\alpha+c_{jl}{}^py_p/\partial y_l \quad (i,\,p,\,l=1,\ldots,s;\ N\geqslant s)$$

Пусть $x_{\sigma+1},\ldots,x_s$ — такие координаты системы, что выполнены условия

$$\partial H^*/\partial x_{\sigma+1}=\ldots=\partial H^*/\partial x_s=0$$

$$\partial\xi_\gamma{}^j/\partial x_{\sigma+1}=\ldots=\partial\xi_\gamma{}^j/\partial x_s=0,\ \partial\xi_\gamma/\partial x_{\sigma+1}=\ldots=\partial\xi_\gamma/\partial x_s=0 \quad (\gamma=1,\ldots,\sigma)$$

и кроме того равен σ ранг матрицы $(\xi_j{}^i)$, из которой удален следующий блок

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon^1_{\sigma+1} & \ldots & \xi^s_{\sigma+1} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \varepsilon^1{}_s & \ldots & \xi_s{}^s \end{Vmatrix}$$

Тогда оператор дифференцирования вдоль траекторий системы записывается в виде

$$S=X_0^*+\frac{\partial H^*}{\partial y_j}X_j^*-\frac{\partial H^*}{\partial x_1}Y_1^*-\ldots-\frac{\partial H^*}{\partial x_\sigma}Y_\sigma^*-\frac{\partial H^*}{\partial x_{s+1}}Y^*_{s+1}-\ldots-\frac{\partial H^*}{\partial x_N}Y_N^*$$

$$X_0^*=\partial/\partial t+\xi_\alpha\partial/\partial x_\alpha+c_{0j}{}^py_p\partial/\partial y_j$$

Система операторов из правой части S замкнута. Ее ядру K принадлежит $N-\sigma$ первых интегралов механической системы, из которых $N-s$ отвечают правым частям уравнений связей. Остальные $s-\sigma$ интегралов происходят от того, что в гамильтониан H^* не входят $s-\sigma$ координат (это могут быть, в частности, явные циклические координаты). Если рассматривать действие оператора S на функции, не зависящие от этих координат, то компоненты дифференцирования по ним в операторах X_0^*, X_j^* следует отбросить. В результате между всеми операторами, входящими в S, может возникнуть некоторое число линейных связей. Это будет иметь место всякий раз, когда среди упомянутых выше $s-\sigma$ интегралов есть такие, которые не зависят от координат $x_{\sigma+1},\ldots,x_s$. Кроме того, операторы Y_j^* линейно связаны $N-s$ зависимостями, происходящими от избыточности координат.

---

[1] *Мархашов Л. М.* Некоторые свойства и приложения уравнений Пуанкаре — Четаева: Препринт № 273. М.: Ин-т проблем механики АН СССР. 1986. 66 с.

Пусть $\omega_0(x, y)=c_0$ — общий или частный интеграл рассматриваемой механической системы. Обозначим $X_0{}^*\omega_0\equiv a_0$, $X_j{}^*\omega_0\equiv a_j$, $Y_\alpha{}^*\omega_0\equiv b_\alpha$ ($j=1,\ldots,s$; $\alpha=1,\ldots,\sigma$). Если интеграл $\omega_0=c_0$ не принадлежит ядру K, то среди функций a_0, a_j, b_α не все тождественно равны нулю. Линейной оболочке, натянутой на операторы $X_0{}^*$, $X_j{}^*$, $Y_\alpha{}^*$, наряду с S принадлежат коммутатору $[S, X_0{}^*]$, $[S, X_j{}^*]$, $[S, Y_\alpha{}^*]$. Отсюда

$$Sa_0=\sigma^\beta b_\beta+\tau^j a_j, \quad Sa_j=\mu_j{}^\beta b_\beta+\nu_j{}^i a_i \tag{2.1}$$

$$Sb_\alpha=\pi_\alpha{}^\beta b_\beta+\rho_\alpha{}^j a_j \ (i, j=1,\ldots,s;\ \alpha, \beta=1,\ldots,N)$$

