

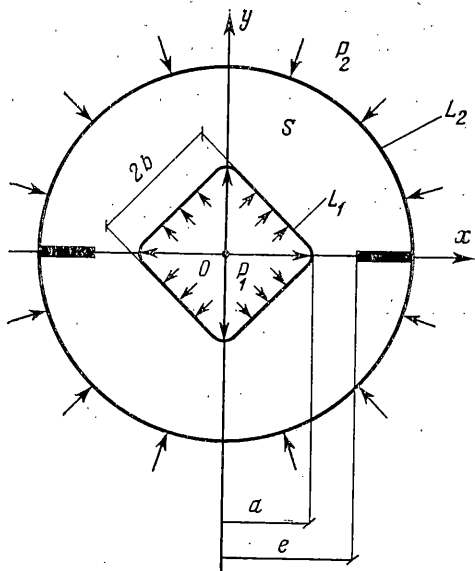
НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЦЕНТРАЛЬНЫМ КВАДРАТНЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ДВУМЯ РАЗРЕЗАМИ

КУЛИЕВ С. А.

В [1–3] указан прием, основанный на результатах [4], допускающий решение задач кручения полых призматических тел с различными прямоугольными разрезами.

В публикуемой работе с помощью некоторой модификации этого приема рассматривается плоская задача теории упругости.

1. Рассматривается напряженное состояние круглой пластинки с центральным квадратным отверстием и двумя разрезами, симметрично расположенными по оси абсцисс (фигура).



Однородная изотропная пластинка подвержена равномерно распределенным контурным нагрузкам P_1 и P_2 .

Как известно [1, 4] решение плоской задачи теории упругости сводится к нахождению двух регулярных в области S функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$ и удовлетворяющих граничным условиям

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = -P_j t + C_j \quad (\text{на } L_j) \quad (1.1)$$

где t — аффикс точки кривой L_j ($j = 1, 2$), C_j — некоторые постоянные.

Регулярные в области S функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ представим в виде суммы двух функций, одна из которых регулярна внутри наружного контура L_2 , а другая — вне внутреннего контура L_1 . Функции, регулярные вне внутреннего контура L_1 , разыскиваем в виде ряда по отрицательной степени переменной ξ_1 ($f_1(z)$ и $f_2(z)$ — функции, регулярные внутри наружного контура L_2):

$$\varphi(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h \xi_1^{-h} + f_1(z), \quad \psi(z) = \sum_{h=0}^{\infty} A_h \xi_1^{-h} + f_2(z) \quad (1.2)$$

Внешность наружного контура L_2 (окружность с двумя разрезами) отображается на внешность единичной окружности в плоскости ξ_2 функцией [3]:

$$z = R \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \xi_2^{-n} = R \xi_2 \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n-1} \xi_2^{-n} \quad (1.3)$$

Функция $\chi(t)$ — обратная к последнему равенству (1.3) имеет вид (знак суммы со звездочкой наверху означает, что индекс суммирования увеличивается соответственно на четыре и два):

$$\xi_2 = \chi(t) = \frac{z}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n-1} \left(\frac{R}{z}\right)^n \quad (1.4)$$

$$\delta_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{matrix} ** \\ \lambda=1 \end{matrix} 2\lambda (-1)^{k/2} C_{k/2}^{k/2} \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{-k+1} C_{-k+1}^{(v-k)/2}$$

$$\lambda=1 \quad (k=0), \quad \lambda=1/2 \quad (k \neq 0)$$

Граничные значения функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ на L_2 представимы в виде рядов Фурье

$$f_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k [\chi(t)]^k, \quad f_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k [\chi(t)]^k \quad (1.5)$$

Умножив обе части равенства (1.5) на ядро Коши $[2\pi i(t-z)]^{-1} dt$, где z — произвольная точка внутри наружного контура L_2 , и проинтегрировав их по контуру L_2 , получим (слагаемые, содержащие под знаком интеграла отрицательные степени $\chi(t)$ пропадут):

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{[\chi(t)]^k}{t-z} dt, \quad f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{[\chi(t)]^k}{t-z} dt \quad (1.6)$$

В каждом из интегралов, заключенном под знаком сумм, можно за контур интегрирования взять окружность сколь угодно большого радиуса.

