

УДК 539.3:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ  
ВЯЗКОУПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ДВОЙКОЙ КРИВИЗНЫ

ВОРОВИЧ И. И., ДРОБЫШЕВА Т. П., МИНАКОВА Н. И.

Рассматривается устойчивость вязкоупругой эллипсоидальной оболочки. Исследуется поведение оболочки в зависимости от нагрузки, кривизн, эксцентриситета опорного эллипса. Устанавливаются условия реализации хлопка оболочки, появления и развития несимметричных форм равновесия.

1. Пусть имеется вязкоупругий пологий сегмент эллиптической оболочки, подверженный действию равномерного постоянного давления. Уравнения деформации оболочки запишем в следующем виде:

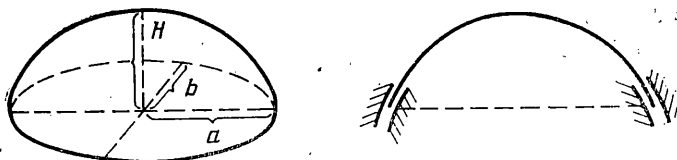
$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} + 2\gamma^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \gamma^4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial \eta^4} = \\ & = \kappa(\tau) \gamma^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - k_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - k_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] \\ & \kappa(\tau) \left( \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2\gamma^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \gamma^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} \right) = \\ & = 12(1-\sigma_0^2) \zeta(\tau) \left[ \gamma^2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + k_1 \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \right. \\ & \left. - \gamma^2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + k_2 \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2\gamma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + q_0 \right] \\ & \xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad \gamma = a/b \\ & k_1 = \kappa_1 a^2/h, \quad k_2 = \kappa_2 a^2/h \\ & W = W_1/h, \quad \Psi = \Phi/(E_0 h^3) \\ & \kappa(\tau) = E(\tau)/E_0, \quad q_0 = qa^2 b^2/(E_0 h^4) \\ & \zeta(\tau) = (1-\sigma^2(\tau))(1-\sigma_0^2)^{-1} \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $a, b$  — полуоси опорного эллипса (фиг. 1),  $\kappa_1, \kappa_2$  — кривизны срединной поверхности оболочки,  $h$  — толщина оболочки,  $W_1$  — поперечный прогиб,  $\Phi$  — функция напряжения,  $q$  — внешнее давление.

Вязкоупругие свойства материала описываются операторами  $\kappa(\tau)$  и  $\zeta(\tau)$ , причем  $E(\tau)$  и  $\sigma(\tau)$  — операторы, заменяющие соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона при исследовании вязкоупругой задачи. Постоянные  $E_0, \sigma_0$  — мгновенные значения операторов модуля Юнга и коэффициента Пуассона при  $\tau=0$ ,  $\tau=kt$  — безразмерное время.

Примем следующую структуру операторов  $\kappa(\tau)$ ,  $\zeta(\tau)$  и  $\sigma(\tau)$  (объемная ползучесть отсутствует):

$$\kappa(\tau)M = M - \gamma_1 \int_0^\tau e^{-(\tau-s)} M(s) ds \quad \zeta(\tau)M = M - \int_0^\tau e^{-(\tau-s)} [d + g(\tau-s)] M(s) ds \tag{1.2}$$



Фиг. 1

$$\sigma(\tau)M = \sigma_0 \left[ M + f \int_0^\tau e^{-(\tau-s)} M(s) ds \right]$$

$$\sigma_0 = \sigma(0), \quad f = \gamma_1 (1 - 2\sigma_0) / (2\sigma_0)$$

$$d = 2f\sigma_0^2 (1 - \sigma_0^2)^{-1}, \quad g = f^2\sigma_0^2 (1 - \sigma_0^2)^{-1}$$

Операторы  $\kappa(\tau)$ ,  $\xi(\tau)$ ,  $\sigma(\tau)$  могут быть представлены в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} \kappa(p) &= (p + \beta) / (p + 1), \quad \beta = 1 - \gamma_1 \\ \xi(p) &= (p^2 + a_1 p + b_1) / (p^2 + 2p + 1) \\ a_1 &= 2(1 - \delta\sigma_0^2) / (1 - \sigma_0^2) \\ b_1 &= (1 - \delta^2\sigma_0^2) / (1 - \sigma_0^2), \quad \delta = \beta + \gamma_1 / (2\sigma_0) \\ \sigma(p) &= \sigma_0(p + \delta) / (p + 1), \quad (p = \partial/\partial\tau) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнения деформации оболочки могут быть составлены как с применением соотношений (1.2), так и соотношений (1.3).