где σ^β, τ^j, $\mu_j{}^\beta$, $\nu_j{}^i$, $\pi_\alpha{}^\beta$, $\rho_\alpha{}^j$ — регулярные функции. Следовательно, система уравнений

$$a_0=a_j=b_\alpha=0 \tag{2.2}$$

описывает некоторый частный интеграл механической системы. В точках многообразия (2.2) интеграл ω_0 принимает экстремальные значения при условии сохранения значений интегралов $\omega_\nu\in K$. Описанный результат не меняется, если $\omega_0(z)=c_0$ — интеграл, возникающий на каком-либо из вырожденных уровней интегралов $\omega_\nu\in K$:

$$\omega_{\nu_1}=0,\ldots,\omega_{\nu_l}=0 \tag{2.3}$$

В самом деле, в этом случае $S\omega_0=\lambda_k\omega_{\nu_k}$, где λ_k — некоторые функции, ограниченные на многообразии (2.3) (будем предполагать — вместе со своими первыми производными). Тогда

$$[S, Z]\omega_0=SZ\omega_0-ZS\omega_0=Sa-\omega_{\nu_r}Z\lambda_k-\lambda_k Z\omega_{\nu_k}$$

Здесь Z — один из операторов $X_0{}^*$, $X_j{}^*$, $Y_\alpha{}^*$; a — одна из функций a_0, a_j, b_α. На многообразии (2.3), следовательно, $[S, Z]\omega_0=Sa$ и соотношения (2.1) сохраняются.

Известно общее утверждение, принадлежащее Раусу и дополненное Ляпуновым, о соответствии действительным движениям тех значений переменных, которые доставляют минимум или максимум одному из известных интегралов ω_0 при данных величинах прочих известных интегралов [2, 3]. Известен и восходящий к Леви — Чивита способ нахождения этих движений. Последний состоит в решении системы уравнений $\partial\omega_0/\partial z_i=0$, где ω_0 — связка известных первых интегралов, а z_i — фазовые переменные. Как показано выше, использование для той же цели операторов $X_0{}^*$, $X_j{}^*$, $Y_\alpha{}^*$ имеет два отличия: в связку не нужно включать интегралы $\omega_\nu\in K$; можно получать частые решения из интегралов, возникающих на вырожденных уравнениях интегралов ω_ν.

Если известно несколько интегралов, не входящих в ядро K, в некоторых случаях оказывается удобным вместо составления их связки ω_0 применить иную процедуру. Суть этой процедуры, как и все изложенное, поясним применительно к задаче Эйлера — Пуассона. Воспользуемся следующей формой оператора S [4]:

$$S=pX_1{}^*+qX_2{}^*+rX_3{}^*+xY_1+yY_2+zY_3$$

$$X_1{}^*=y_3\frac{\partial}{\partial y_2}-y_2\frac{\partial}{\partial y_3}+\gamma_3\frac{\partial}{\partial\gamma_2}-\gamma_2\frac{\partial}{\partial\gamma_3}$$

$$Y_1=\gamma_3\frac{\partial}{\partial y_2}-\gamma_2\frac{\partial}{\partial y_3} \quad (1\ 2\ 3)$$

$$x=Px_c,\ y=Py_c,\ z=Pz_c;\ y_1=Ap,\ y_2=Bq,\ y_3=Cr$$

Здесь символом (1 2 3) обозначается циклическая перестановка индексов 1, 2 и 3.

Следствием избыточности координат является тождество

$$\gamma_1Y_1+\gamma_2Y_2+\gamma_3Y_3=0 \tag{2.4}$$

Нетрудно проверить, что

$$\gamma_1 X_1^*+\gamma_2 X_2^*+\gamma_3 X_3^*+y_1 Y_1+y_2 Y_2+y_3 Y_3=\partial/\partial\psi \tag{2.5}$$

Рассматриваемые ниже интегралы не зависят от циклической координаты ψ. Поэтому компоненты дифференцирования по ψ в операторах X_j^* и тождестве (2.5) следует отбросить. В результате получим тождество

$$\gamma_1 X_1^*+\gamma_2 X_2^*+\gamma_3 X_3^*+y_1 Y_1+y_2 Y_2+y_3 Y_3=0 \tag{2.6}$$

