

УДК 531.537

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА С КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ОСЬЮ

БАТАЛОВА З. С., БЕЛЯКОВА Г. В., БУХАЛОВА Н. В.

Изучаются колебательные и вращательные периодические движения параметрически возбуждаемого маятника. С помощью аналитических и численных методов определяется число периодических движений и устанавливаются области их существования и устойчивости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейное неавтономное дифференциальное уравнение второго порядка, зависящее от двух параметров a и b :

$$x'' + (a + b \cos 2t) \sin x = 0 \quad (1.1)$$

К уравнению такого вида сводится задача о движениях маятника (ротора), ось подвеса которого совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль вертикальной прямой l [1]. Другие приложения математической модели (1.1) можно найти в [2–4]. Практический интерес представляют периодические движения маятника вращательного и колебательного типа, синхронные с колебаниями его оси. Этим движениям соответствуют периодические решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условию $x(t + p\pi) = x(t) + 2p\pi$ ($p = 1, 2, \dots$; $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). При $q = 0$ это решение отвечает состоянию покоя маятника или периодическим колебаниям около прямой l , при $q \neq 0$ — вращательным движениям: за p периодов колебаний оси подвеса происходит $|q|$ оборотов маятника вокруг оси в положительном ($q > 0$) или отрицательном ($q < 0$) направлении. Задача состоит в отыскании периодических решений и определении их характера устойчивости в зависимости от параметров a и b .

Решению этой задачи посвящены работы [2–7]. В большинстве исследований рассматривается линейное уравнение Матье, описывающее малые колебания маятника относительно вертикали. На плоскости параметров a, b построены диаграмма устойчивости стационарного решения и характеристические кривые, в точках которых существуют решения колебательного типа, описываемые функциями Матье целого и дробного порядка [8, 9]. Нелинейному уравнению посвящен ряд работ, использующих аналитические и численные методы [2, 5–7]. При определенных значениях параметров изучены некоторые периодические режимы с применением ЭВМ и электронных моделирующих установок.

В публикуемой работе определяется число периодических решений одного типа и находятся области их существования и устойчивости. Рассмотрены решения в зависимости от параметра b , характеризующего амплитуду колебаний оси вращения. Результаты, полученные с помощью метода Чезари для малых b , численно продолжены в область больших его значений. Построены диаграммы устойчивости ряда решений колебательного типа в зависимости от двух параметров a и b . Выяснено влияние нелинейности на области существования функций Матье и изучены бифуркации, приводящие к смене характера устойчивости. Проведенное исследование позволило выяснить качественные особенности разных типов периодических решений и установить общие закономерности их бифурка-

ционных диаграмм в зависимости от четности чисел, характеризующих период, число вращений и колебаний.

2. Периодические движения маятника с колеблющейся вертикальной осью. Уравнение (1.1) при учете параметра b ($a=0$) описывает движение маятника в горизонтальной плоскости, x обозначает угол отклонения маятника от некоторой прямой l , вдоль которой ось вращения совершает прямолинейные гармонические колебания. Заменой $b/4 \rightarrow \mu$, $2t + \pi/2 \rightarrow t$ уравнение (1.1) приводится к виду

$$x'' + \mu \sin t \sin x = 0 \quad (2.1)$$

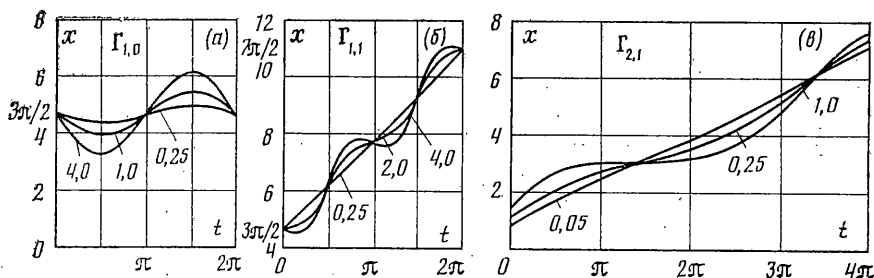
Обозначим через $\Gamma_{p,q}$ решение $x=x(t)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее условию $x(t+2\pi p) = x(t) + 2\pi q$ ($p=1, 2, \dots$; $q=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Аналитическое исследование решений $\Gamma_{p,q}$ с помощью метода Чезари позволило найти решения $x(t) = qt/p + \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) при $\mu=0$, порождающие решения $\Gamma_{p,q}$ при малых $\mu > 0$, а также получить следующий результат.