Для примера предположим, что оболочка имеет защемленный скользящий край и, следовательно, выполнены условия

$$W = \partial W / \partial n = 0, \quad \psi = \partial \psi / \partial n = 0 \quad (1.4)$$

Для интегрирования полученной системы необходимы начальные данные. Если использовать соотношения (1.3), то их можно взять в виде

$$W|_{\tau=0} = W_0(x, y), \quad \psi|_{\tau=0} = \psi_0(x, y) \quad (1.5)$$

$$W^*|_{\tau=0} = W_0^*(x, y), \quad \psi^*|_{\tau=0} = \psi_0^*(x, y) \quad (1.6)$$

где  $W_0$ ,  $\psi_0$ ,  $W_0^*$ ,  $\psi_0^*$  — любые достаточно гладкие функции, удовлетворяющие (1.4). При использовании соотношений (1.2) достаточно условий (1.5). С механической точки зрения естественно взять  $W_0$ ,  $\psi_0$  как решение краевой задачи, полученной из (1.1), (1.4) в результате представления  $\xi(\tau)$ ,  $\kappa(\tau)$ ,  $\sigma(\tau)$  в интегральной форме (1.2) при  $\tau=0$ , описывающей мгновенное равновесие вязкоупругого эллиптического сегмента. Кривая нагружения  $q_0 - W$  для предельного состояния оболочки может быть получена из системы уравнений (1.1), (1.4) с учетом (1.2) при  $\tau \rightarrow \infty$ .

2. Для анализа возможностей появления несимметричных форм потери устойчивости и их развития используем метод Бубнова — Галеркина. Выберем  $W$  и  $\Psi$  в следующем виде:

$$W = (1 - \xi^2 - \eta^2)^2 (A_{00} + A_{20}\xi) \quad (2.1)$$

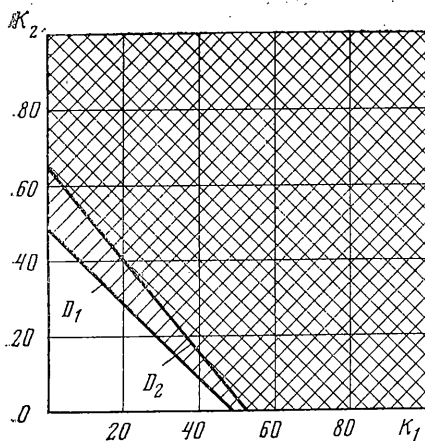
$$\Psi = (1 - \xi^2 - \eta^2)^2 (B_{00} + B_{20}\xi)$$

Подстановка (2.1) в уравнения (1.1) и применение процедуры Бубнова — Галеркина приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $A_{00}$ ,  $A_{20}$ ,  $B_{00}$ ,  $B_{20}$ :

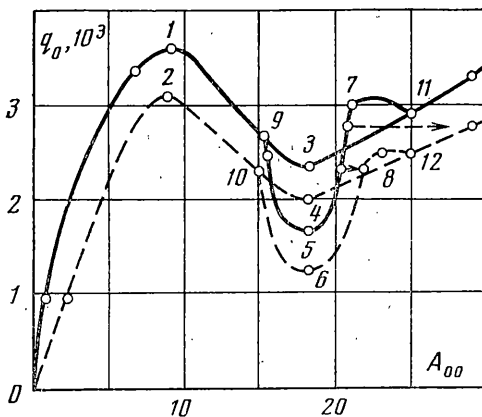
$$\begin{aligned} (p+1)C_1 B_{00} &= -(p+\beta)\gamma^2(C_2 A_{00}^2 + C_3 A_{20}^2 + C_4 A_{00}) \\ (p+1)C_5 B_{20} &= -(p+\beta)\gamma^2(C_6 A_{00} A_{20} + C_7 A_{20}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} [p^2 + (\beta+1)p + \beta]C_1 A_{00} &= 12(1 - \sigma_0^2)\gamma^2(p^2 + a_1 p + \\ &+ b_1)(-2C_2 A_{00} B_{00} + 2C_3 A_{20} B_{20} + C_4 B_{00} + q_0 \gamma^{-2} C_8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [p^2 + (\beta+1)p + \beta]C_5 A_{20} &= 12(p^2 + a_1 p + b_1)(1 - \sigma_0^2)\gamma^2(C_6 A_{00} B_{20} - \\ &- C_4 A_{20} B_{00} + C_7 B_{20}), \quad (p = \partial/\partial\tau) \end{aligned}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Здесь  $C_1=8,3976(3+2\gamma^2+3\gamma^4)$ ;  $C_2=-5,0265$ ;  $C_3=0,8378$ ;  $C_4=-2,0944(k_1+k_2)$ ;  $C_5=3,1415(5+2\gamma^2+\gamma^4)$ ;  $C_6=-1,6755$ ;  $C_7=-0,20944(k_1+3k_2)$ ;  $C_8=1,0471$ . Если необходимо изучить установившиеся режимы равновесия оболочки, то, очевидно, в (2.2) надо отбросить производные по времени.