Заранее исключив из рассмотрения частные решения, для которых $Y_1H=Y_2H=Y_3H=0$, введем операторы

$$Z_k=X_k^*+\mu_k Y_k,\quad \mu_k=-X_k^*H/Y_k(H)\quad (k=1,\ 2,\ 3) \tag{2.7}$$

Система операторов (2.7) независима и замкнута. Система уравнений $Z_k\omega=0$ допускает ровно три решения: интеграл площадей, геометрический интеграл и интеграл энергии. Из тождеств (2.4) и (2.6) следует

$$\gamma_1 Y_1+\gamma_2 Y_2+\gamma_3 Y_3=0$$

$$(\gamma_1\mu_1-Ap)Y_1+(\gamma_2\mu_2-Bq)Y_2+(\gamma_3\mu_3-Cr)Y_3=\gamma_1 Z_1+\gamma_2 Z_2+\gamma_3 Z_3$$

Если на частном решении $\gamma_1(\gamma_2\mu_2-Bq)-\gamma_2(\mu_1\gamma_1-Ap)\neq0$, то коммутаторы $[S,\ Z_k]$ выражаются в виде $[S,\ Z_k]=\alpha_{ki}Z_i+\beta_k Y_3$. Из равенств $SH=$ $=Z_kH=0$ следует $\beta_k Y_k H=0$. Поскольку $Y_3H\neq0$, то $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$. Следовательно, $[S,\ Z_k]=\alpha_{ki}Z_i$. Отсюда вытекает, что если $\omega_0=c_0$ — некоторый дополнительный интеграл, общий или частный, уравнения

$$Z_1\omega_0=Z_2\omega_0=Z_3\omega_0=0 \tag{2.8}$$

дают частное решение задачи Эйлера — Пуассона.

Рассмотрим случай Гесса — Аппельрота, для которого $z=0$, $A(B-C)x^2=$ $=B(C-A)y^2$ (другие классические случаи разобраны в [4]). Имеет место частный интеграл $\omega_0=Apx+Bqy=0$. Воспользовавшись уравнениями (2.8), получим

$$-Cr^2\gamma_2+Bqr\gamma_3-y\gamma_3^2=0 \tag{2.9}$$

$$-Cr^2\gamma_1+Ap\gamma_3-x\gamma_3^2=0 \tag{2.10}$$

$$(\gamma_2 p+\gamma_1 q)(Bqx-Apy)-[(B-A)pq+x\gamma_2-y\gamma_1](x\gamma_2-y\gamma_1)=0 \tag{2.11}$$

Сложив уравнение (2.9), умноженное на y, с уравнением (2.10), умноженным на x, и обозначив $u\equiv x\gamma_1+y\gamma_2=-C\nu^2\rho^2$, $\rho^2=x^2+y^2$, найдем $Cr=$ $=\gamma_3\nu^{-1}$. Другая линейная комбинация уравнений (2.9) и (2.10): $Cr(y\gamma_1-$ $-x\gamma_2)+\gamma_3(Bqx-Apy)=0$ в сочетании с уравнением $\omega_0=0$ приводит к формулам

$$Ap=Cyr(y\gamma_1-x\gamma_2)/(\rho^2\gamma_3),\quad Bq=-Cxr(y\gamma_1-x\gamma_2)/(\rho^2\gamma_3)$$

Уравнение (2.11) удовлетворяется в силу этих соотношений и условий Гесса. Из уравнений движения следует $u=\text{const}$. Окончательно найденное семейство решений описывается формулами

$$Ap=C\nu x+\gamma_1/\nu,\quad Bq=-C\nu x^2/y-x\gamma_1/(\nu y),\quad Cr=\gamma_3/\nu$$

$$\gamma_2=-C\nu^2\rho^2/y-x\gamma_1/y,\quad \nu=\pm[-u/(C\rho^2)]^{1/2}=\text{const}$$

и дифференциальным уравнением для переменной γ_1, интегрируемым квадратурой. В соответствующих периодических движениях твердого тела постоянный по величине кинетический момент прецессирует вокруг вертикали. При этом центр масс тела остается на одном и том же горизонтальном уровне.