Теорема 1. При достаточно малых $\mu > 0$ существует бесконечное число периодических решений $\Gamma_{p,q}$, находящихся в соответствии с простой дробью q/p из интервала $(-\infty, \infty)$. Для решений вращательного типа имеют место два случая: 1. Если p и q — нечетные числа, то при $\mu=0$ имеются два решения $x_1(t) = (qt + \pi/2)/p$ и $x_2(t) = (qt + 3\pi/2)/p$, порождающие соответственно решения $\Gamma_{p,q}^1$ и $\Gamma_{p,q}^2$. При $\lambda_1 = (-1)^{(|q|+1)/2} \text{sign } q > 0$ решение $\Gamma_{p,q}^1$ устойчивое, $\Gamma_{p,q}^2$ неустойчивое; при $\lambda_1 < 0$, наоборот, решение $\Gamma_{p,q}^1$ неустойчивое, $\Gamma_{p,q}^2$ устойчивое. 2. Если одно из чисел p или q нечетное, а второе — четное, то при $\mu=0$ имеются четыре решения $x_i(t) = (qt + \pi(l-1)/2)/p$ ($l=1, 4$), порождающие при $\mu > 0$ четыре решения $\Gamma_{p,q}^l$. При $\lambda_2 = (-1)^{|q|+1} < 0$ решения $\Gamma_{p,q}^1$ и $\Gamma_{p,q}^3$ устойчивы, $\Gamma_{p,q}^2$ и $\Gamma_{p,q}^4$ неустойчивы, при $\lambda_2 > 0$, наоборот, $\Gamma_{p,q}^1$ и $\Gamma_{p,q}^3$ неустойчивы, $\Gamma_{p,q}^2$ и $\Gamma_{p,q}^4$ устойчивы. Стационарные решения $\Gamma_{1,0}^1 : x(t) = 0$ и $\Gamma_{1,0}^3 : x(t) = \pi$ устойчивы, периодические решения $\Gamma_{1,0}^2$ и $\Gamma_{1,0}^4$ колебательного типа, порождаемые решениями $x_2(t) = \pi/2$ и $x_4(t) = 3\pi/2$, неустойчивы.

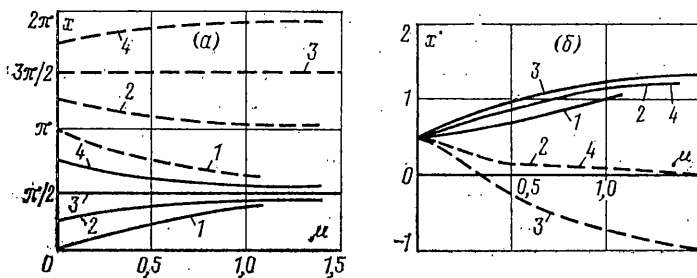
Продолжение периодических решений $\Gamma_{p,q}$ в область больших значений параметра μ проводилось с помощью численных методов исследования динамических систем [10]. Укажем некоторые свойства решений уравнения (2.1), позволившие сократить объем исследований. Уравнение инвариантно относительно следующих замен переменных: 1° $x \leftrightarrow x + 2\pi q$, $t \leftrightarrow t + 2\pi p$ ($p, q = \pm 1, \pm 2, \dots$); 2° $x \leftrightarrow \pi - x$, $t \leftrightarrow -t$; 3° $x \leftrightarrow -x$. На основании замен 1° в плоскости начальных условий ($t_0=0$) достаточно рассматривать полосу $\{x \pmod{2\pi}, x'\}$, представляющую собой поверхность H кругового цилиндра с образующей, параллельной оси x' . В силу замен 2° и 3° структура поверхности H симметрична относительно прямых $x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$ и точек $(0, 0)$, $(\pi, 0)$. Следовательно, достаточно изучить периодические решения $\Gamma_{p,q}$ с $q \geq 0$, соответствующие начальным точкам, лежащим в областях $\{0 \leq x \leq \pi/2, x' \geq 0\}$ и $\{\pi \leq x \leq 3\pi/2, x' \geq 0\}$.

Каждое решение $\Gamma_{p,q}$ рассматривалось в интервале $[0, \mu_0]$. Найдены координаты начальной точки $(x(0), x'(0))$, соответствующей решению $\Gamma_{p,q}$, и вычислены его мультипликаторы ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 \cdot \rho_2 = 1^1$). В качестве приближения начальной точки при малых $\mu > 0$ использовались значения $x(0)$ и $x'(0) = q/p$ для порождающих решений, указанных в теореме 1. Шаг $\Delta\mu$ по параметру μ выбирался в зависимости от величины мультипликаторов. Для значений $\rho_{1,2}$, близких к $+1$ или -1 , величина $\Delta\mu$ равнялась 10^{-3} . Для других значений $\rho_{1,2}$ исследуемое решение прослеживалось с шагом $\Delta\mu = 0,05$. Величина μ_0 рассматриваемого интервала определялась условием $\max\{|\rho_1(\mu_0)|, |\rho_2(\mu_0)|\} \geq 10^3$.