Рассмотрим более детально вопрос о выборе начальных данных. Если удержать в (2.2) только члены с производными, то получим систему нелинейных алгебраических уравнений, описывающую мгновенно-упругое состояние оболочки, решение которой позволяет определить начальные данные  $W_0, \psi_0$  в (1.5) по формулам (2.1).

Исключая  $B_{20}, B_{00}$  из (2.2), приходим к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений, зависящих от параметра  $q_0$ :

$$F_1 \equiv M(d_1 A_{00}^2 A_{20} + d_2 A_{20} A_{00} + d_3 A_{20}^3 + d_4 A_{20}) + d_5 A_{20} = 0$$

$$F_2 \equiv M(d_6 A_{00}^3 + d_7 A_{00}^2 + d_8 A_{20}^2 + d_9 A_{00} A_{20}^2 + d_{10} A_{00}) + M_1 d_{11} q_0 + d_{12} A_{00} = 0 \quad (2.3)$$

Здесь  $d_i$  ( $i=1, \dots, 12$ ) выражаются через  $C_j$  ( $j=1, \dots, 8$ ), которые являются функциями  $k_1, k_2, \gamma$ ,  $M=M_1=1$ . Таким образом уравнения (2.3) определяют мгновенную деформацию оболочки.

Для дальнейшего важно иметь уравнения, определяющие  $A_{00}, A_{20}$  в предельном состоянии оболочки, которые получаются из (2.3) при  $M_1 = (1-d-g)/(1-\gamma_1)$ ,  $M=1-d-g$ .

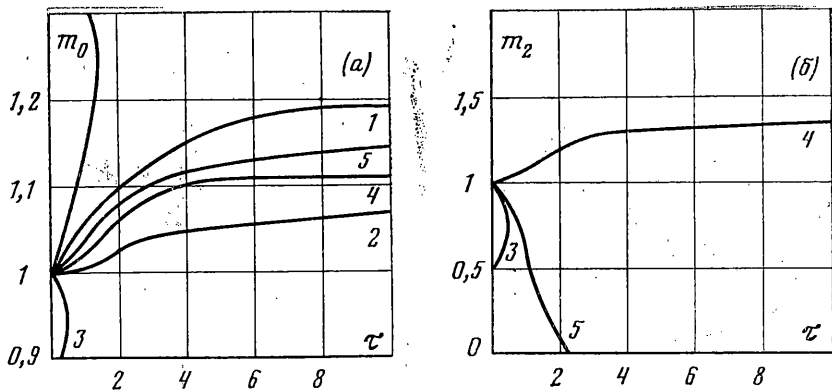
3. Аналитическое исследование системы нелинейных алгебраических уравнений (2.3) показало, что ветвление решений возможно только на немонотонной кривой нагружения, т. е. при наличии точек, соответствующих верхнему и нижнему критическим значениям. Для немонотонности же кривой нагружения необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$k_1 + k_2 \geq 1,672(3/\gamma^2 + 2 + 3\gamma^2) \quad (3.1)$$