3. Модификация теоремы Рауса — Ляпунова. Пусть движение механической системы с идеальными голономными нестационарными связями описывается каноническими уравнениями Пуанкаре — Четаева. Предположим, что операторы X_0^*, X_j^*, Y_α^* не зависят явно от времени. Тогда не будут зависеть явно от времени и интегралы $\omega_\nu=h_\nu$, принадлежащие к ядру K этих операторов: $X_0^*\omega_\nu=X_j^*\omega_\nu=Y_\alpha^*\omega_\nu=0$. Все эти интегралы предполагаются известными. Пусть, кроме того, известен еще один интеграл $\omega_0=c_0$, общий, частный, либо возникающий лишь при некоторых фиксированных значениях постоянных h_ν. По доказанному, соотношения $a_0=a_j=b_\alpha=0$ описывают некоторый частный интеграл уравнений движения — инвариантное многообразие M^0 ($0\leqslant\dim M^0<2s$). Обозначим через $Z_1,\ldots,Z_l$ какой-либо минимальный набор линейно несвязанных операторов из числа операторов X_0^*, X_j^*, Y_α^*, через которые на M^0 выражаются все остальные. Образуем, как в п. 1, их линейную комбинацию $Z=c_iZ_i$ ($i=1,\ldots,l$) с постоянными вещественными коэффициентами. Одна из теорем [5] совместно с результатами пп. 1, 2 данной статьи позволяет придать теореме Рауса — Ляпунова наряду с известными следующую формулировку.

Теорема. Множество M^0 — частный интеграл уравнений движения. Если M^0 компактно и $Z^2\omega_0|_{M^0}>0$ ($Z^2\omega_0|_{M^0}<0$) при всех значениях постоянных c_i, то оно устойчиво.

Сделаем замечания, касающиеся вычислительной стороны дела. *1°. О выборе операторов.* Пусть все линейные связи между операторами, формирующими оператор сдвига S, выражаются соотношениями (1.7). Рассмотрим прямоугольную матрицу $(\beta_{ij})|_{M^0}$. Каждый ее столбец (число которых больше числа строк) отвечает одному из операторов. Те из них, для которых можно сформировать отличный от нуля определитель, могут считаться зависимыми. Независимыми операторами будут все остальные.

2°. О вычислении квадратичной формы $Z^2\omega_0$. Пусть $Z_1,\ldots,Z_l$ — независимые операторы, которые выбраны в соответствии с предыдущим замечанием. Очевидно, $Z^2\omega_0=c_ic_jZ_iZ_j\omega_0=(Z_iZ_j+Z_jZ_i)\omega_0c_ic_j$ ($i\leqslant j$).

Так как система операторов замкнута $[Z_i,Z_j]=a_{ij}^k(z)Z_k$ ($i, j, k=1,\ldots,l$) и $Z_k\omega_0|_{M^0}=0$, то матрица квадратичной формы $(Z_iZ_j\omega_0)$ симметрична. Далее используется критерий Сильвестра.

Примеры. 1. Устойчивость регулярных прецессий волчка Лагранжа ($A=B$, $x=y=0$). Исключив интеграл энергии, определим замкнутую систему трех линейно не связанных операторов $Z_i=Y_iHX_i^*-X_i^*HY_i$ ($i=1, 2, 3$). Система уравнений $Z_1\omega=Z_2\omega=Z_3\omega=0$ допускает ровно три первых интеграла: интегралы энергии, площадей и геометрический. Имеем $\omega_0=r$, $Z_1r=-Aq^2\gamma_3+Cqr\gamma_2-z\gamma_2^2$, $Z_2r=-Ap^2\gamma_3+Cqr\gamma_1-z\gamma_1^2$, $Z_3r=0$. На семействе регулярных прецессий M^0 выполняются равенства: $p-\lambda\gamma_1=0$, $q-\lambda\gamma_2=0$, $A\lambda^2\gamma_3-Cr\lambda+z=0$, $\gamma_3-\gamma_3^0=0$, $r-r_0=0$. Поскольку $Z_3r=0$, $Z=c_1Z_1+c_2Z_2$, то матрица $(Z_iZ_j\omega_0)$ квадратичной формы $Z^2\omega_0$ имеет вид