¹ Багалова З. С., Бухалова Н. В. Динамика маятника с колеблющейся вертикальной осью вращения: Препринт № 187, Горький: Горьк. науч.-исслед. радиофиз ин-т. 1984. 29 с.



Фиг. 1



Фиг. 2

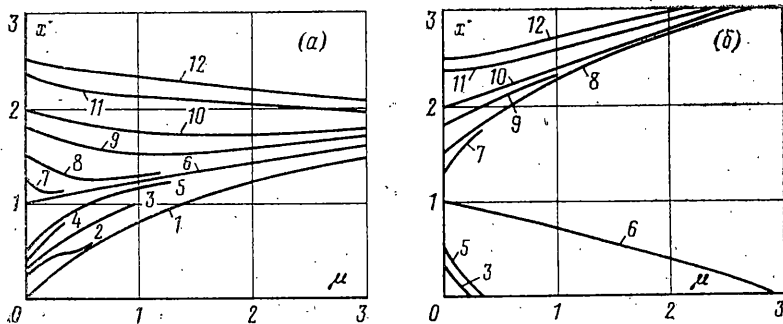
Приведем графики некоторых периодических решений $\Gamma_{p,q}$. На фиг. 1, а для различных значений μ , указанных около каждой кривой, представлено неустойчивое решение $\Gamma_{1,0}$ колебательного типа. При малых μ графики вблизи к прямой $x=3\pi/2$. С ростом μ амплитуда колебаний решения $\Gamma_{1,0}$ возрастает. На фиг. 1, б представлены графики решения $\Gamma_{1,1}$ (одно вращение за период 2π), устойчивого при малых μ . С ростом μ происходит два колебания около прямой $x=t+3\pi/2$, соответствующей порождающему решению. Устойчивое при малых μ решение $\Gamma_{2,1}$ (фиг. 1, в) имеет колебательный характер относительно порождающего решения $x=t/2+\pi/4$. Аналогичное поведение имеют другие $\Gamma_{p,q}$.

Начальные значения $x(0)$ и $x'(0)$ ряда периодических решений представляют собой монотонно возрастающие или убывающие функции параметра μ . В качестве примера на фиг. 2 приведены графики зависимости начального отклонения (фиг. 2, а) и начальной скорости (фиг. 2, б) четырех периодических решений $\Gamma_{2,1}^i$ ($i=1, 4$) (одно вращение за период 4π). Около каждого графика указан номер i . Штриховые линии соответствуют значениям $x(2\pi)$ и $x'(2\pi)$.

При исследовании ряда периодических решений в интервале $[0, \mu_0]$ оказалось, что решения $\Gamma_{p,q}$ неустойчивые при малых $\mu > 0$, не меняют характера устойчивости с ростом μ . Функция $\rho_1(\mu)$ для неустойчивого решения $\Gamma_{1,\pm 1}$ близка к линейной, $\rho_2 = \rho_1^{-1}$. Для значений $|q|/p < 1$ функция $\rho_1(\mu)$ возрастает значительно быстрее, чем для $|q|/p > 1$. При одинаковых p рост функции $\rho_1(\mu)$ зависит от q : при $|q| > p$ меньшему значению $|q|$ соответствует более быстрое возрастание функции $\rho_1(\mu)$, при $|q| < p$, наоборот, для меньших значений $|q|$ функция $\rho_1(\mu)$ возрастает более медленно.

Решения $\Gamma_{p,q}$ устойчивые при малых $\mu > 0$, становятся неустойчивыми при некотором значении параметра μ_* , причем в случае нечетных p и q их мультипликаторы $\rho_1(\mu_*) = \rho_2(\mu_*) = +1$. При $\mu > \mu_*$ они действительны, положительны, $\rho_1 > 1$, $\rho_2 = \rho_1^{-1}$. Если одно из чисел p или q нечетное, а второе — четное, то $\rho_1(\mu_*) = \rho_2(\mu_*) = -1$. При $\mu > \mu_*$ мультипликаторы становятся отрицательными, $|\rho_1| > 1$, $|\rho_2| < 1$. Результаты исследования ряда решений сведены в таблицу. Эти данные показывают, что интервалы $(0, \mu_*)$ устойчивости решений $\Gamma_{p,q}$ зависят от отношения $|q|/p$. При одинаковых значениях p , в случае $|q|/p > 1$, величина интервала устойчивости тем больше, чем больше $|q|$. При $|q|/p < 1$, наоборот, величина интервала уменьшается с ростом $|q|$. Это означает, что быстрые периодические вращения ($|q| > p$) имеют больший интервал устойчивости, чем медленные ($|q| < p$). Однако следует отметить, что в случае когда p и q существенно различны, имеется довольно большой промежуток изменения параметра μ , на котором $\text{Re } \rho_{1,2}$ близка к единице. Например, для решений $\Gamma_{1,4}$ и $\Gamma_{1,5}$ $\text{Re } \rho_{1,2}$ мало отличается от единицы на интервалах $(0, 13)$ и $(0, 15)$, для решений $\Gamma_{3,5}$ и $\Gamma_{3,7}$ — на интервалах $(0, 1, 2)$ и $(0, 2, 8)$. Это означает, что при учете малых диссипаций устойчивые быстрые или многопериодические вращения исчезают при малых μ (происходит их слияние с неустойчивыми решениями $\Gamma_{p,q}^2$). Решения $\Gamma_{1,\pm 1}$ имеют мультипликаторы, сильно отличающиеся от единицы. При