Таким образом, неравенство (3.1) необходимо для наличия точек ветвления. Необходимым и достаточным условием существования точек бифуркации является условие

$$0,17546(k_1+k_2)^2 + 0,18716(k_1+k_2)(k_1+3k_2)(5+2\gamma^2+\gamma^4)/(3+2\gamma^2+3\gamma^4) - \\ - 0,056148(k_1+3k_2)^2(5+2\gamma^2+\gamma^4)/(3+2\gamma^2+\gamma^4) - 1,0589(3+2\gamma^2+3\gamma^4)^2\gamma^{-4} - \\ - 1,1913(5+2\gamma^2+\gamma^4)(3+2\gamma^2+3\gamma^4)\gamma^{-4} > 0 \quad (3.2)$$

Введем на плоскости  $(k_1, k_2)$  область  $D_1$ , где имеет место неравенство (3.1). Очевидно, в этой области всегда имеют место немонотонная зависимость  $q(A_{00})$  и деформация упругой оболочки с хлопком. Введем также область  $D_2$ , где имеет место неравенство (3.2) и соответственно ветвление решений. Типичная конфигурация областей  $D_1$  и  $D_2$  приведена на фиг. 2. Расчеты при различных  $\gamma$  показали, что условие (3.1) является лишь необходимым для существования точек ветвления на кривой нагружения.



Фиг. 4

Указанные выводы относятся к кривым нагружения, описывающим как мгновенно-упругое, так и предельное состояние. Для нахождения точек бифуркации, в которых решение ветвится, представим систему (2.3) в линеаризованном виде

$$\begin{aligned}
 g_{11}\Delta A_{00} + g_{12}\Delta A_{20} &= 0, \quad g_{21}\Delta A_{00} + g_{22}\Delta A_{20} = g_{23}\Delta q_0 \\
 g_{12} &= \partial F_1 / \partial A_{20} = d_1 A_{00}^3 + d_2 A_{00} + 3d_3 A_{20}^2 + d_4 \\
 g_{11} &= \partial F_1 / \partial A_{00} = 2d_1 A_{00} A_{20} + d_2 A_{20} \\
 g_{21} &= \partial F_2 / \partial A_{00} = 3d_5 A_{00}^2 + 3d_6 A_{00} + d_7 A_{20}^2 + d_8 \\
 g_{22} &= \partial F_2 / \partial A_{20} = 2d_7 A_{20} + 2d_8 A_{00} A_{20} \\
 g_{23} &= -\partial F_2 / \partial q_0 = d_{10} / \gamma^2
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Если матрица  $G = (g_{ij})$  ( $i, j=1,2$ ) при некотором значении нагрузки  $q_0$  обратима, то система (3.3) имеет единственное решение. Если матрица  $G$  при соответствующем значении  $q_0$  необратима, то возможно явление ветвления. Точки бифуркации могут быть определены и из условия

$$A_{20}^2 = (q_0 d_{10} \gamma^2 - d_5 A_{00}^3 - 1,5 d_6 A_{00}^2 - d_8 A_{00}) (d_7 + d_8 A_{00})^{-1} = 0 \quad (3.4)$$

4. Приведем результаты численного исследования задачи. Рассчитывались оболочки с различными значениями эксцентриситета  $\gamma = a/b$  и комбинациями кривизн  $k_1, k_2$ , при этом  $k_2 = \gamma^2 k_1$ . В частности, явление хлопка вязкоупругой оболочки и наличие несимметричных форм равновесия фиксировалось при следующих параметрах оболочки:  $\gamma = 3, k_1 \geq 5, k_2 \geq 45$ . Указанные соотношения вытекают из (3.1). Общий вид кривых нагружения  $q_0 - W$  для начально-упругих характеристик материала ( $\tau = 0$ ) и предельного состояния оболочки ( $\tau \rightarrow \infty$ ) приведен на фиг. 3 для  $\gamma = 3, k_1 = 7, k_2 = 63$ . Точки 1-4 соответствуют верхним и нижним критическим нагрузкам  $q_{B1}, q_{B\infty}, q_{H1}, q_{H\infty}$  мгновенно-упругого и предельного состояний оболочки, точка 5 соответствует некоторому значению нагрузки  $q_2$ . В точках 1-12 определитель  $|G|$  оказался равным нулю. Дополнительное исследование указанных точек с помощью соотношения (3.4) показало, что в точках 1-8 состояния равновесия оболочки являются критическими, но ветвление решения не имеет места. В точках 9-12 система уравнений (2.3) также является вырожденной, однако в этих точках возможно ветвление решения системы нелинейных алгебраических уравнений (2.3).