$$\begin{Vmatrix} Z_1^2r & Z_2Z_1r \\ Z_2Z_1r & Z_2^2r \end{Vmatrix}$$

Условие определенности (положительной или отрицательной) этой матрицы есть

$$[Z_1^2rZ_2^2r-(Z_2Z_1r)^2]_{M^0}>0 \tag{3.1}$$

$$Z_1^2r=\gamma_2^2(\lambda\gamma_3^0-r_0)[(Cr_0-2\lambda A\gamma_3^0)^2+\lambda^2A^2\gamma_2^2]/(AC)$$

$$Z_1Z_2r=\lambda^2A\gamma_1^2\gamma_2^2(\lambda\gamma_3^0-r_0)/C$$

$$Z_2^2r=\gamma_1^2(\lambda\gamma_3^0-r_0)[(Cr_0-2\lambda A\gamma_3^0)^2+\lambda^2A^2\gamma_1^2]/(AC)$$

При регулярных прецессиях $r_0\neq\lambda\gamma_3^0$, $\gamma_1\neq0$, $\gamma_2\neq0$. Поэтому условие (3.1) выполнено. Выполнено и условие компактности M^0. Таким образом, регулярные прецессии всегда устойчивы [2].

2. Устойчивость перманентных вращений твердого тела. Рассматриваемые здесь задачи изучены в [1, 6, 7]. Покажем, как они решаются способом, описанным выше. Чтобы заранее не предрешать выбор независимых операторов, включим в связку Z все операторы X_k^*, Y_k ($k=1, 2, 3$). Составим матрицу квадратичной формы. Приняв интеграл энергии $\omega_0=H=h$ за порождающий и положив $Z_i=X_i^*$, $Z_{i+3}=Y_i$ ($i=1, 2, 3$), получим $m=(Z_iZ_jH)$.

Рассмотрим перманентное вращение

$$
\begin{gathered}
p/\gamma_1=q/\gamma_2=\omega, \quad \gamma_1^2+\gamma_2^2\neq 0, \quad \gamma_3=r=0 \\
x=\omega^2(A-B)\gamma_1 \\
A\neq B, \quad A\neq C, \quad B\neq C, \quad y=z=0
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Матрица $(\beta_{ij})|_{M^0}$ линейных связей (2.5), (2.7) на этом стационарном движении есть

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} X_1^* & X_2^* & X_3^* & Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\
\left\|\begin{array}{cccccc} \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & Ap & Bq & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{array}\right\|
\end{array}
$$

Очевидно, в качестве независимых могут быть взяты операторы X_1^*, X_2^*, X_3^*, Y_3. Матрица квадратичной формы получается из матрицы m вычеркиванием четвертого и пятого столбцов и одноименных строк. После подстановки выражений (3.2) в ее матричные элементы получим

$$
\left\|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{array}\right\|
$$

$$
\begin{gathered}
a_{11}=(B-C)B\omega^2\gamma_2^2/C, \; a_{12}=a_{21}=(C-B)A\omega^2\gamma_1\gamma_2/C \\
a_{22}=(A^2-2AC+BC)\omega^2\gamma_1^2/C, \; a_{33}=\omega^2(B^2-\alpha^2\gamma_1^2)/(AB) \\
a_{34}=a_{43}=(B-A)\omega(A^{-1}\gamma_2^2-B^{-1}\gamma_1^2), \; a_{44}=A^{-1}\gamma_2^2-B^{-1}\gamma_1^2
\end{gathered}
$$

После некоторых упрощений условия Сильвестра записываются в виде

$$
\begin{gathered}
(B-C)B\omega^2\gamma_2^2/C>0, \; (B-C)\omega^4\gamma_1^2\gamma_2^2(A-B)/C>0 \\
\omega^2(B-A)(B^2-\alpha\gamma_1^2)/(AB)>0 \\
3AB(A-B)^2(1-\gamma_1^2)(\gamma_1^2-B/[3(A-B)])>0 \\
\alpha=A^2+B^2-AB
\end{gathered}
$$

Отсюда получаем две серии достаточных условий устойчивости [6]: $B>C$, $B>A$; $B>C$, $\gamma_1^2>B/[3(A-B)]$.