² См. указ публ. с. 19.



Фиг. 3

учете диссипаций эти решения не исчезают и остаются устойчивыми на значительном интервале изменения параметра μ .

Рассмотрим поведение начальных значений $x(0)$, $x'(0)$, соответствующих решениям $\Gamma_{p,q}$. На фиг. 3 приведены кривые, характеризующие изменение начальной скорости $x'(0)$ в интервале $[0, \mu_0]$. Для сравнения здесь выбраны такие решения $\Gamma_{p,q}^1$ и $\Gamma_{p,q}^2$, у которых начальные отклонения соответственно равны $x(0) = \pi/2$ (фиг. 3, а) и $x(0) = 3\pi/2$ (фиг. 3, б) при любых $\mu > 0$. Номера кривых от 1 до 12 соответствуют значениям дроби $q/p = 0/1, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 1/1, 5/4, 3/2, 9/5, 2/1, 7/3, 5/2$. При

$ q /p$	μ_*	$\rho(\mu_*)$	μ_0	$ q /p$	μ_*	$\rho(\mu_*)$	μ_0
$1/1$	1,424	1	13	$1/4$	0,259	-1	0,5
$2/1$	3,017	-1	12	$3/4$	0,153	-1	0,4
$3/1$	8,076	1	13	$5/4$	0,545	-1	0,9
$4/1$	14,078	-1	22	$1/5$	0,289	1	0,5
$5/1$	23,515	1	34	$2/5$	0,234	-1	0,5
$7/1$	46,274	1	60	$3/5$	0,229	1	0,35
$9/1$	76,357	1	95	$4/5$	0,125	-1	0,3
$1/2$	0,273	-1	2	$7/5$	1,063	1	1,35
$3/2$	1,353	-1	3	$9/5$	2,089	1	2,45
$5/2$	4,034	-1	6	$1/7$	0,260	1	0,35
$1/3$	0,339	1	1	$3/7$	0,249	1	0,35
$2/3$	0,196	-1	0,5	$5/7$	0,172	1	0,3
$4/3$	0,877	-1	1,9	$9/7$	0,746	1	0,9
$5/3$	1,865	1	2,5	$1/9$	0,238	1	0,35
$7/3$	3,790	1	4,5	$5/9$	0,214	1	0,3
				$7/9$	0,138	1	0,2

$\mu=0$ начальная скорость $x'(0) = q/p$. Из графиков следует, что решения $\Gamma_{1,1}$ играют наиболее важную роль: с ростом μ к неустойчивому решению $\Gamma_{1,1}^1$ приближаются все решения $\Gamma_{p,q}^1$, для которых отношение $q/p > -1$. Решение $\Gamma_{1,1}^2$, устойчивое при малых $\mu > 0$, наоборот, «отталкивает» все другие решения. Этот факт находится в согласии с рассмотренной ранее [11] структурой области, содержащей решения $\Gamma_{p,p}$ ($p=1, 2, \dots$). К другим неустойчивым решениям с увеличением параметра μ также приближаются близкие к ним решения, однако решения $\Gamma_{1,\pm 1}$ основного периода колебания оси вращения маятника играют определяющую роль.

Из фиг. 1 и 2, б следует, что ряд периодических решений $\Gamma_{p,q}$, у которых $0 < q/p \leq 1$, с ростом μ становятся вращательно-колебательными, поскольку у них начальная скорость отрицательна. Так, при $\mu > 3$ для решения $\Gamma_{1,1}$ значение $x'(0) < 0$: за период 2π происходит одно вращение и два колебания относительно прямой l . Из графиков видно, что чем меньше отношение q/p , тем меньше значение μ , при котором начальная скорость становится отрицательной.