Пользуясь разложением (1.4), на основании теории вычетов найдем (через $E(n)$ обозначается целая часть числа n):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{[\chi(t)]^k}{t-z} dt = \left(\frac{z}{R}\right)^k \sum_{n=0}^{E(k/2)} \delta_{n-1}^{(k)} \left(\frac{R}{z}\right)^{2n} \quad (1.7)$$

Постоянные $\delta_{n-1}^{(k)}$ могут быть вычислены последовательно из рекуррентных соотношений

$$\delta_n^{(k)} = \sum_{n_1=0}^n \delta_{n_1}^{(1)} \delta_{n-n_1}^{(k-1)} \quad (n=0, 1, \dots, E(k/2); k=2, 3, \dots) \quad (1.8)$$

Учитывая равенство (1.7) в (1.6), после некоторых преобразований получим

$$f_1(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{z}{R}\right)^v \beta_v, \quad f_2(z) = \sum_{v=1}^{\infty} h_v \left(\frac{z}{R}\right)^v \quad (1.9)$$

$$\beta_v = \sum_{k=v}^{\infty} \begin{matrix} * \\ \lambda=1 \end{matrix} b_k \frac{\delta_{k-v-2}^{(k)}}{2} \delta_{-1}^k, \quad h_v = \sum_{k=v}^{\infty} \begin{matrix} * \\ \lambda=1/2 \end{matrix} B_k \frac{\delta_{k-v-2}^{(k)}}{2} \delta_{-1}^k \quad (1.10)$$

После подстановки значений функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, определяемых формулой (1.9), в (1.2), функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ принимают следующий вид

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi_1^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{z}{R}\right)^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \xi_1^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \left(\frac{z}{R}\right)^k \quad (1.11)$$

Внешность внутреннего правильного криволинейного, близкого к прямолинейному квадрату контура L_1 отображается на внешность единич-

ной окружности в плоскости ξ_1 функцией

$$z = A(\xi_1 + m/\xi_1^3), \quad A = 1/2(a+b)$$

$$m = |(a-b)/(a+b)| \quad (1.12)$$

где a — полудиагональ, b — половина стороны квадрата.

Функция $\xi_1 = \chi_1(t)$ обратная к (1.12) имеет следующий вид [1, 4]

$$\xi_1 = \chi_1(t) = \frac{z}{A} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \left(\frac{A}{z} \right)^{4n} \quad (1.13)$$

Подставляя граничные значения функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ (определяемые равенством (1.11) в (1.1) граничное условие на внутреннем контуре L_1 после некоторых преобразований сводится к следующему виду (учитывая отображающую функцию (1.12) и переходя к переменной τ , причем $\tau\bar{\tau} = 1$):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} H_1(k) \tau^k + \sum_{k=0}^{\infty} H_2(k) \tau^{-k} - \left(\tau + \frac{m}{\tau^3} \right) \sum_{k=2}^{\infty} M(k) \tau^k +$$

$$+ \left(\tau + \frac{m}{\tau^3} \right) \sum_{k=0}^{\infty} H_3(k) \tau^{-k} + \left(\tau + \frac{m}{\tau^3} \right) \sum_{k=1}^{\infty} H_4(k) \tau^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \tau^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} N_1(k) \tau^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} N_2(k) \tau^k = -P_1 A \left(\tau + \frac{m}{\tau^3} \right) + C_1 \quad (1.14)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной τ , получим две следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений

$$a_k + H_2(k) - m M_1(2) \varepsilon_1 + H_3(k+1) + m H_3(k-3) \varepsilon_2 +$$

$$+ m H_4(3-k) \varepsilon_3 + N_1(k) = -P_1 A m \varepsilon_4 \quad (1.15)$$

$$H_1(k) - M_1(k-1) \varepsilon_2 - m M_1(k+3) + H_3(k-1) \varepsilon_1 +$$

$$+ H_4(k-1) \varepsilon_3 + H_4(k+3) + A_k + N_2(k) = -P_1 A \varepsilon_1 \quad (1.16)$$