Устойчивость перманентных вращений волчка Ковалевской ($A=B=2C$, $y=z=0$):

$$
q=r=\gamma_2=\gamma_3=0, \; \gamma_1=1, \; p=\omega=\text{const} \tag{3.3}
$$

Матрица линейных связей есть

$$
\left\|\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & C\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\|
$$

Очевидно, независимыми могут быть приняты операторы X_2^*, X_3^*, Y_2, Y_3. Вычеркнув из матрицы m столбцы и строки с номерами 1, 4, на решении (3.3) получим матрицу

$$
\left\|\begin{array}{cccc} 2\omega^2-a & 0 & \omega C^{-1} & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ \omega C^{-1} & 0 & C^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{-2} \end{array}\right\|
$$

Из условий Сильвестра найдем достаточное условие устойчивости движения (3.2) [7]: $-a>0$ $(x<0)$.

Устойчивость перманентных вращений волчка Лагранжа

$$
p=q=\gamma_1=\gamma_2=0 \tag{3.4}
$$

Для определенности положим $\gamma_3=1$, $z>0$. Матрица линейных связей есть

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & Cr \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_3 \end{Vmatrix}.$$

Независимой оказывается единственная комбинация операторов: X_1^*, X_2^*, Y_1, Y_2. Из матрицы вычеркиваются столбцы и строки с номерами 3, 6. Получаем матрицу

$$\begin{Vmatrix} (C-A)CA^{-1}r^2-z & 0 & (C-A)A^{-1}r & 0 \\ 0 & (C-A)CA^{-1}r^2-z & 0 & (C-A)A^{-1}r \\ (C-A)A^{-1}r & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & (C-A)A^{-1}r & 0 & A^{-1} \end{Vmatrix}$$

Требование положительной определенности квадратичной формы приводит к условиям $(C-A)CA^{-1}r^2-z>0$, $(C-A)r^2-z>0$, причем первое из них — следствие второго. Таким образом, перманентное вращение (3.4) устойчиво при

$$(C-A)r^2-z>0 \tag{3.5}$$

Из неравенства (3.5) следует известное условие Майевского. В самом деле, из неравенств $(4AC-4A^2)r^2-4Az>0$, $C^2\geqslant 4AC-4A$ получаем Cr^2- $-4Az>0$. Это значит, что критерий Майевского шире условия (3.9). Для получения условия более широкого, чем (3.9), используем интеграл Лагранжа: порождающий интеграл возьмем в виде $\omega_0={}^1/_2A(p^2+q^2)+\alpha r^2+z\gamma_3$. Для той же комбинации независимых операторов получим следующую матрицу квадратичной формы

$$\begin{Vmatrix} \mu & 0 & \nu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \nu \\ \nu & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & \nu & 0 & A^{-1} \end{Vmatrix}$$

$$\mu = CA^{-1}(C-2\alpha AC^{-1})r^2-z, \qquad \nu=(C-2\alpha AC^{-1})A^{-1}r$$

Неравенства Сильвестра приводятся к одному из неравенств: $\mu-A\nu^2>$ >0 или

$$2\alpha C^{-1}(C-2\alpha AC^{-1})r^2-z>0 \tag{3.6}$$

Условие будет наиболее широким при $2\alpha=C^2(2A)^{-1}$, когда функция $2\mu(C-2\alpha AC^{-1})$ достигает своего наибольшего (положительного) значения $C^3(4A)^{-1}$. Условие устойчивости (3.6) движения (3.4) превращается в условие Майевского [1].

Автор благодарит В. В. Румянцева, А. В. Карапетяна и В. Н. Рубановского за обсуждение темы работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР. 1962. 535 с.
2. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: ВИНИТИ. 1983. Т. 6. С. 3–128.
3. *Рубановский В. Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений // Теор. и прикл. механика. 1974. Т. 5. № 1. С. 67–79.
4. *Мархашов Л. М.* Об уравнениях Пуанкаре и Пуанкаре – Четаева // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 43–55.
5. *Карапетян А. В., Рубановский В. Н.* О модификации теоремы Рауса об устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высш. шк. 1986. Вып. 17. С. 62–69.
6. *Румянцев В. В.* К задаче о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1957. Т. 116. № 2. С. 185–188.
7. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 4. С. 457–458.

Москва

Поступила в редакцию 24.VII.1986