Далее рассмотрим вопросы, связанные со сменой устойчивости периодических решений $\Gamma_{p,q}$. Численно были изучены бифуркации некоторых решений, указанных в таблице. Оказалось, что решения $\Gamma_{p,q}$, у которых в момент смены устойчивости мультипликаторы $\rho_{1,2} = -1$, порождают два устойчивых периодических решения того же типа $\Gamma_{p,q}$. Так, при смене устойчивости решения $\Gamma_{1,1}^1$ при $\mu_* = 1,424$ возникают два решения типа $\Gamma_{1,1}$, которые являются устойчивыми в интервале $(1,424, 1,737)$. При $\mu_* = 1,737$ их мультипликаторы $\rho_{1,2} = -1$ (подробнее об этом см. [12]). Если мультипликаторы решения $\Gamma_{p,q}$ в момент смены устойчивости равны $\rho_{1,2} =$

$= -1$, то при $\mu > \mu_*$ возникает одно решение типа $\Gamma_{2p, 2q}$. Например, после смены устойчивости решения $\Gamma_{2,1}^2$ при $\mu_* = 0,273$ обнаружено решение $\Gamma_{4,2}$ (два оборота вокруг оси вращения за период $\tau = 8\pi$) с интервалом устойчивости $(0,273, 0,274)$. При $\mu_{**} = 0,274$ мультипликаторы решения $\Gamma_{4,2}$ равны $\rho_{1,2} = -1$. Сформулируем результаты исследования периодических решений $\Gamma_{p,q}$ в виде общего утверждения.

Теорема 2. Периодические решения $\Gamma_{p,q}$ (простая дробь $q/p \in (-\infty, \infty)$), существующие при малых μ , могут быть продолжены в ограниченном интервале $(0, \mu_0)$ изменения параметра μ . Решение $\Gamma_{p,q}$, неустойчивое при малом μ , не меняет характера устойчивости. Решение $\Gamma_{p,q}$, устойчивое при малом μ , становится неустойчивым при некотором μ_* . При этом имеют место два случая. 1. Если p и q — нечетные числа, то смена устойчивости решения $\Gamma_{p,q}$ сопровождается возникновением из него двух устойчивых решений типа $\Gamma_{p,q}$. 2. Если одно из чисел p или q — четное (включая $q = 0$), второе — нечетное, то смена устойчивости сопровождается возникновением одного устойчивого решения типа $\Gamma_{2p, 2q}$.

3. Области существования и устойчивости периодических колебаний маятника. Периодические решения уравнения (1.1) $\gamma_{p,s}$: $x = x(t)$, удовлетворяющие условию $x(t + p\pi) = x(t)$ ($p = 1, 2, \dots$), соответствуют колебаниям маятника относительно вертикальной прямой l ; s означает число колебаний за период $\tau = p\pi$. Выявлены бифуркации, связанные с возникновением решений $\gamma_{p,s}$, и получены следующие результаты.

Теорема 3. Периодические решения $\gamma_{p,s}$ с взаимно простыми числами p и s , $s/p \in (0, \infty)$ возникают из стационарного решения $x(t) = 0$ на кривой $l_{p,s}$, выходящей из точки $((2s/p)^2, 0)$ плоскости a, b . При этом имеют место следующие случаи: 1. Если p — нечетное число и $p \neq 1$, то на кривой

$l_{p,s}$ возникают два устойчивых решения $\gamma_{p,s}^1$ и $\gamma_{p,s}^2$, соответствующих начальным точкам $(0, x^*(0))$ и $(0, -x^*(0))$, и два неустойчивых решения

$\gamma_{p,s}^3$ и $\gamma_{p,s}^4$, соответствующих начальным точкам $(x(0), 0)$ и $(-x(0), 0)$.

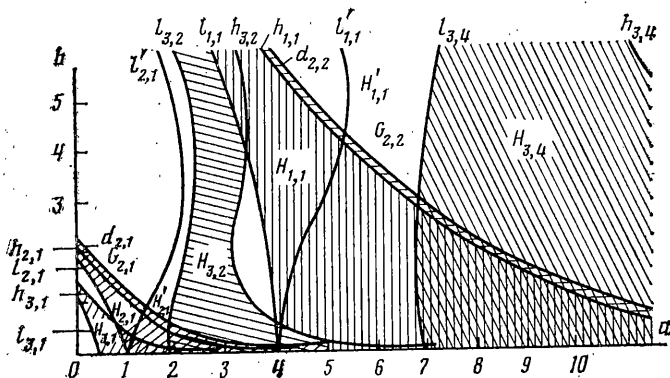
2. Если p — четное число и $p \neq 2$, то на кривой $l_{p,s}$ возникает одно устойчивое решение $\gamma_{p,s}^1$ с начальной точкой $(x(0), 0)$, для которого $x(p\pi/2) = -x(0)$, $x^*(p\pi/2) = 0$, и одно неустойчивое решение $\gamma_{p,s}^2$ с начальной точкой $(0, x^*(0))$, для которого $x(p\pi/2) = 0$, $x^*(p\pi/2) = -x^*(0)$. 3. При $p = 1, 2$:

устойчивые и неустойчивые решения $\gamma_{p,s}^i$ возникают соответственно на кривых $l_{p,s}$ и $l'_{p,s}$, ограничивающих области параметрического резонанса стационарного решения $x(t) = 0$, число их и начальные точки определяются условиями случаев 1 и 2, так же как при $p \neq 1, 2$.

Отметим, что линии $l_{p,s}$ есть характеристические кривые, в точках которых существуют устойчивые по Ляпунову периодические решения $\gamma_{p,s}$ уравнения Матье. Как известно [8, 9], эти решения называются функциями Матье целого (при $p = 1, 2$) или дробного порядка. Поэтому при учете нелинейности (в уравнение (1.1) входит $\sin x$ вместо x) решения $\gamma_{p,s}$ есть продолжение функций Матье в область, лежащую справа от кривой $l_{p,s}$.

Чтобы найти области $H_{p,s}$ существования решений $\gamma_{p,s}$ и исследовать их устойчивость и поведение в зависимости от параметров a, b , было проведено численное изучение с помощью [10] ряда конкретных решений. Определялись начальные точки $(x(0), x^*(0))$, соответствующие решениям $\gamma_{p,s}^i$, и вычислялись их мультипликаторы ρ_1 и ρ_2 , определяющие характер устойчивости (в первом приближении). Каждое решение прослеживалось по параметрам a, b до тех пор, пока $|\rho_1|$ или $|\rho_2|$ не достигнет величины $10^2 - 10^3$.

Г. Рассмотрим π -периодические решения $\gamma_{1,1}^i$ ($i = \overline{1, 4}$) (одно колебание за один период колебаний оси), порождаемые стационарным решением $x(t) = 0$ при смене его устойчивости на кривых $l_{1,1}$ и $l'_{1,1}$, выходящих из точки $(4, 0)$ (фиг. 4). Вид решения $\gamma_{1,1}$ показан на фиг. 5 для значений $a = 7,8$, $b = 2,5$. Полупрямая $a > 4$, $b = 0$ является общей границей областей существования всех решений $\gamma_{1,1}^i$. Кривые $l_{1,1}$



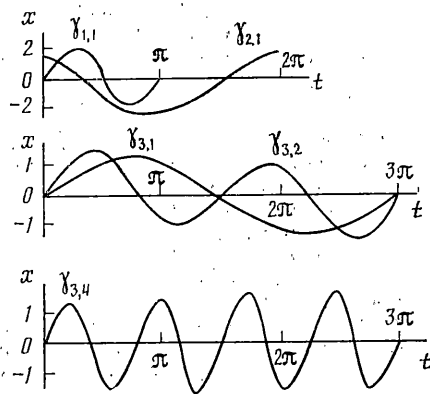
Фиг. 4

и $l_{1,1}$ ограничивают слева области $H_{1,1}$ и $H_{1,1}'$ существования решений $\gamma_{1,1}^1$, $\gamma_{1,1}^2$ и $\gamma_{1,1}^3$, $\gamma_{1,1}^4$ соответственно. Вычисление мультипликаторов решений $\gamma_{1,1}^1$ и $\gamma_{1,1}^2$

при удалении точки (a, b) от кривой $l_{1,1}$ показало, что в заштрихованной части области $H_{1,1}$ (вертикальная штриховка) эти решения являются устойчивыми. Мультипликаторы $\rho_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$ этих решений меняются так, что при движении точки (a, b) от границ области $H_{1,1}$ к линии $h_{1,1}$ угол φ монотонно возрастает от нуля до π . На кривой $h_{1,1}$ значения мультипликаторов равны -1 , при переходе через кривую $h_{1,1}$ они становятся действительными отрицательными, причем $|\rho_1| > 1$, $\rho_2 = \rho_1^{-1}$. Поэтому

периодические решения $\gamma_{1,1}^1$ и $\gamma_{1,1}^2$ в точках (a, b) области $H_{1,1}$, лежащих выше кривой $h_{1,1}$, являются неустойчивыми.