а для свободных членов, соответствующих нулевой степени переменной τ , получим

$$a_0 + H_2(0) - M_1(3) + H_3(1) + H_4(3) + A_0 + N_2(0) = C_1$$

В (1.14) и (1.16) приняты следующие обозначения

$$H_1(k) = \sum_{v=k}^{\infty} \beta_v \left(\frac{A}{R} \right)^v m^{\frac{v-k}{4}} C_v^{\frac{v-k}{4}}$$

$$H_2(k) = \sum_{v=\varepsilon'}^{\infty} \beta_v \left(\frac{A}{R} \right)^v m^{\frac{v+k}{4}} C_v^{\frac{v+k}{4}} \quad (\varepsilon = 0, 1, 2; \varepsilon' = \varepsilon + 1/3(k + \varepsilon))$$

$$H_3(k) = \sum_{v=k+1}^{\infty} \beta_v m^{\frac{v-k-1}{4}} C_{v-1}^{\frac{v-k-1}{4}} \left(\frac{A}{R} \right)^v$$

$$H_4(k) = \sum_{v=1+\varepsilon'}^{\infty} \beta_v \left(\frac{A}{R} \right)^v m^{\frac{v+k-1}{4}} C_{v-1}^{\frac{v+k-1}{4}} \left(\frac{A}{R} \right)^v$$

$$N_1(k) = \sum_{v=k}^{\infty} h_v \left(\frac{A}{R} \right)^v m^{\frac{v-k}{4}} C_v^{\frac{v-k}{4}}$$

$$N_2(k) = \sum_{v=\varepsilon'}^{\infty} h_v \left(\frac{A}{R} \right)^v m^{\frac{v+k}{4}} C_v^{\frac{v+k}{4}} \quad (\varepsilon' = \varepsilon + 1/3(k + \varepsilon))$$

$$M_1(k) = \sum_{v=k'}^k * k a_k (-1)^{\frac{v-k-1}{4}} (3m)^{\frac{v-k-1}{4}} C_v^{\frac{v-k-1}{4}}$$

$$(k' = k-1 - 4E[\frac{1}{4}(k-1)])$$

$$\varepsilon_1 = 0 (k \neq 1), \quad \varepsilon_1 = 1 (k = 1); \quad \varepsilon_2 = 0 (k < 3), \quad \varepsilon_2 = 1 (k \geq 3)$$

$$\varepsilon_3 = 0 (k \geq 3), \quad \varepsilon_3 = 1 (k < 3); \quad \varepsilon_4 = 0 (k \neq 3), \quad \varepsilon_4 = 1 (k = 3)$$

$$\varepsilon_5 = 0 (k < 1), \quad \varepsilon_5 = 1 (k \geq 2)$$

Преобразуем граничное условие на внешнем контуре L_2 . С учетом (1.13) и (1.11) регулярные в области S функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ примут вид

$$\varphi(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v \left(\frac{A}{z}\right)^v + \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{z}{R}\right)^v \beta_v$$

$$\psi(z) = \sum_{v=0}^{\infty} d_v \left(\frac{A}{z}\right)^v + \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{z}{R}\right)^v h_v$$
(1.17)

$$\alpha_v = \sum_{k=v'}^v * a_k l_{(v-k)/4}^{(k)}, \quad d_v = \sum_{k=v'}^v * A_k l_{(v-k)/4}^{(k)} \quad (v' = v - 4E(v/4))$$

Значения $l_n^{(k)}$ определяются из условия

$$l_n^{(k)} + \frac{1}{a_0^{(1)}} \sum_{n_1=0}^n l_{n-n_1}^{(k)} a_{n_1}^{(k)} = 0, \quad a_n^{(k)} = \sum_{n_1=0}^n a_{n_1}^{(k)} a_{n-n_1}^{(k-1)}$$

Подставив граничные значения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в (1.1), получим условие на внешнем контуре L_2 в виде

$$\sum_{v=0}^{\infty} d_v \left(\frac{A}{t}\right)^v + \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v \left(\frac{t}{R}\right)^v - t \sum_{v=1}^{\infty} v \alpha_v \frac{A^v}{(\bar{t})^{v+1}} +$$

$$+ t \sum_{v=1}^{\infty} v \beta_v \frac{(\bar{t})^{v-1}}{R^v} + \sum_{v=0}^{\infty} d_v \left(\frac{A}{\bar{t}}\right)^v + \sum_{v=1}^{\infty} h_v \left(\frac{\bar{t}}{R}\right)^v = -P_2 t + C_2$$
(1.18)