В результате расчетов выяснена картина деформирования вязкоупругой оболочки при несимметричной потере устойчивости. Выявлены особенности перехода со временем из симметричной и несимметричной форм равновесия соответственно в симметричную и несимметричную. Графики функций  $m_0(\tau) = A_{00}(\tau)/A_{00}(0)$  и  $m_2(\tau) = -A_{20}(\tau)/A_{20}(0)$  при различных величинах давления приведены на фиг. 4. Из фиг. 3, 4 видно, что мгновенно-упругие деформации вязкоупругого пологого сегмента оболочки двойкой кривизны, соответствующие симметричным формам равновесия, с течением времени либо переходят в соответствующие предельные симметричные формы равновесия (имеет место траектория первого типа [1]), либо в течение конечного времени происходит вязкоупругий хлопок (имеет место траектория второго типа [1]). Мгновенно-упругие деформации, соответствующие несимметричным формам равновесия, с течением времени переходят в предельные несимметричные. При этом в некоторых случаях несимметричные составляющие могут уменьшаться до нуля за счет роста симметричных составляющих с последующим переходом последних в предельные симметричные формы равновесия. Здесь также замечено существование траекторий указанных типов.

Итак, при  $0 < q_0 < q_2$  оболочка деформируется в мгновенно-упругую симметричную форму равновесия и затем за бесконечное время переходит в симметричную форму, соответствующую предельным характеристикам материала, имеет место траектория первого типа. Таким образом здесь нет хлопка (фиг. 4, а, кривая 1). При  $q_2 < q_0 < q_{B\infty}$  возможны следующие ситуации. Оболочка в начальный момент принимает симметричную деформацию и за бесконечное время переходит в предельное состояние, также симметричное, как и в первом случае, или прохлопывает симметричным образом и за бесконечное время переходит в соответствующую симметричную форму (фиг. 4, а, кривая 2). Оболочка принимает несимметричную форму равновесия в результате первоначального упругого хлопка и затем за бесконечное время переходит в несимметричную форму (фиг. 4, кривые 4), либо за счет сглаживания несимметричных составляющих до нуля и развития симметричных составляющих наблюдается предельный переход вязкоупругой системы в симметричную форму равновесия (фиг. 4, кривые 5), либо в течение конечного времени происходит вязкоупругий хлопок, таким образом, при несимметричных деформациях имеем траекторию второго типа (фиг. 4, кривые 3). В этом случае характерно существование траектории с обратным ходом времени. Как указывалось в [1], такие участки физического смысла не имеют, так как здесь скорости и ускорения резко возрастают и их отображение не обосновано. Рассматривать ветвления в рамках квазистатического подхода на указанных участках нельзя. На остальных участках траектории ветвлений не обнаружено.

При  $q_{B\infty} < q_0 < q_B$  имеется две ситуации.

В первой ситуации оболочка принимает симметричную форму и затем в течение конечного времени происходит вязкоупругий хлопок (имеем траекторию второго типа). На этой траектории ветвления также не обнаружены. Вторая ситуация описана в предыдущем случае.

При  $q_B < q_0$  оболочка упругим хлопком переходит в симметричную форму и затем за бесконечное время переходит также в симметричную. Здесь имеется траектория первого типа.

При других значениях  $\gamma$  были получены аналогичные результаты. Отметим, что при фиксированных  $k_1$  и  $k_2$  с уменьшением  $\gamma$  получаем все более пологие мгновенно-упругие кривые нагружения. При этом значения верхних критических нагрузок  $q_B$  и  $q_{B\infty}$  убывают, следовательно, хлопок с вязкоупругим механизмом наступает при меньших нагрузках.

Расчеты показывают, что при фиксированном значении эксцентриситета  $\gamma$  и при увеличении в некотором диапазоне значений кривизн, значения верхних критических нагрузок возрастают, следовательно, вязкоупругая конструкция становится более устойчивой.

Таким образом, в рассматриваемой задаче перехода симметричной формы равновесия в несимметричную при квазистатической деформации не обнаружено.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Воронич И. И., Минакова Н. И., Шепелева В. Г. Некоторые вопросы устойчивости вязкоупругих и вязкопластических систем на примере фермы Мизеса // Изв. АН СССР. МТТ. № 4. С. 120—132.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию  
10.IV.1986