Смена устойчивости решения $\gamma_{1,1}^i$ ($i=1, 2$) сопровождается возникновением из него устойчивого периодического решения $\gamma_{2,2}^i$ (два колебания за период $\tau=2\pi$). Областью $G_{2,2}$ существования этих решений является множество точек (a, b) , лежащих выше линии $h_{1,1}$. Решения устойчивы в узкой полосе между линиями $h_{1,1}$ и $d_{2,2}$ (горизонтальная штриховка). Мультипликаторы решения $\gamma_{2,2}^i$ в точках кривой $d_{2,2}$ равны $\rho_{1,2} = -1$.

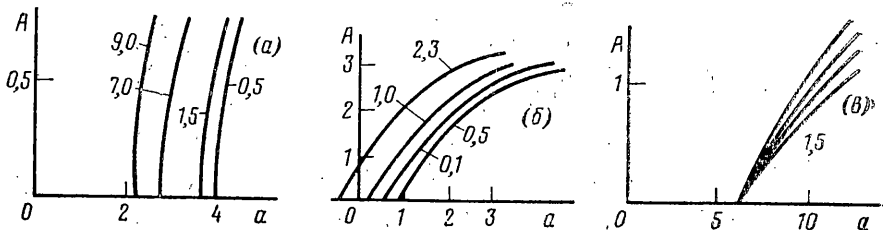


Фиг. 5

Для решений $\gamma_{1,1}^1$ и $\gamma_{1,1}^2$ начальные отклонения равны нулю. Кривые, характеризующие зависимость амплитуды колебаний от параметров, приведены на фиг. 6, а. Видно, что с увеличением параметров a и b амплитуда колебаний периодических решений $\gamma_{1,1}^3$ и $\gamma_{1,1}^4$ возрастает.

При удалении точки (a, b) от границ области $H_{1,1}'$ значение мультипликатора ρ_1 решений $\gamma_{1,1}^3$ и $\gamma_{1,1}^4$ возрастает от единицы до значений порядка 10^3-10^4 , $\rho_2 = \rho_1^{-1}$, поэтому решения $\gamma_{1,1}^3$ и $\gamma_{1,1}^4$ в области $H_{1,1}'$ являются неустойчивыми. Начальная скорость при любых a, b равна нулю, начальное отклонение для $\gamma_{1,1}^3$ увеличивается от нуля, но не превышает значение π (для $\gamma_{1,1}^4$ уменьшается от нуля, оставаясь больше $-\pi$).

2°. Периодические решения $\gamma_{2,1}^1$ и $\gamma_{2,1}^2$ (одно колебание за два периода колебаний оси, см. фиг. 5, $a=0,66$, $b=1,56$) возникают при смене устойчивости стационарного решения $x(t)=0$ на кривых $l_{2,1}$ и $l_{2,1}'$ соответственно (фиг. 4). Областью $H_{2,1}$ существования решения $\gamma_{2,1}^1$ является множество точек, ограниченное кривой $l_{2,1}$ и



Фиг. 6

полупрямой $a > 1$, $b = 0$. При движении точки (a, b) от этих линий к кривой $h_{2,1}$ мультипликаторы ρ_1 и ρ_2 решения $\gamma_{2,1}^1$ движутся по границе единичного круга, причем так, что угол φ монотонно возрастает от нуля до 2π . На кривой $h_{2,1}$ они равны $+1$. При переходе через кривую $h_{2,1}$ происходит рождение одного седлового и двух устойчивых решений $\gamma_{2,1}$. Потеря устойчивости этих решений происходит на кривой $d_{2,1}$. Смена устойчивости сопровождается рождением устойчивого периодического решения $\gamma_{4,2}$ (два колебания за период $\tau = 4\pi$).

На фиг. 6, б представлены амплитудные характеристики решения $\gamma_{2,1}^1$. Видно, что все кривые лежат ниже прямой $x = \pi$ и с ростом параметров a и b стремятся к ней. Начальная скорость решения $\gamma_{2,1}^1$ равна нулю, поэтому кривые на фиг. 6, б характеризуют также зависимость начального отклонения $x(0)$ решения $\gamma_{2,1}^1$ от параметров.

Область $H_{2,1}^2$ существования второго периодического решения $\gamma_{2,1}^2$ является множеством точек на плоскости a, b , ограниченное кривой $l_{2,1}^2$ и полупрямой $a > 1$, $b = 0$. Вычисление мультипликаторов решения $\gamma_{2,1}^2$ показало, что в области $H_{2,1}^2$ оно является неустойчивым. Начальное отклонение для него равно нулю при любых a, b , начальная скорость с ростом параметров увеличивается от нуля.