Используя функции (1.3), отображающие внешность контура L_2 на внешность единичной окружности, и переходя к переменной τ , после некоторых преобразований приведем равенство (1.22) к виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} W_1(k) \tau^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} W_2(k) \tau^k + \sum_{k=1}^{\infty} W_3(k) \tau^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \gamma_{-1}^k E_k^{(k)} -$$

$$- \gamma_{-1} \tau \sum_{k=2}^{\infty} \tau^k W_4(k) - \gamma_1 \tau \sum_{k=1}^{\infty} M_2(k) \tau^{-k} - \tau \gamma_{-1} \sum_{k=1}^{\infty} M_3(k) \tau^k -$$

$$- \gamma_1 \tau \sum_{k=2}^{\infty} E_k W_4(k) + \tau \sum_{k=1}^{\infty} W_{11}(k) \tau^{-k} + \gamma_{-1} \tau \sum_{k=1}^{\infty} W_{12}(k) \tau^k +$$

$$+ \gamma_{-1} \tau \sum_{k=1}^{\infty} W_{13}(k) \tau^{-k} + \gamma_{-1} \tau W_{14}(k) + \tau \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} \gamma_{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} W_7(n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} W_8(k) \tau^k + \sum_{k=1}^{\infty} W_9(k) \tau^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} W_{10}(k) \tau^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{-1}^k h_k E_k^{(k)} = -P_2 R \tau \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k-1} \tau^{-k} + C_2$$
(1.19)

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной τ , получим следующие две бесконечных системы линейных алгебраических уравнений

$$W_1(k) + W_3(k) - \gamma_{-1}M_2(k+1) + W_{11}(k+1) + \\ + \gamma_{-1}W_3(k+1) + \gamma_k \sum_{v=0}^{\infty} W_7(v) + W_9(k) = -P_2R\gamma, \quad (1.20)$$

$$W_2(k) - \gamma_{-1}W_4(k-1)\varepsilon_2 - \gamma_{-1}M_3(k-1)\varepsilon_6 - \gamma_{-1} \sum_{v=2}^{\infty} E_v W_4(v)\varepsilon_1 + \\ + \gamma_{-1}W_{12}(k-1)\varepsilon_6 + \gamma_{-1}W_{14}(k)\varepsilon_1 + \gamma_{-1} \sum_{v=0}^{\infty} W_7(v)\varepsilon_1 + \\ + W_8(k) + W_{10}(k) = -P_2R\gamma_{-1}\varepsilon_1 \quad (1.21)$$

К этим уравнениям нужно присоединить уравнение для свободных членов (коэффициенты при нулевой степени τ):

$$W_1(0) - \gamma_1 M_2(1) + \gamma_1 W_{11}(1) + \gamma_{-1} W_3(1) + \gamma_0 \sum_{v=0}^{\infty} W_7(v) + W_{10}(0) = C_2$$

В уравнениях (1.20) и (1.21) приняты обозначения:

$$W_1(k) = \sum_{v=k}^k ** \alpha_v \gamma_{-1}^{-v} \left(\frac{A}{R}\right)^v g_{k-v}^{(v)}, \quad W_2(k) = \sum_{n=k}^{\infty} ** \beta_n \gamma_{-1}^{-n} E_{n-k}^{(n)}$$

$$W_3(k) = \sum_{n=k}^{\infty} ** \beta_n \gamma_{-1}^{-n} E_{n+k}^{(n)}, \quad W_4(k) = \sum_{v=k}^k ** (v-1) \alpha_{v-1} \left(\frac{A}{R}\right)^{v-1} \gamma_{-1}^{-v} g_{k-v}^{(v)}$$

$$W_5(k) = \sum_{n=k}^{\infty} ** (n+1) \beta_{n+1} \gamma_{-1}^{-n} E_{n-k}^{(k)}$$

$$W_6(k) = \sum_{n=k}^{\infty} ** (n+1) \beta_{n+1} \gamma_{-1}^{-n} E_{n+k}^{(k)}$$

$$W_7(k) = \sum_{v=0}^{\infty} (v+1) \beta_{v+1} \gamma_{-1}^{-v} E_v^{(v)}$$

$$W_8(k) = \sum_{n=k}^{\infty} ** h_n \gamma_{-1}^{-n} E_{n+k}^{(k)}, \quad W_9(k) = \sum_{n=k}^{\infty} ** h_n \gamma_{-1}^{-n} E_{n-k}^{(k)}$$

$$M_2(k) = \sum_{n=k}^{\infty} E_{n+2} W_4(n-k+2), \quad M_3(k) = \sum_{n=k}^{\infty} E_{n-k+2} W_4(n+2)$$

$$W_{10}(k) = \sum_{v=k-2E(k/2)}^k ** d_v \left(\frac{A}{R}\right)^v \gamma_{-1}^{-v} g_{k-v}^{(k)}, \quad W_{11}(k) = \sum_{v=k-2E(k-1)/2}^k ** W_5(v) \gamma_{k-v-1}$$

$$W_{12}(k) = \sum_{n=k}^{\infty} ** W_6(n) E_{n-k}, \quad W_{13}(k) = \sum_{n=k-2E(v-1)/2}^{\infty} ** W_6(n) E_{n+k}$$

$$W_{14}(k) = \sum_{h=1}^{\infty} W_6(k) E_h, \quad \varepsilon_6 = 0 \quad (k=1); \quad \varepsilon_6 = 1 \quad (k \neq 1)$$

Все величины $g_n^{(k)}$ определяются из условия

$$g_n^{(k)} + \frac{1}{E_0^{(k)}} \sum_{n_1=0}^n g_{n-n_1}^{(k)} E_{n_1}^{(k)} = 0$$

$$E_n^{(k)} = \sum_{n_1=0}^{\infty} E_{n_1}^{(1)} E_{n-n_1}^{(k-1)}, \quad E_n^{(1)} = \gamma_{n-1}/\gamma_{-1}, \quad E_0^{(1)} = 1$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи сводится к совокупности четырех бесконечных систем (1.15), (1.16), (1.20) и (1.21) линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_k, b_k, A_k и B_k . Для заданных отношений основных размеров сечения и длины разреза из систем (1.15), (1.16), (1.20) и (1.21) удерживаются несколько первых уравнений и определяются неизвестные коэффициенты. Число этих уравнений зависит от требуемой точности решения. Далее по (1.17) определяются искомые регулярные функции $\phi(z)$ и $\psi(z)$, а затем по формулам [1] находятся компоненты напряжений σ_r и σ_θ в характерных точках сечения.

Коэффициенты интенсивности напряжений в концевых точках разреза определяются аналогично [2, 4, 6-11]¹.

2: Для иллюстрации полученного решения рассмотрим числовой пример. При решении числовых примеров из рядов (1.3) и (1.4) удерживались десять первых членов

$$\delta_{-1} = 1/\alpha, \quad \delta_1 = 1/\alpha - \alpha, \quad \delta_3 = \alpha - \alpha^3$$

$$\delta_5 = -\alpha + 3\alpha^3 - 2\alpha^5$$

$$\delta_7 = \alpha - 6\alpha^3 + 10\alpha^5 - 5\alpha^7, \quad \alpha = (e^2 + R^2)/(2eR) > 1$$

$$\delta_9 = -\alpha + 10\alpha^3 - 30\alpha^5 + 35\alpha^7 - 14\alpha^9$$

Для семи первых слагаемых $a_n^{(1)}$ ряда (1.13) имеем следующие значения: $a_0^{(1)} = 1, a_1^{(1)} = -m, a_2^{(1)} = 3m^2, a_3^{(1)} = 15m^3, a_4^{(1)} = 91m^4, a_5^{(1)} = -612m^5, a_6^{(1)} = -4389m^6$.