3°. Проведено исследование 12 периодических решений $\gamma_{3,1}^i, \gamma_{3,2}^i$ и $\gamma_{3,4}^i$ ($i = \overline{1, 4}$)

периода 3π , возникающих из стационарного нулевого решения на кривых $l_{3,1}, l_{3,2}$ и $l_{3,4}$, лежащих в области его устойчивости. Решения $\gamma_{3,1}, \gamma_{3,2}, \gamma_{3,4}$ приведены на фиг. 5 при $a = 0,51, b = 0,5; a = 2,5; b = 1,5; a = 10, b = 1,5$ соответственно. Области $H_{3,1}, H_{3,2}, H_{3,4}$ существования каждой группы решений ограничены линиями $l_{3,1}, l_{3,2}, l_{3,4}$ и полупрямыми $\{a > 1/9, b = 0\}, \{a > 16/9, b = 0\}$ и $\{a > 64/9, b = 0\}$ (фиг. 4). В каждой группе два решения являются седловыми в области их существования и два решения — устойчивыми в заштрихованной части области $H_{3,s}$. Начальные отклонения (скорости) каждой пары устойчивых (неустойчивых) решений равны нулю, начальные точки расположены симметрично относительно начала координат. На кривых $h_{3,1}, h_{3,2}$ и $h_{3,4}$ решения меняют устойчивость, их мультипликаторы равны -1 . Смена устойчивости решения $\gamma_{3,s}^i$ ($i = \overline{1, 2}$) сопровождается возникновением устойчивого решения $\gamma_{6,2s}^i$ с областью устойчивости в виде полосы, прилегающей к кривой $h_{3,s}$.

На фиг. 6, в приведены амплитудные характеристики решений $\gamma_{3,4}^i$ ($i = \overline{1, 4}$). Эти данные показывают, что области устойчивости решений $\gamma_{3,s}$ увеличиваются с ростом числа $s/3$ ($s = 1, 2, 4$). При увеличении параметра b области становятся более узкими. С ростом a и b происходит увеличение начальной скорости и амплитуды колебаний периодических решений, более быстрое вблизи границ областей их существования.

На основании изложенных результатов исследования решений с $p = 1, 2, 3$ и проведенного изучения ряда решений с другими значениями дроби s/p сформулирован теорему.

Теорема 4. Область $H_{p,s}$ существования решений $\gamma_{p,s}$, для которых простая дробь $s/p \in (0, \infty)$, является множеством точек, ограниченное линией $L_{p,s}$, состоящей из характеристической кривой $l_{p,s}$ и полупрямой $b = 0, a > (2s/p)^2$, выходящих из точки $((2s/p)^2, 0)$ плоскости a, b . Решения $\gamma_{p,s}$ неустойчивые вблизи границы $L_{p,s}$, не меняют устойчивости. Решения $\gamma_{p,s}$, устойчивые вблизи $L_{p,s}$, меняют устойчивость на кривой $h_{p,s}$. Для нечетных чисел p смена устойчивости сопровождается возникновением одного устойчивого решения типа $\gamma_{2p,2s}$, для четных p — возникновением двух устойчивых решений типа $\gamma_{p,s}$. Поведение начальных точек $(x(0), \dot{x}(0))$ решений $\gamma_{p,s}$ определено теоремой 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука. 1972. 470 с.
2. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука. 1971. 894 с.
3. *Chirikov B. V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems // *Physics Reports*. 1979. V. 52. No. 5. P. 263—379.
4. *Стрижак Т. Г.* Методы исследования динамических систем типа «Маятник». Алма-Ата: Наука. 1981. 253 с.
5. *Гадиоенко А. Я.* Резонансные колебания и вращения маятника с вибрирующей точкой подвеса // *Укр. мат. журн.* 1966. Т. 18. № 2. С. 102—106.
6. *Lauglin I. B.* Periodic-doubling bifurcations and chaotic motion for parametrically forced pendulum // *J. Stat. Phys.* 1984. V. 24. No. 2. P. 375—388.
7. *Flashner H., Hsu C. S.* A study of nonlinear periodic systems via the point mapping method // *Intern. J. Numer. Methods in Eng.* 1983. V. 19. No. 2. P. 185—215.
8. *Стретт М.* Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков; Киев: Гос. науч.-техн. изд. Украины. 1935. 237 с.
9. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит. 1953. 476 с.
10. *Неймарк Ю. И., Баталова Э. С., Белякова Г. В. и др.* Алгоритмы и программы численного исследования динамических систем. Горький: Изд-во Горьк. ун-та. 1983. 80 с.
11. *Баталова Э. С., Бухалова Н. В.* Иерархия структуры фазового пространства уравнения движений маятника с колеблющейся осью вращения // *Динамика систем*. Горький: Изд-во Горьк. ун-та. 1983. С. 85—114.

Горький

Поступила в редакцию
28.11.1986