Расчеты производились при следующих отношениях основных размеров сечения

I вариант $e/R=0,9; r/R=0,5; m=0; A=r$

II вариант $e/R=0,7; A/R=0,5; m=0,111$

III вариант $e/R=0,6; A/R=0,5; m=0,111$

При решении числового примера из каждой системы линейных алгебраических уравнений (1.15), (1.16), (1.20) и (1.21) удерживались десять первых уравнений и определялись коэффициенты a_k, b_k, A_k, B_k . Эти системы являются однородными относительно неизвестных коэффициентов с четными индексами. Как известно, эти коэффициенты должны быть равны нулю. Таким образом, в системах (1.15), (1.16), (1.20) и (1.21) индекс суммирования k принимает значения $k=1, 3, \dots, 2n-1$. Компоненты напряжений в характерных точках сечения помещены в таблице.

Теперь определим коэффициенты интенсивности напряжений и критического значения контурной нагрузки (в концевых точках разреза).

Для рассматриваемой задачи круглой пластинки центральным квадратным отверстием и двумя разрезами коэффициент интенсивности напряжений при действии только внутреннего давления были получены в долях величины $10 \cdot K/P\sqrt{l}$: 3,876 (I вариант), 4,88 (II вариант), 9,52 (III вариант).

После этого, следуя [2, 6], можно определить предельные значения напряжений $\sigma_b = P_*$.

¹ Метод, указанный в работе Бахтияров И. А., Кулиев С. А. Распределение напряжений в плоском поле, ослабленном центральным круглым отверстием, при наличии контурных давлений. М., 1970. 30 с.— Деп. в ВИНТИ 25.06.70, № 219170 быстрее ведет к цели, чем предлагаемый в данной статье, однако последний имеет преимущество, когда границы области сравнительно близки друг к другу.

	z/R	σ_0/P
I	0,555	2,532
	$i \cdot 0,555$	2,297
	0,89	1,069
II	0,555	3,32
	$i \cdot 0,555$	2,82
	0,69	1,22
III	0,555	6,797
	$i \cdot 0,555$	5,54
	0,59	2,38

Минимальное значение предельного напряжения равно $P_* \approx 0,97P_0 = \sigma_0$, где P_0 — критическое значение нагрузки P , σ_0 — среднее значение технической прочности материала. Критическое значение контурной нагрузки определяется выражением $P_0 = K_c \sqrt{\pi l}$, $l = R - e$, где K_c — сопротивление материала разрушения, определяемое экспериментально. Когда $K\sqrt{\pi} = K_c$, наступает распространение трещин в теле. Распространение трещин в рассматриваемой пластинке начинается при следующих значениях контурных нагрузок: $P = 2,66\sigma_0$ (I вариант), $P = 2,112\sigma_0$ (II вариант), $P = 1,083\sigma_0$ (III вариант).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулиев С. А. Определение напряжений в скручиваемом брусе кругового кольцевого сечения с двумя разрезами. Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 187—192.
2. Кулиев С. А. Определение напряжений при кручении квадратного бруса с центральной щелью. Прикл. мех. 1984. Т. 20. № 10. С. 85—90.
3. Кулиев С. А. К вопросу кручения призматических брусков с центральной круглой полостью // Изв. АН Азерб.ССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1981. № 2. С. 118—122.
4. Шерман Д. И. Об одном методе решений задач теории упругости для двухсвязных областей. Докл. АН СССР (ДАН СССР). 1947. № 8. С. 701—704.
5. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. Киев: Наук. думка. 1976. 443 с.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707 с.
7. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. Н. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1982. 488 с.
8. Черепанов Г. П. О развитии трещин в сжатых телах // ПИММ. Т. 30. Вып. I. 1966. С. 82—93.
9. Bowie D. L. and Freese C. E. Elastic analysis for a radial crack in a circular ring // Eng. Fract. Mech. 1972. V. 4. P. 315—321.
10. Sih G. C., Paris P. C. and E Erdogan F. Crack tip stress-intensity factors for plane extension and plate bending problems // J. Appl. Mech. 1962.
11. Tracy P. G. Elastic analysis of radial cracks emanating from the outer and inner surfaces of a circular ring // Eng. Fract. Mech. 1979. V. 11. P. 291—300.

Баку

Поступила в редакцию
1.VII.1986